ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Γ. ΚΑΒΟΥΣΑΝΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

εφαρμογές μαθηματικού λογισμού

σε επιχειρησιακά & οικονομικά προβλήματα

παρουσίαση με την χρήση του Excel

Δ' έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Γ. ΜΠΕΝΟΥ
ΑΘΗΝΑ 2012

Ο **Εμμανουήλ Γ. Καβουσανός** είναι Καθηγητής Χρηματοοικονομικής στο Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής (ΛΟΧΡΗ) του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών (ΟΠΑ). Είναι Διευθυντής του Εργαστηρίου Χρηματοοικονομικών Εφαρμογών και Διευθυντής του Προγράμματος Μεταπτυχιακού Σπουδών (ΠΜΣ) και του Διδακτορικού Προγράμματος στη Λογιστική και Χρηματοοικονομική του ΟΠΑ. Έλαβε Πτυχίο και Μάστερς Οικονομικών Επιστημών από το Πανεπιστήμιο του Λονδίνου και διδακτορικό από το Πανεπιστήμιο Σίτυ του Λονδίνου. Εργάστηκε στη Σχολή Διοίκησης Επιχειρήσεων (Cass Business School) του τελευταίου Πανεπιστημίου, όπου εξελίχθηκε σταδιακά ως μέλος ΔΕΠ στη βαθμίδα του Reader στα Ναυτιλιακά Οικονομικά και Χρηματοοικονομική. Το 1997 ίδρυσε το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα (MSc) σε Εμπόριο, Μεταφορές και Χρηματοοικονομική, του οποίου διετέλεσε Διευθυντής, έως το 2001. Ταυτόχρονα έχει εργαστεί ως εμπειρογνώμων στην Επιτροπή της Ευρωπαϊκής Κοινότητας και σε άλλους διεθνείς οργανισμούς και επιχειρήσεις σε θέματα Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών.

Η διδακτική του εμπειρία περιλαμβάνει διδασκαλία σε προπτυχιακό (BSc, BA) και μεταπτυχιακό (MSc, MBA, PhD) επίπεδο, σε μαθήματα όπως: Χρηματοοικονομικά Παράγωγα, Ναυτιλιακή Χρηματοοικονομική, Χρηματοοικονομική Διοίκηση, Χρηματοοικονομική των Επιχειρήσεων, Επενδύσεις Χαρτοφυλακίου, Εφαρμοσμένη Οικονομετρία και Μαθηματικά και Στατιστική για Επιχειρήσεις. Έχει μετεκπαιδευτεί σε θέματα διδασκαλίας, είναι μέλος του Ινστιτούτου Γνώσης και Διδασκαλίας της Βρετανίας και έχει κερδίσει το πρώτο βραβείο διδασκαλίας στο Cass Business School. Πέραν του Cass Business School και του ΟΠΑ, έχει διδάξει ως επισκέπτης καθηγητής σε Πανεπιστήμια όπως: LUISS στη Ρώμη - Ιταλία, Έρασμος στο Ρότερνταμ - Ολλανδία, Αμβέροας στο Βέλγιο, Euromed Marseille στη Μασσαλία - Γαλλία, Εθνικό Πανεπιστήμιο της Σιγκαπούρης, Διεθνές Ναυτιλιακό Πανεπιστήμιο στο Μάλμο - Σουηδία, Πανεπιστήμιο Ναυτιλιακών Σπουδών της Σαγκάης - Κίνα, Henley Business School του Πανεπιστημίου του Reading - Μ. Βρετανία, στο Πανεπιστήμιο του Πειραιά, στο Ανοικτό Πανεπιστήμιο της Κύπρου και στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Έχει δημοσιεύσει μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών στους τομείς της Χρηματοοικονομικής, των Ναυτιλιακών και της Εφαρμοσμένης Οικονομικής, σε υψηλού κύρους διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές. Το ερευνητικό του έργο έχει παρουσιαστεί σε διεθνή επιστημονικά και επαγγελματικά συνέδρια σε χώρες της Ευρώπης, Αμερικής, Ασίας και Αυστραλίας, έχει κερδίσει βραβεία για την ποιότητά του, ενώ εκατοντάδες είναι οι αναφορές που έχουν γίνει στο έργο του από άλλους ερευνητές. Έχει επίσης δημοσιεύσει το μοναδικό βιβλίο παγκοσμίως με τίτλο 'Derivatives and Risk Management in Shipping', Witherbyseamanship Publishing. Έχει οργανώσει διεθνή επιστημονικά συνέδρια, έχει διατελέσει επιστημονικός κριτής σε πολλά επιστημονικά περιοδικά και είναι μέλος του επιστημονικής επιτροπής έκδοσης (editorial board) επιστημονικών περιοδικών. Τρέχοντα ερευνητικά του ενδιαφέροντα περιλαμβάνουν τη διαχείριση επιχειρηματικού κινδύνου σε ναυτιλιακές αγορές, στα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα και στη διαχείριση επενδυτικών χαρτοφυλακίων.

ISBN 978-960-8249-93-6

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Γ. ΚΑΒΟΥΣΑΝΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

σε επιχειρησιακά & οικονομικά προβλήματα

παρουσίαση με τη χρήση του Excel

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Γ. ΜΠΕΝΟΥ
ΑΘΗΝΑ 2012

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Γ. ΚΑΒΟΥΣΑΝΟΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
ΣΕ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΑ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
Παρουσίαση με τη χρήση του Excel

Α΄ Έκδοση 2002, Β΄ Έκδοση 2004, Γ΄ Έκδοση 2006
Δ΄ Έκδοση 2012

σελ.576, τυπογρ.36, διαστ.17 x 24

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ Γ. ΜΠΕΝΟΥ
ISBN: 978-960-8249-93-6

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ Γ. ΜΠΕΝΟΥ
Φερών 5 (Πλ. Βικτωρίας)
Τ.Κ. 104 34 Αθήνα
Τηλ.: 210-82 51 202
Fax: 210-88 15 528
e-mail: sbenos@otenet.gr

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η ολική ή μερική ανατύπωση, η μετάφραση, η περιληπτική αναπαραγωγή κατά παράφραση ή διασκευή με οποιονδήποτε τρόπο, ηλεκτρονικό, μηχανικό, φωτοτυπικό ή άλλως πως, του παρόντος έργου, σύμφωνα με το Ν. 2121/93 και λοιπούς εν γένει κανόνες Διεθνούς Δικαίου.

Στη Ροδούλα,
στη Δήμητρα
και
στο Γιώργο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Δ' ΕΚΔΟΣΗΣ

Η παρούσα έκδοση του βιβλίου διαφέρει από την προηγούμενη –Γ' Έκδοση– ως προς τα ακόλουθα. Έχουν διορθωθεί όσα λάθη εντοπίσθηκαν στην προηγούμενη έκδοση. Έχουν προστεθεί δύο κεφάλαια με σημαντικές εφαρμογές σε οικονομικά και επιχειρηματικά προβλήματα. Αυτά είναι τα κεφάλαια για διαφορικές εξισώσεις και για εξισώσεις διαφοράς.

Στην έκδοση αυτή του βιβλίου έχουν βοηθήσει με τα σχόλιά τους οι συνάδελφοι Στέλιος Μπεκίρος και Ανδριανός Τσεκρέκος. Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στην κυρία Χαρά Αλεξανδρή για την βοήθεια της στην μετατροπή ενός δύσκολου κειμένου σε ηλεκτρονική μορφή. Βεβαίως κανένας από τους παραπάνω δεν είναι υπεύθυνος για τυχόν παραλείψεις ή λάθη, που μπορεί να υπάρχουν ακόμα. Θερμές ευχαριστίες για την άριστη συνεργασία μας προς τον εκδοτικό οίκο Ευγ. Μπένου.

Αθήνα, Απρίλιος 2012 Μανώλης Γ. Καβουσανός

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Γ' ΕΚΔΟΣΗΣ

Η παρούσα έκδοση του βιβλίου διαφέρει από την προηγούμενη –Β' Έκδοση– ως προς τα ακόλουθα. Έχουν διορθωθεί όσα λάθη εντοπίσθηκαν στην προηγούμενη έκδοση. Έχουν προστεθεί επιπλέον ασκήσεις στα κεφάλαια 3, 4, 6, 7 και 8 του βιβλίου καθώς και κάποια περαιτέρω παραδείγματα - εφαρμογές μαθηματικού λογισμού σε επιχειρησιακά και οικονομικά προβλήματα.

Στην έκδοση αυτή του βιβλίου έχουν βοηθήσει ιδιαίτερα οι συνάδελφοι μου Ιουλία Αρμάγου, Παντελής Υψηλάντης και Ανδριανός Τσεκρέκος, οι οποίοι μεταξύ άλλων εποικοδομητικών σχολίων προσέφεραν μια σειρά από ασκήσεις που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο. Βεβαίως κανένας από τους παραπάνω δεν είναι υπεύθυνος για τυχόν παραλείψεις ή λάθη, που μπορεί να υπάρχουν ακόμα. Θερμές ευχαριστίες για την άριστη συνεργασία μας προς τον εκδοτικό οίκο Γ. Μπένου.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2006 Μανώλης Γ. Καβουσανός

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β' ΕΚΔΟΣΗΣ

Η έκδοση αυτή του βιβλίου έρχεται μετά από ενάμισυ χρόνο χρήσης του στην Ελλάδα από φοιτητές σε προγράμματα σπουδών συμβατικών πανεπιστημίων και ΤΕΙ και στην εξ' αποστάσεως εκπαίδευση που προσφέρεται στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί σε προγράμματα σπουδών που αφορούν στη διαρκή επιμόρφωση ενηλίκων αλλά και από ανθρώπους της αγοράς που ενδιαφέρονται για τις εφαρμογές του μαθηματικού λογισμού στην επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν.

Πλεονεκτήματα που φαίνεται να ξεχωρίζουν στην προσέγγιση που ακολουθεί το βιβλίο αποτελούν: α) Η παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών μέσω των εφαρμογών τους σε επιχειρησιακά και οικονομικά προβλήματα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε προγράμματα σπουδών που αφορούν τις επιχειρήσεις να προσεγγίζονται οι μαθηματικές έννοιες μέσω των εφαρμογών τους στο αντικείμενο της σπουδής και όχι ως απλά μαθηματικά, β) Η χρήση του Excel ως εργαλείου εφαρμογής των επιχειρησιακών - μαθηματικών προβλημάτων που εξετάζονται και η δυνατότητα προσομοίωσης που προσφέρεται από το λογισμικό στην εξέταση των προβλημάτων αυτών. Η ταυτόχρονη εκμάθηση των δυνατοτήτων του λογισμικού αυτού είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού αποτελεί το βασικό εργαλείο Η/Υ που χρησιμοποιείται στις επιχειρήσεις για τη διακράτηση και επεξεργασία δεδομένων, γ) Η «ομαλή» εισαγωγή του αναγνώστη στις μαθηματικές έννοιες χωρίς ιδιαίτερα προαπαιτούμενα. Επιτυγχάνεται παραθέτοντας το κεφάλαιο 2 στο βιβλίο το οποίο ασχολείται με την επανάληψη των εισαγωγικών εννοιών της άλγεβρας που πολλοί αναγνώστες έχουν λησμονήσει από τη μέση εκπαίδευση. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για φοιτητές που προέρχονται από «κλασσικούς» κύκλους σπουδών μέσης εκπαίδευσης, για φοιτητές στην ανοικτή και εξ' αποστάσεως εκπαίδευση που έχουν αποφοιτήσει από τη μέση εκπαίδευση αρκετά χρόνια πριν, για μεταπτυχιακούς φοιτητές που έχουν πτυχίο σε μη συγγενείς επιστήμες ή επανέρχονται στην εκπαίδευση μετά από αρκετά χρόνια αποχής απ' αυτήν.

Στην έκδοση αυτή του βιβλίου έχουν διορθωθεί όσα λάθη εντοπίσθηκαν στην προηγούμενη έκδοση. Έχει γίνει εμπλουτισμός των βασικών εννοιών της άλγεβρας στο κεφάλαιο 2. Έχουν δοθεί περαιτέρω

εφαρμογές των μαθηματικών εννοιών σε επιχειρησιακά και οικονομικά προβλήματα στα κεφάλαια 3 και 4 που πραγματεύονται τις συναρτήσεις και τα συστημάτων εξισώσεων και τη λύση τους. Το κεφάλαιο 5 παραμένει λίγο πολύ τα ίδιο. Στο κεφάλαιο 6 έχει προστεθεί ένα μέρος που αφορά στις χαρακτηριστικές εξισώσεις, χαρακτηριστικές ρίζες (ιδιοτιμές) και χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) ενός πίνακα και εξετάζει τη χρήση των εννοιών αυτών στη διαγωνιοποίηση των πινάκων μεταξύ άλλων εφαρμογών τους. Το κεφάλαιο 7 της προηγούμενης έκδοσης έχει εμπλουτιστεί και η ύλη του έχει χωριστεί σε δύο – στα κεφάλαια 7 και 8. Στο κεφάλαιο 7 εισάγονται οι βασικές έννοιες του ορίου μιας συνάρτησης, αυτή της παραγώγισης, της εύρεσης ακρόταων σημείων και του προσδιορισμού της φύσης τους και δίδονται πολλές εφαρμογές σε επιχειρησιακά και οικονομικά προβλήματα. Οι τελευταίες συμπεριλαμβάνουν τις έννοιες της ελαστικότητας της ζήτησης και της προσφοράς, των συνολικών, μέσων και οριακών εσόδων και εξόδων για μια επιχείρηση, της μεγιστοποίησης του κέρδους και ελαχιστοποίησης κόστους, και τον προσδιορισμό της ποσότητας οικονομικής παραγγελίας, μεταξύ άλλων. Το κεφάλαιο 8 διαπραγματεύεται συναρτήσεις οι οποίες περιέχουν το λιγότερο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και παρουσιάζει τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυσή τους. Έτσι, επεξεργάζονται μεταξύ άλλων θέματα όπως μερικές παράγωγοι, κανόνες μερικής παραγώγισης, σύνθετες συναρτήσεις, μερικές ελαστικότητες, προσδιορισμός του βαθμού ομογένειας μια συνάρτησης, το ολικό και μερικό διαφορικό, η ολική παράγωγος, και η Ιακωβιανή ορίζουσα για τον προσδιορισμό της μη γραμμικής εξάρτησης ενός συστήματος εξισώσεων. Το κεφάλαιο 9 χειρίζεται τα ολοκληρώματα και έχει εμπλουτιστεί με κανόνες και περαιτέρω εφαρμογές τους. Στη νέα έκδοση, το κεφάλαιο 10 ασχολείται με τους αριθμοδείκτες. Έχει εμπλουτιστεί με την περιγραφή της κατασκευής χρηματιστηριακών αριθμοδεικτών, συμπεριλαμβανομένου του FTSE-ASE για το Χρηματιστήριο Αθηνών. Έχει προστεθεί το βασικό σε τμήματα διοίκησης επιχειρήσεων κεφάλαιο 11, το οποίο παρουσιάζει προβλήματα χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Αυτό συμπεριλαμβάνει μεταξύ άλλων θεμάτων προβλήματα υπολογισμού παρούσας αξίας, μελλοντικής αξίας, εσωτερικού βαθμού απόδοσης και ράντες και εφαρμογές τους σε πραγματικά προβλήματα. Τέλος, έχουν προστεθεί πάνω

από 70 ασκήσεις και εφαρμογές σε κάθε κεφάλαιο, με τις λύσεις τους να αποτελούν το τελευταίο τμήμα του βιβλίου.

Στην έκδοση αυτή έχουν βοηθήσει ιδιαίτερα οι εξαίρετοι συνάδελφοι μου Ιουλία Αρμάγου και Παντελής Υψηλάντης, οι οποίοι μεταξύ άλλων εποικοδομητικών σχολίων, προσέφεραν μια σειρά από ασκήσεις που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο. Από τους φοιτητές μου θα ήθελα να ξεχωρίσω τον Τζαμίλη Ευάγγελο, τα επιμελή σχόλια του οποίου μου ήταν ιδιαίτερα χρήσιμα στην αναθεώρηση. Ο Δανιήλ Γιαμουρίδης, ο Θωμάς Κουνίτης και ο Δημήτρης Δημητρακόπουλος προσέφεραν πολύτιμη βοήθεια.

Τέλος θα ήθελα να αναφέρω την ηθική στήριξη που παρείχαν τα θετικά σχόλια και οι ευχαριστίες όσων διάβασαν το βιβλίο αυτό στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τα μαθηματικά μέσω κάποιου προγράμματος σπουδών που παρακολουθούν, όπως επίσης και των συναδέλφων μου εκπαιδευτικών που το χρησιμοποιούν στη διδασκαλία τους. Για μένα αποτέλεσαν το πιο δυνατό κίνητρο για την αναθεώρηση του βιβλίου και τη συνέχιση του εκπαιδευτικού μου έργου στο χώρο. Φυσικά κανένας από τούς παραπάνω δεν είναι υπεύθυνος για τυχόν παραλείψεις ή λάθη, που μπορεί να υπάρχουν ακόμα στο βιβλίο.

Θερμές ευχαριστίες για την άριστη συνεργασία μας προς τον εκδοτικό οίκο Γ. Μπένου.

Αθήνα, Απρίλιος 2004 Μανώλης Γ. Καβουσανός

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α' ΕΚΔΟΣΗΣ

Ο μαθηματικός λογισμός αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια των οικονομολόγων για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τις επιχειρήσεις. Περαιτέρω, η μαθηματική γλώσσα μπορεί να θεωρηθεί ως μέσο κωδικοποίησης και συντόμευσης της έκφρασης των προβλημάτων που καλούνται να επιλύσουν. Πολλές φορές, μάλιστα, η μαθηματική προσέγγιση της έκφρασης και επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων καθίσταται δυνατή μόνον εφόσον το πρόβλημα εκφραστεί σε μαθηματικούς όρους.

Η ευρεία χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων λογισμικών ηλεκτρονικών υπολογιστών (Η/Υ) στις μέρες μας έχει βοηθήσει αφάνταστα το παραπάνω έργο. Μαθηματικές πράξεις που θα χρειάζονταν δεκαετίας για την εκτέλεσή τους με το χέρι γίνονται μέσω του Η/Υ σε μερικά δευτερόλεπτα. Ίσως το πιο ευρέως διαδεδομένο λογισμικό, που έχει σχέση με την οργάνωση γραφείου επιχειρήσεων και την ταξινόμηση των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τη λήψη διοικητικών αποφάσεων σήμερα είναι το Excel.

Από διδακτικής πλευράς, αποτελεί πεποίθηση του συγγραφέα ότι οι ποσοτικές επιστήμες, στην πρακτική τους μορφή, κατανοούνται καλύτερα με την παρουσίασή τους μέσω εφαρμογών σε συγκεκριμένα προβλήματα. Έτσι, σε πανεπιστημιακά ιδρύματα τα οποία πραγματεύονται τις οικονομικές επιστήμες θα ήταν θεμιτό να διδάσκονται οι εφαρμογές του μαθηματικού λογισμού μέσω των προβλημάτων που σχετίζονται με αυτό το πεδίο γνώσης. Όταν η εκπαίδευση συνδυάζεται και με τη χρήση κάποιου λογισμικού, όπως το Excel, το οποίο αποτελεί το πρώτο πράγμα που καλούνται να γνωρίζουν οι εργαζόμενοι σε επιχειρήσεις για την επεξεργασία οικονομικών δεδομένων, επιτυγχάνεται ο άριστος τρόπος εξοικείωσης με τα αντικείμενα που πραγματεύεται ο μαθηματικός λογισμός.

Επομένως, η γνώση μαθηματικών και η ταυτόχρονη επίλυση επιχειρησιακών προβλημάτων που πραγματεύονται επιχειρήσεις με τη βοήθεια του Excel είναι σημαντική.

Σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι η παρουσίαση των εφαρμογών του μαθηματικού λογισμού σε επιχειρησιακά, οικονομικά και χρηματοοικονομικά θέματα και η ταυτόχρονη επίδειξη της χρήσης του Excel

μέσω αυτών των εφαρμογών, τόσο για φοιτητές πανεπιστημιακών ιδρυμάτων όσο και για στελέχη επιχειρήσεων. Το βιβλίο στοχεύει, επίσης, στο να εξοικειώσει στελέχη επιχειρήσεων στις εφαρμογές των μαθηματικών σε προβλήματα που αντιμετωπίζουν καθημερινά στην εργασία τους μπροστά σε μια οθόνη Η/Υ με το Excel στην εικόνα και μια βάση δεδομένων προς επεξεργασία.

Επομένως, το βιβλίο αυτό είναι διαφορετικό από άλλα που έχουν γραφτεί στην επιστημονική αυτή περιοχή, αφού εξετάζει τα μαθηματικά υπό το πρίσμα των εφαρμογών σε προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις, ενώ παράλληλα παρουσιάζει την επίλυσή τους μέσω του Excel. Για την εύκολη εύρεση των παραδειγμάτων που επεξεργάζονται στο Excel, τονίζονται με γκρι οι παράγραφοι του βιβλίου που τα παραθέτουν. Για διδακτικούς σκοπούς παρουσιάζεται παράλληλα με την Ελληνική ορολογία και η Αγγλική. Αυτό κρίνεται σκόπιμο αφού πλέον η Αγγλική γλώσσα έχει κυριαρχήσει στις επιστήμες που συνδέονται με τα οικονομικά και τις επιχειρήσεις, ενώ καλούμαστε συνεχώς να εργαστούμε και να (μετ-)εκπαιδευτούμε σε ένα διεθνές εργασιακό και εκπαιδευτικό περιβάλλον.

Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι οι γνώσεις που απαιτούνται για την ομαλή παρακολούθηση της ύλης του βιβλίου είναι αυτές των μαθηματικών λυκείου, ενώ δεν προαπαιτούνται γνώσεις Η/Υ. Για το σκοπό αυτό το βιβλίο περιλαμβάνει δύο εισαγωγικά κεφάλαια. Το κεφάλαιο 1 παρουσιάζει μια εισαγωγή στο Excel, ενώ το κεφάλαιο 2 αποτελεί το συνδετικό κρίκο, και κατά κάποιο τρόπο μια επανάληψη της άλγεβρας του λυκείου που απαιτείται για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων του βιβλίου. Περαιτέρω, μια βήμα προς βήμα παρουσίαση του τρόπου λειτουργίας του φύλλου εργασίας του Excel γίνεται στο κεφάλαιο 2, σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται. Το υπόλοιπο βιβλίο έχει τα ακόλουθα μέρη:

Το κεφάλαιο 3 παρουσιάζει διάφορα είδη συναρτήσεων και τις εφαρμογές τους σε χρηματοοικονομικά και επιχειρησιακά προβλήματα. Το Excel χρησιμοποιείται για την παρουσίαση των συναρτήσεων σε μαθηματική μορφή, σε μορφή πίνακα και σε μορφή διαγράμματος. Το κεφάλαιο 4 εξετάζει τις εφαρμογές των συστημάτων εξισώσεων στα οικονομικά. Με τη βοήθεια του Excel παρουσιάζει τις λύσεις των συστημάτων σε μαθηματική, σε γραφική και σε μορφή πίνακα. Τέλος,

εξετάζονται οι πιθανές λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων. Το κεφάλαιο 5 διαπραγματεύεται τις βασικές αρχές της γραμμικής άλγεβρας και την ανάγκη που προκύπτει για την εισαγωγή πινάκων σε πιο πολύπλοκα προβλήματα που αφορούν τα οικονομικά και τις επιχειρήσεις. Η δυνατότητα που παρέχεται από το Excel, μέσω των συναρτήσεων των πινάκων που περιέχει, χρησιμοποιείται στην παρουσίαση των βασικών εννοιών. Στην πορεία παρουσιάζεται η χρήση των πινάκων για εφαρμογές στην καθημερινή ζωή και στη δυνατότητα που παρέχουν για απλούστευση τόσο των υπολογισμών όσο και την παρουσίαση των δεδομένων. Στο κεφάλαιο 6 περιγράφεται πώς συστήματα εξισώσεων μπορούν να παρουσιαστούν σε μορφή πίνακα και να επιλυθούν με πράξεις πινάκων. Μια σειρά από παραδείγματα, στο Excel, εμπεδώνουν τις εφαρμογές αυτές. Τέλος, το κεφάλαιο υποδεικνύει τις συνθήκες που πρέπει να εξεταστούν για τον προσδιορισμό των πιθανών λύσεων σε συστήματα εξισώσεων πριν από την επίλυσή τους. Το κεφάλαιο 7 εξετάζει θέματα παραγώγισης, υπό τον γενικότερο τίτλο της ανάλυσης. Μια σειρά από οικονομικές εφαρμογές, όπως ελαστικότητα ζήτησης, ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση κερδών, κ.α., εμπεδώνουν τις έννοιες που παρουσιάζονται. Εκτός από συναρτήσεις δύο μεταβλητών η ανάλυση επεκτείνεται σε πολυμεταβλητές συναρτήσεις και σε προβλήματα που αφορούν την υπό συνθήκη βελτιστοποίηση. Το κεφάλαιο 8 πραγματεύεται το δεύτερο μέρος της ανάλυσης και τις εφαρμογές της σε οικονομικά προβλήματα. Αυτό αφορά ζητήματα ολοκλήρωσης. Στο κεφάλαιο 9 παρουσιάζεται ο τρόπος κατασκευής των αριθμοδεικτών, τα υπέρ και τα κατά των διαφόρων ειδών δεικτών, καθώς και τα προβλήματα και τις λύσεις που διαμορφώνονται κατά τη διαδικασία απλοποίησης ενός μεγάλου αριθμού δεδομένων σε έναν αριθμό.

Το υλικό που περιλαμβάνεται στο βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορους συνδυασμούς για διδακτικούς σκοπούς, ανάλογα με το στόχο του διδάσκοντα. Μπορεί να διδαχτεί ως μάθημα ενός εξαμήνου σε προπτυχιακό επίπεδο ή ως μάθημα σε MBA ή άλλα μεταπτυχιακά προγράμματα σε επιχειρήσεις. Πολλά από αυτά τα προγράμματα δέχονται φοιτητές από διάφορες ειδικότητες, συμπεριλαμβανομένης της νομικής, των φιλοσοφικών σχολών και άλλων κλάδων, στις οποίες τα μαθηματικά δεν αποτελούν κύριο στοιχείο διδασκαλίας. Δέχονται επίσης στελέχη επιχειρήσεων, τα οποία δεν έχουν εξασκήσει τα μαθηματικά τους για κάποιο χρονικό διάστημα. Τα κεφάλαια 1 και 2 είναι εισαγωγικά και απευθύνονται σε συγκεκριμένες κατηγορίες αναγνωστών. Το πρώτο απευθύνεται σε αναγνώστες που δεν έχουν χρησιμοποιήσει το Excel και το δεύτερο αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών λυκείου και αυτών των ΑΕΙ, και μια καλή επανάληψη σε αναγνώστες που δεν έχουν επαφή με το αντικείμενο. Τα κεφάλαια 3, 4, 7, 8 και 9 καλύπτουν συναρτήσεις, συστήματα εξισώσεων, παραγώγους, ολοκληρώματα και αριθμοδείκτες και μπορούν να διδαχθούν ως μια θεματική ενότητα σε φοιτητές τμημάτων που δεν απαιτούν γραμμική άλγεβρα. Τα κεφάλαια 5 και 6 πραγματεύονται τη γραμμική άλγεβρα και τις εφαρμογές της σε οικονομικά και επιχειρησιακά προβλήματα και μπορούν να ενταχθούν σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας που οδηγεί σε ανώτερα μαθηματικά, τα οποία είναι χρήσιμα σε γνωστικά αντικείμενα όπως η οικονομετρία κ.α. Επαφίεται στην κρίση του αναγνώστη ή του διδάσκοντα ποιος συνδυασμός κεφαλαίων θα πετύχει το στόχο του.

Ένας μεγάλος αριθμός ανθρώπων έχει βοηθήσει στη διαμόρφωση του βιβλίου αυτού. Από αυτούς θα ήθελα να ξεχωρίσω τους φοιτητές μου στο Πανεπιστήμιο του Σίτυ στο Λονδίνο, που με τα σχόλιά τους επί μια σειρά ετών έχουν βοηθήσει στη βελτίωση του υλικού που παρουσιάζεται. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Δημήτρη Δημητρακόπουλο, τη Μάρα Παλαμήδη και τη Στέλλα Σπηλιώτη για τις αρχικές μεταφράσεις από τα Αγγλικά στα Ελληνικά, τον Τάκη και την Κατερίνα Σηφάκη για τη βοήθειά τους στη σωστή απόδοση της ορολογίας, καθώς και τους Πέτρο Παπαθεοδώρου, Γιάννη και Μανώλη Τζώρτζη που διάβασαν το κείμενο και προσέφεραν εποικοδομητικά σχόλια για τη βελτίωσή του. Στη διαμόρφωση του υλικού έχουν επίσης βοηθήσει οι Άννα Τσούνια, Αντώνης Αλεξανδρόπουλος, Γιώργος Ζουλινάκης και η Sarah Dunmur. Φυσικά κανένας από αυτούς δεν είναι υπεύθυνος για παραλείψεις ή λάθη, που μπορεί να υπάρχουν ακόμα στο βιβλίο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Ροδούλα, τη Δήμητρα και το Γιώργο, για την τεράστια υπομονή που επέδειξαν κατά τη συγγραφή του βιβλίου αυτού.

Αθήνα, Οκτώβριος 2002 — Μανώλης Γ. Καβουσανός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\forall$	για όλα
$\in$	ανήκει
$\exists$	υπάρχει
$\mathbb{R}$	σύνολο πραγματικών αριθμών
$\equiv$	ισοδυναμία
$=$	ισότητα
$\neq$	μή-ίσο
$>$	μεγαλύτερο
$\geq$	μεγαλύτερο ή ίσο
$<$	μικρότερο
$\leq$	μικρότερο ή ίσο
$\pm$	+ ή −
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή (εάν και μόνο εάν)
$\sqrt{\ }$	τετραγωνική ρίζα
∞	άπειρο
$\rightarrow$	τείνει στο
e ή exp	ο αριθμός 2,718...
n!	η παραγοντικό
log	κοινός λογάριθμος, βάση 10
ln	φυσικός λογάριθμος, βάση e
$\sum_{i=1}^{n}$	τελεστής άθροισης από το 1 μέχρι το n
$\underline{x}$	διάνυσμα
A' ή A^T	ανάστροφος του πίνακα A
A^{-1}	αντίστροφος του πίνακα A
$\lvert A \rvert$	ορίζουσα

I_n ή $I_{n\times n}$	ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας, διαστάσεων $(n \times n)$
A^+ ή Adj(A)	προσαρτημένος ή συζηγής πίνακας του A
rank(A)	τάξη του πίνακα A
$\lim_{x\to a} f(x)$	όριο της συνάρτησης f(x) όταν το x τείνει στο α
Δx	μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής x
$\frac{dy}{dx}$	παράγωγος του y ως προς x
$f'(x)$	παράγωγος της συνάρτησης f(x)
$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$	παράγωγος του y ως προς x στο σημείο α
$\frac{d^2y}{dx^2}$	δεύτερη παράγωγος του y ως προς x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d^2y}{dxdz}$	μικτή παράγωγος
$\frac{\partial y}{\partial x}$	μερική παράγωγος του y ως προς x
$\int x\,dx$	ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος του x
ημx (sinx)	ημίτονο του x (sine x)
συνx (cosx)	συνημίτονο του x (cosine x)
εφx (tanx)	εφαπτομένη του x (tangent x)
σφx (cotx)	συνεφαπτομένη του x (cotangent x)
τεμx (cscx)	τέμνουσα του x (cosecant x)
στεμx (secx)	συντέμνουσα του x (secant x)

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΒΑ	Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης
$\mathcal{E}_d$	Ελαστικότητα ζήτησης
I^n_{n-1}	Αλυσωτός δείκτης τιμών (Chain price indices)
ΚΔΠ	Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου
ΚΠΑ	Καθαρή Παρούσα Αξία
ΚΠΠ	Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου
ΜΑ	Μελλοντική Αξία
ΠΑ	Παρούσα Αξία
ΣΑ	Συντελεστής Ανατοκισμού
ΣΜΑ	Συντελεστής Μελλοντικής Αξίας
AC	Μέσο κόστος (Average Cost)
APR	Ετησιοποιημένο επιτόκιο (Annual Percentage Return)
APRI	Δείκτης μέσης σχετικής τιμής (Average price relatives index)
AR	Μέσο έσοδο (Average Revenue)
BWPI	Σταθμικός δείκτης τιμών βάσης (Base weighted price index)
CS	Πλεόνασμα καταναλωτή (Consumers' Surplus)
DCF	Προεξοφλημένες ταμειακές ροές (Discounted Cash Flows)
F	Δείκτης τιμών Fisher ή ιδανικός δείκτης
FWPI	Δείκτης τιμών με σταθερή στάθμιση (Fixed weighted price index)
IRR	Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης (Internal Rate of Return)
MC	Οριακό κόστος (Marginal Cost)
MR	Οριακό έσοδο (Marginal Revenue)
MWRR	Μέσος βαθμός απόδοσης (Money Weighted Rate of Return)

NPV	Καθαρή παρούσα αξία (Net Present Value)
PS	Πλεόνασμα παραγωγού (Producers' Surplus)
Rank	Τάξη του πίνακα
RPI	Δείκτης τιμών καταναλωτή (Retail price index)
SAPI	Απλός γενικός δείκτης τιμών (Simple aggregate price index)
SPI	Απλός τιμάριθμος (Simple price index)
TC	Συνολικό κόστος (Total Cost)
TR	Συνολικό έσοδο (Total Revenue)

1 Εισαγωγή στο Excel

1.1 Εισαγωγή

Η χρήση υπολογιστών στις μέρες μας είναι απαραίτητη για κάθε εργασία που έχει να κάνει με αριθμούς και δεδομένα. Επιταχύνουν τους υπολογισμούς, μας επιτρέπουν να αποθηκεύουμε τα δεδομένα, να τα ταξινομούμε σε μορφή πίνακα καθώς και να σχεδιάζουμε γραφικές παραστάσεις σε διάφορες μορφές με σκοπό την παρουσίασή τους με το άγγιγμα ενός πλήκτρου. Επιπλέον, όταν υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις, σε ένα ζήτημα, αυτές μπορούν να εξεταστούν πολύ γρήγορα με τη βοήθεια των υπολογιστών. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί διάφορα πακέτα λογισμικού τα οποία σκοπεύουν στη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων.

Το ***πακέτο των φύλλων εργασίας του Excel (Excel spreadsheet package)*** είναι ένα από αυτά, το οποίο διαθέτει ευκολίες στη διαχείριση δεδομένων, εκτελεί, μεταξύ άλλων, πράξεις στατιστικής, χρηματοοικονομικής, ανάλυση βάσεως δεδομένων, παραγωγή γραφικών παραστάσεων, κλπ. Το ελκυστικό κομμάτι σε αυτό το πακέτο είναι ότι μπορεί να συνεργάζεται με άλλα πακέτα λογισμικού που έχουν αναπτυχθεί από τη Microsoft, όπως ο επεξεργαστής κειμένου Word, το λογισμικό βάσεως δεδομένων που καλείται Access, όπως επίσης και άλλα πακέτα λογισμικού που κυκλοφορούν στην αγορά και στοχεύουν σε μια περισσότερο εξεζητημένη ανάλυση σε περιοχές όπως της στατιστικής και της οικονομετρίας. Συνεπώς, τα δεδομένα που ταξινομούνται στο Excel μπορούν, για παράδειγμα, να αντιγραφούν στο Word ή να αποτελέσουν πηγή εισαγωγής δεδομένων για το TSP (ένα οικονομετρικό πακέτο). Ως ένα από τα επικρατέστερα πακέτα υπολογιστικών φύλλων αυτή τη στιγμή στην αγορά, το χρησιμοποιούμε ακροθιγώς σε αυτό το βιβλίο για να παρουσιάσουμε τα αναλυτικά παραδείγματα μαθηματικών και στατιστικής που μελετούνται. Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη παρουσίαση του περιβάλλοντος του Excel, η οποία αποτελεί την ελάχιστη γνώση που απαιτείται για τα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

1.2 Το φύλλο εργασίας (Spreadsheet)

Το Γράφημα 1.1 αποτελεί ένα παράδειγμα ενός φύλλου εργασίας (ή υπολογιστικού φύλλου) του Excel. ***Η μπάρα τίτλων (title bar)*** στην κορυφή δείχνει ότι το όνομα του τρέχοντος αρχείου-βιβλίο εργασίας (workbook) είναι charts. Τα αρχεία Excel έχουν ***επέκταση (extention).xls***. Είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερα από ένα φύλλα εργασίας μέσα στο ίδιο αρχείο. Η μπάρα που βρίσκεται στο κατώτατο σημείο των φύλλων εργασίας δείχνει ότι το τρέχον φύλλο ονομάζεται intro, και τα υπόλοιπα φύλλα στο αρχείο charts.xls ονομάζονται functions, sheet1, sheet2, κλπ. Επιλέγοντας κάποια από τις ετικέτες (εικονίδια) των φύλλων εργασίας, μας δίνεται η δυνατότητα να μετακινούμαστε μεταξύ των φύλλων. Η δεύτερη σειρά κάτω από την κορυφή είναι η σειρά ***ομάδας εντολών (menu bar)***. Αυτή περιγράφεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια αργότερα, στην ενότητα ***μενού εντολών (command menu)***. Οι επόμενες δυο σειρές είναι οι ***σειρές πλήκτρων συντομεύσεων (short-cut button bars)***. Για παράδειγμα, το δεύτερο κουμπί στα αριστερά επιτρέπει το άνοιγμα αρχείων, το τρίτο την αποθήκευση της δουλειάς στο φύλλο εργασίας, το τέταρτο την εκτύπωση κλπ.

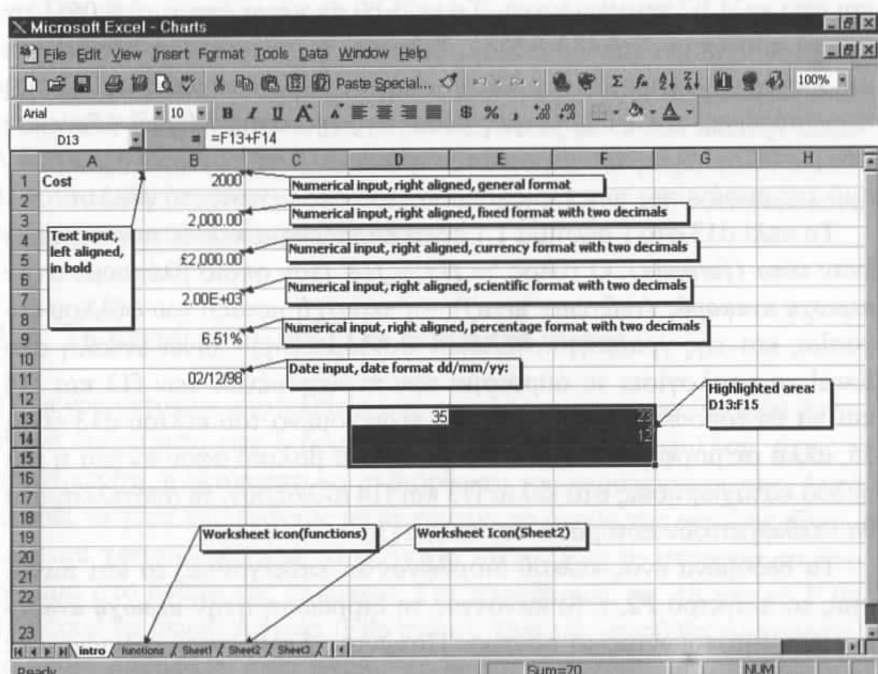
Αμέσως μετά από τις τέσσερις αυτές σειρές βρίσκεται η ***περιοχή του φύλλου εργασίας (worksheet area)***. Αυτή είναι σαν ένα πρόχειρο (notepad), όπου μπορεί να γίνει η εργασία. Χωρίζεται σε ***γραμμές*** που αριθμούνται από το 1 έως το 65536, και σε ***στήλες*** που δηλώνονται από το A έως το IV. Ως αποτέλεσμα, τα ***κελιά (cells)*** στο φύλλο εργασίας μπορούν να υποδηλωθούν από τη διεύθυνσή τους, με τη στήλη αναφοράς να εμφανίζεται πριν από τη γραμμή αναφοράς. Συνεπώς, το πρώτο κελί επάνω στην αριστερή γωνία είναι το κελί a1, και τα περιεχόμενά του διαβάζονται ως «***Cost***».[1]

Η μετακίνηση μέσα στο φύλλο εργασίας, ένα κελί τη φορά, επιτυγχάνεται με τη χρήση των ***βελών του πληκτρολογίου (Arrow keys)***. Τα πλήκτρα ***PgUp, PgDn*** μπορεί να χρησιμοποιηθούν για ταχύτερες μετακινήσεις. Ακόμα πιο γρήγορες μετακινήσεις στο επόμενο κελί με οποιοδήποτε περιεχόμενο και οποιαδήποτε κατεύθυνση μπορεί να επιτευχθεί πατώντας το κουμπί ***End*** ακολουθούμενο από το ***βέλος*** που

[1] Η αναφορά στις διευθύνσεις των κελιών δεν είναι ευαίσθητες στο αν είναι κεφαλαίο το πρώτο γράμμα ή μικρό. Έτσι a1 και A1 συμβολίζουν την ίδια διεύθυνση.

δείχνει την κατεύθυνση στην οποία θέλουμε να κινηθούμε. Εναλλακτικά, το ποντίκι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χειριστούμε τις ***μπάρες κύλισης (scroll bars)*** στο δεξιό και το κατώτερο περιθώριο. Τα ***Ctrl και Home*** μας πηγαίνουν στο κελί a1.

ΓΡΑΦΗΜΑ 1.1: *Παράδειγμα ενός αρχείου Excel*



Τα δεδομένα των κελιών μπορεί να είναι είτε ***κείμενο (text)*** είτε ***αριθμοί (αριθμοί (numbers)***, ***τύποι (formulas)*** ή ***συναρτήσεις (functions)***. Πρώτα τοποθετούμε το δρομέα (cursor) στο κελί που θέλουμε τα δεδομένα και έπειτα εισάγουμε τα δεδομένα αυτά. Αν τα δεδομένα είναι κείμενο (όπως στο κελί A1), έστω κι αν περιλαμβάνει και αριθμούς, θα διαβαστεί ως κείμενο. Αν είναι μόνο αριθμός (όπως στο κελί B1) θα διαβαστεί ως αριθμός. Αν θέλουμε ένας αριθμός να διαβαστεί ως κείμενο τότε με μια απόστροφο (') πριν τον αριθμό μπορούμε να το επιτύχουμε. Όταν χρησιμοποιούνται τύποι, το πρόσημο + ή το = στην

αρχή του τύπου θα καταστήσει ικανό το Excel να τον καταλάβει. Διαφορετικά θα τον διαβάσει ως κείμενο και δε θα εκτελεστούν πράξεις.

Το ίδιο γράφημα απεικονίζει παραδείγματα καταχωρημένων ***αριθμών*** στο φύλλο εργασίας, οι οποίοι έχουν διαφορετικές ***μορφοποιήσεις (formats)***. Για παράδειγμα, τα περιεχόμενα στο κελί B3 είναι αριθμητικά δεδομένα και έχουν μια σταθερή μορφοποίηση με 2 δεκαδικά. Αντίστοιχα η μορφοποίηση στο κελί b5 είναι σε μορφή £ νομίσματος και στο κελί b7 επιστημονική. Το κελί b9 περιέχει την τιμή 0.0651 σε μορφή ποσοστού, δηλαδή 6.51%. Τελικώς, η καταχώρηση b11 δείχνει μια εισαγωγή ημερομηνίας. Όλες αυτές οι μορφοποιήσεις και ακόμη περισσότερες, είναι διαθέσιμες μέσω της επιλογής ***Μορφή (Format)*** στο μενού εντολών που μελετάται παρακάτω. Βοηθούν στον εμπλουτισμό της εμφάνισης των περιεχομένων του υπολογιστικού φύλλου.

Το κελί d13 στο Γράφημα 1.1 είναι παράδειγμα κελιού που περιέχει έναν ***τύπο (formula)***. Ο τύπος ***'= f13 + f14'*** (τον οποίο βλέπουμε στην ***περιοχή αναφοράς (reference area)***) –η περιοχή μεταξύ του φύλλου εργασίας και της γραμμής εργαλείων συντόμευσης– δίνει εντολή στο Excel να υπολογίσει το άθροισμα των περιεχομένων των f13 και f14 και να το τοποθετήσει στο d13. Το περιεχόμενο του κελιού d13 είναι 35, αλλά σε μορφή τύπου. Κάτι τέτοιο είναι βολικό αφού αν μία ή και οι δυο καταχωρήσεις στα κελιά f13 και f14 αλλάξουν, τα αποτελέσματα θα υπολογιστούν αυτόματα στο κελί d13.

Τα δεδομένα ενός κελιού διορθώνονται επιλέγοντάς το και πατώντας το πλήκτρο ***F2***, ή β) κάνοντας τη διόρθωση στην ***περιοχή αναφοράς*** χρησιμοποιώντας το ποντίκι. Πατώντας ***Enter***, αφού τελειώσουμε τη διόρθωση ενημερώνεται το φύλλο εργασίας με την καινούργια πληροφορία. Το ***Esc*** μας επιτρέπει να μην προχωρήσουμε σε αλλαγές, αν αλλάξουμε γνώμη.

1.3 Μαύρισμα (επιλογή) κελιών

Ορισμένες φορές προκύπτει η ανάγκη τα περιεχόμενα ενός ή περισσοτέρων κελιών να αντιγραφούν (copy) ή να μετακινηθούν (move) σε διαφορετική περιοχή του φύλλου εργασίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να επιλεχθεί η σχετική περιοχή. Για παράδειγμα η περιοχή d13 έως f15 στο Γράφημα 1.1 έχει μαυριστεί. Αυτό μπορεί να γίνει σημαδεύοντας με το ποντίκι στο κελί d13 και τραβώντας το διαγώνια στο κελί f15. Εναλλακτικά, πηγαίνουμε στο κελί d13 και κρατώντας πατημένο το πλήκτρο ***Shift*** χρησιμοποιούμε τα κάτω και δεξιά βέλη για να φτάσουμε στο κελί f15. Η ενέργεια της παρατεταμένης πίεσης του πλήκτρου ***Shift*** θα επιλέξει την περιοχή.

Ολόκληρες γραμμές ή στήλες μπορούν να επιλεχθούν (μαυρισθούν) επιλέγοντας με το ποντίκι την ***κεφαλίδα (header)*** της γραμμής ή της στήλης (στα περιθώρια). Οι διπλανές γραμμές ή στήλες μπορούν να επιλεχθούν επιλέγοντας με το ποντίκι μια κεφαλίδα και σύροντας πάνω στις διπλανές κεφαλίδες. Μη συνορεύουσες γραμμές ή στήλες μπορούν να επιλεχθούν ταυτοχρόνως επιλέγοντας με το ποντίκι την κεφαλίδα μιας γραμμής ή στήλης, μετά πατώντας το πλήκτρο ***Ctrl*** και επιλέγοντας με το ποντίκι την κεφαλίδα της άλλης μη συνορεύουσας γραμμής ή στήλης που μας ενδιαφέρει.

1.4 Το μενού εντολών (The command menu)

Το μενού εντολών αποτελείται από εντολές οι οποίες καθιστούν δυνατή τη διαχείριση των δεδομένων του υπολογιστικού φύλλου, όπως η αποθήκευση, η εκτύπωση και η διόρθωση του περιεχομένου της. Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας με το ποντίκι το όνομα της εντολής. Εναλλακτικά χρησιμοποιούμε το πλήκτρο *Alt* μαζί με το υπογραμμισμένο γράμμα στο όνομα της επιλογής. Για παράδειγμα, το *Alt* και το F θα ανοίξουν το μενού Αρχείο (File menu). Ένα υπομενού θα εμφανιστεί, το οποίο προσφέρει έναν αριθμό επιλογών. Οι μεμονωμένες υπο-εντολές μπορεί να ενεργοποιηθούν επιλέγοντάς τις, ή χρησιμοποιώντας τα πλήκτρα βέλη για να τις υπερτονίσουμε και πατώντας το Enter. Στο κάτω μέρος της οθόνης υπάρχει μια περιοχή η οποία είναι κατασκευασμένη για να παρέχει σύντομη πληροφόρηση για τη χρήση κάθε μιας από τις επιλογές αυτές.

Εδώ ακολουθεί μια σύντομη λίστα του μενού εντολών του Excel μαζί με τη γενική περιγραφή για το τι κάνει κάθε εντολή.

Αρχείο (File) Εκτελεί χειρισμούς αρχείων, όπως άνοιγμα, κλείσιμο, αποθήκευση και εκτύπωση μεμονωμένων αρχείων.

Επεξεργασία (Edit) Επιτρέπει αλλαγές στις καταχωρήσεις του φύλ-

λου εργασίας όπως αντιγραφή και μετακίνηση των καταχωρήσεων σε ένα κελί ή πεδίο κελιών σε διαφορετικές διευθύνσεις.

Προβολή (View) Επιτρέπει μεταβολές στην εμφάνιση της οθόνης, όπως το να δούμε τη γραμμή ενός τύπου, την status bar, τη μεγέθυνση σε μια συγκεκριμένη περιοχή του φύλλου εργασίας, κλπ.

Εισαγωγή (Insert) Επιτρέπει την εισαγωγή γραμμών, στηλών, τύπων και ούτω καθεξής.

Μορφή (Format) Επιτρέπει την αλλαγή της εμφάνισης περιοχών ή ολόκληρου του υπολογιστικού φύλλου.

Εργαλεία (Tools) Επιτρέπει την καταγραφή Μακροεντολών (Macros), λύση εξισώσεων, κλπ.

Δεδομένα (Data) Επιτρέπει το χειρισμό βάσεων δεδομένων.

Παράθυρο (Window) Επιτρέπει το διαχωρισμό της οθόνης σε δυο, ταξινόμηση διαφορετικών παραθύρων, κλπ.

Βοήθεια (Help) Παρέχει βοήθεια και λύσεις σε προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη χρήση του υπολογιστικού φύλλου.

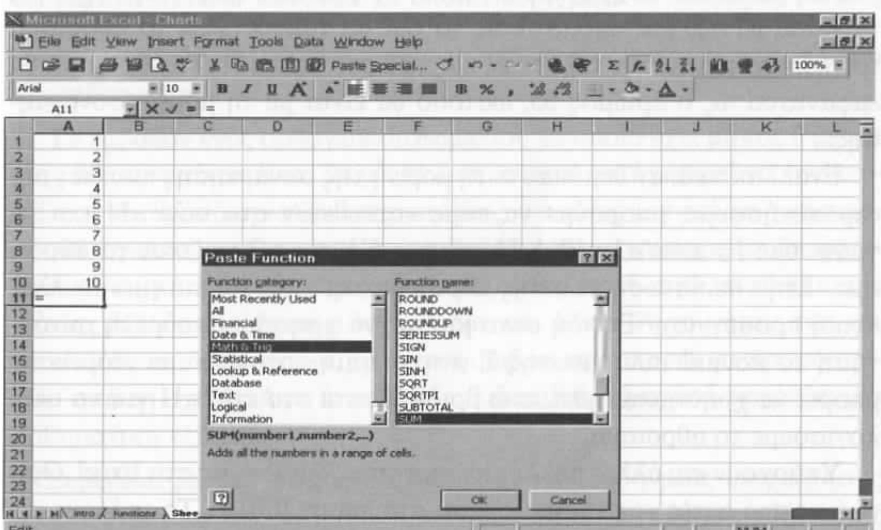
Το Γράφημα 1.2 παρέχει ένα παράδειγμα για το πώς μπορεί να ενεργοποιηθεί το μενού εντολών. Δείχνει ένα παράδειγμα ενός άλλου τύπου καταχώρησης σε κελί στο Excel (εκτός από κείμενο, αριθμούς και τύπους που αναφέρθηκαν παραπάνω), εκείνο των ***συναρτήσεων (functions)***. Οι συναρτήσεις του Excel είναι ενσωματωμένοι τύποι που μπορεί να ενεργοποιηθούν είτε μέσω του μενού εντολών είτε μέσω του ***πλήκτρου οδηγού συνάρτησης (function wizard button)*** f_x που απεικονίζεται στη γραμμή εργαλείων συντόμευσης.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε, ότι επιθυμούμε να βρούμε το άθροισμα των δεδομένων στα κελιά[2] a1 έως a10 και να τοποθετήσουμε τα αποτελέσματα στο κελί a11, στο Γράφημα 1.2. Αντί να γράψουμε

[2] Οι καταχωρήσεις στα κελιά a1 έως a10 είναι αριθμοί από το 1 έως το 10. Δηλαδή, είναι μια σειρά αριθμών που ξεκινά από το 1 και αυξάνει κατά 1. Το Excel μπορεί να γεμίσει τους αριθμούς αυτούς μέσω της επιλογής **Edit/Fill/Series...** του μενού εντολών ως εξής: Τοποθετούμε την αρχική τιμή 1 στο κελί a1 και χρησιμοποιούμε τις ανωτέρω σειρές εντολών, επιλέγοντας μια γραμμική σειρά, με τιμή βήματος 1 και τελική τιμή 10.

ολόκληρο τον τύπο = a1 + a2 + ... + a10 στο κελί a11, η συνάρτηση SUM του Excel μπορεί να ενεργοποιηθεί ενώ βρισκόμαστε στο κελί a11. Συνεπώς, πηγαίνουμε στο κελί a11, ύστερα χρησιμοποιώντας το ποντίκι επιλέγουμε το ***Εισαγωγή (Insert)*** στο μενού εντολών (εναλλακτικά, πατάμε Alt και I) και διαλέγουμε τη συνάρτηση στο υπομενού που εμφανίζεται. Το ***κουτί διαλόγου (dialog-box)*** του Γραφήματος 1.2 εμφανίζεται στην οθόνη.

ΓΡΑΦΗΜΑ 1.2: ***Ενεργοποίηση του Οδηγού-συναρτήσεων στο Excel***



Όπως φαίνεται, στο γράφημα, οι συναρτήσεις είναι ταξινομημένες σε κατηγορίες, όπως Χρηματοοικονομικές, Μαθηματικές & Τριγωνομετρικές, Στατιστικές κοκ. Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε με το ποντίκι την κατηγορία Μαθηματικές & Τριγωνομετρικές. Η λίστα στα δεξιά δείχνει τα ονόματα των συναρτήσεων που είναι διαθέσιμες για την κατηγορία αυτή. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε αργότερα, η ***ROUND*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να στρογγυλοποιηθούν αριθμοί μέχρι ενός συγκεκριμένου αριθμού δεκαδικών, η ***SQRT*** υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού, ενώ η ***SUM*** βρίσκει το άθροισμα μιας ομάδας αριθμών. Όταν, επιλεχθεί, μια από τις συναρτήσεις, τότε εμφανίζονται επεξηγηματικές σημειώσεις στο κάτω μέρος του πλαι-

σίου διαλόγου, οι οποίες περιγράφουν τι κάνει η συνάρτηση και τη μορφή στην οποία θα πρέπει να γραφτεί έτσι ώστε να την καταλάβει το Excel. Επιπλέον, επιλέγοντας το εικονίδιο του ερωτηματικού, το οποίο εμφανίζεται στην κάτω αριστερή πλευρά του παραθύρου ***Επικόλλησης Συνάρτησης (Paste Function window)*** (βλέπε Γράφημα 1.2), ενεργοποιείται η επιλογή Βοήθεια (Help) του λογισμικού, η οποία δείχνει ένα παράδειγμα για το πώς χρησιμοποιείται η συνάρτηση αυτή.

Αφού επιλεχθεί η συνάρτηση ***SUM***, επιλέγουμε ***OK***. Ένα νέο πλαίσιο διαλόγου εμφανίζεται το οποίο προσδιορίζει τα ορίσματα, δηλαδή τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν στη συνάρτηση. Μαρκάροντας τα κελιά a1:a10 και επιλέγοντας το ***OK*** θα τοποθετήσει το άθροισμα του περιεχομένου των κελιών a1 έως a10 στο κελί a11. Το άθροισμα θα εμφανιστεί ως ο αριθμός 55, ωστόσο θα είναι με τη μορφή συνάρτησης.

Εναλλακτικά, αν θυμόμαστε τη μορφή της συνάρτησης που θα χρησιμοποιήσουμε, μπορούμε να πάμε κατευθείαν στο κελί a11 και να γράψουμε ***'= sum(a1:a10)'***. Πατώντας ***Enter*** υπολογίζεται το άθροισμα. Στην περίπτωση τέλεσης αθροίσματος, υπάρχει και μια εναλλακτική προσέγγιση. Επειδή είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη συνάρτηση το κουμπί συντόμευσης Σ στη γραμμή εργαλείων συντόμευσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ενώ βρισκόμαστε στο κελί a11 για να υπολογίσουμε το άθροισμα.

Υπάρχουν και άλλες πολλές συναρτήσεις διαθέσιμες στο Excel. Ορισμένες από αυτές χρησιμοποιούνται στο παρόν βιβλίο. Τα επόμενα κεφάλαια, κατά την παρουσίαση συγκεκριμένων προβλημάτων εφαρμογής μαθηματικών σε επιχειρησιακά προβλήματα, παρέχουν έναν άριστο τρόπο κατανόησης της βοήθειας που μπορεί να παρέχει το Excel στην εφαρμογή ποσοτικών μεθόδων. Ταυτόχρονα, η εφαρμογή του Excel στις εργασίες παρέχει ένα είδος εξάσκησης σε εφαρμογές για τη χρήση και κατανόηση των φύλλων εργασίας. Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου ήταν να δώσει μια πρώτη εικόνα του υπολογιστικού φύλλου του Excel, ώστε να αποτελέσει ένα αρχικό σημείο αναφοράς για τους χρήστες που χρησιμοποιούν για πρώτη φορά το λογισμικό.

2 Άλγεβρα – Εισαγωγικά

2.1 Εισαγωγή

Ο τομέας των μαθηματικών που ονομάζεται ***άλγεβρα*** μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο κανόνων οι οποίοι περιγράφουν διάφορες γενικές σχέσεις.

Παραδείγματα:

1. Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου δωματίου το οποίο έχει μήκος 6 μέτρα και πλάτος 4 μέτρα είναι 24 $μ^2$. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να γενικευθεί και να προσδιορισθεί ένας κανόνας ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του εμβαδού κάθε επιφάνειας με διαφορετικά μήκη και πλάτη. Έτσι, συμβολίζοντας ως A την επιφάνεια της οποίας θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν και L και W το μήκος της και το πλάτος της αντίστοιχα, τότε το εμβαδόν της μπορεί να προσδιορισθεί από τη σχέση: $A = L \times W$. Η τελευταία αυτή σχέση εκφράζει μία μαθηματική εξίσωση.

2. Σύμφωνα με την οικονομική θεωρία τα κέρδη μιας επιχείρησης εξαρτώνται από την τιμή του προϊόντος. Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής: Κέρδη = f (Τιμή), η οποία δείχνει ότι τα κέρδη της επιχείρησης είναι συνάρτηση της τιμής του προϊόντος.

Μία δεύτερη αντίστοιχη σχέση είναι: Συνολικό Κόστος = f (Παραγόμενο προϊόν), η οποία δείχνει ότι το συνολικό κόστος παραγωγής εξαρτάται από τις μονάδες παραγόμενου προϊόντος. Οι παραπάνω σχέσεις είναι γενικής μορφής, με την έννοια ότι δεν περιγράφουν ακριβώς πως το επίπεδο των κερδών μεταβάλλεται όταν οι τιμές μεταβάλλονται ή πως το συνολικό κόστος παραγωγής μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το παραγόμενο προϊόν. Πρέπει να επισημανθεί ότι, προκειμένου να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα απαιτούνται περισσότερες πληροφορίες.

3. Γνωρίζουμε από τη φυσική, ότι ισχύει η παρακάτω μαθηματική εξί-

σωση, προκειμένου να μετατρέψουμε τη μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας από βαθμούς Κελσίου (Celsius), C, σε βαθμούς Φαρενάιτ (Fahrenheit) F: $F = 32 + 1{,}8\ C$. Επομένως, ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο παράγοντας C κατά τη διάρκεια της ημέρας το F υπολογίζεται, αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην παραπάνω εξίσωση. Οι παράγοντες C και F της παραπάνω σχέσης, οι οποίες λαμβάνουν διάφορες τιμές, είναι γνωστές ως ***μεταβλητές (variables)*** της εξίσωσης. Από την άλλη πλευρά, οι παράγοντες 32 και 1,8 στην παραπάνω σχέση δε μεταβάλλονται και είναι γνωστοί ως ***σταθερές (συντελεστές) constants*** της αλγεβρικής εξίσωσης.

Συχνά είναι αρκετά χρήσιμο να εκφράζονται τόσο τα επιχειρησιακά, όσο και τα οικονομικά προβλήματα μέσω αλγεβρικών σχέσεων, καθώς είναι πιο εύκολη η λύση αυτών των προβλημάτων χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας. Έχοντας δημιουργήσει τέτοιες γενικές ***εξισώσεις*** για να περιγράψουμε ένα επιχειρησιακό πρόβλημα, είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε κάποιους αλγεβρικούς κανόνες που επιτρέπουν την επεξεργασία αυτών των εξισώσεων προκειμένου να φτάσουμε στο απαιτούμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα:

Στο παράδειγμα 1, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το εμβαδόν του δωματίου, A καθώς επίσης και το μήκος του, L. Σε αυτή την περίπτωση, πώς βρίσκουμε το πλάτος W του δωματίου; Πρακτικά, διαιρούμε το A με το L και βρίσκουμε το W. Αλγεβρικά, διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης $A = L \times W$ με τον παράγοντα L και παίρνουμε τη σχέση $W = A/L$.

Ο κανόνας είναι: Όταν έχουμε μία εξίσωση η οποία εκφράζει μία γενική σχέση, όπως αυτήν που περιγράφεται στο παραπάνω παράδειγμα και θέλουμε να βρούμε την τιμή μιας μεταβλητής, σε σχέση με κάποιες άλλες μεταβλητές, θα πρέπει να απομονώσουμε τη μεταβλητή αυτή από τη μια πλευρά της εξίσωσης. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας κάποιους αλγεβρικούς κανόνες και λύνοντας την εξίσωση ως προς τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

Παράδειγμα:

Στο παραπάνω παράδειγμα, και οι δύο πλευρές της εξίσωσης, $A = L \times W$, διαιρούνται με τον παράγοντα L έτσι ώστε η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε, δηλαδή η μεταβλητή W, να μείνει μόνη της από τη μια πλευρά της εξίσωσης (δεδομένου ότι διαιρώντας τον παράγοντα L με τον παράγοντα L το αποτέλεσμα είναι 1). Έτσι λύνοντας την εξίσωση $A = L \times W$ ως προς W προκύπτει η σχέση $W = A/L$.

Επομένως όταν λύνουμε μία εξίσωση και εφαρμόζουμε μία μαθηματική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση) από τη μία πλευρά της εξίσωσης, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την ίδια πράξη και από το άλλο μέρος της εξίσωσης προκειμένου η ισότητα να παραμείνει αμετάβλητη.

Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι μία εταιρεία κατασκευάζει δύο διαφορετικά προϊόντα, y και x. Κάθε μονάδα παραγόμενου προϊόντος y και x απαιτεί 2 και 3 ώρες εργασίας, αντίστοιχα. Η επιχείρηση μπορεί να διαθέσει 4 ώρες εργασίας την ημέρα[1] προκειμένου να παράγει τα δύο αυτά διαφορετικά προϊόντα. Η παρακάτω εξίσωση δείχνει τους διάφορους δυνατούς συνδυασμούς των προϊόντων y και x έτσι ώστε να χρησιμοποιούνται και οι 4 ώρες εργασίας, $2y + 3x = 4$. Υπάρχει ένας απεριόριστος αριθμός λύσεων σε αυτήν την εξίσωση καθώς ο αριθμός των συνδυασμών των y και x που ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση είναι απεριόριστος. Ωστόσο, ανάλογα με την τιμή που λαμβάνουν οι μεταβλητές y ή x, η λύση για την άλλη μεταβλητή είναι μοναδική και προκύπτει λύνοντας την παραπάνω εξίσωση.

Ερωτήσεις:

1. Πόσες μονάδες του προϊόντος y θα παραχθούν όταν παράγεται 1 μονάδα του προϊόντος x;

2. Ποια είναι η μέγιστη ποσότητα από το προϊόν y που μπορεί να παραχθεί εάν η επιχείρηση παράγει μόνο το προϊόν y;

Απαντήσεις:

1. *Προκειμένου να απαντήσουμε στην ερώτηση (1) εργαζόμαστε ως εξής: Λύνουμε την εξίσωση $2y + 3x = 4$ ως προς y, στη συνέχεια αντικαθιστούμε*

[1] Αυτό εξαρτάται από την τεχνολογία που διαθέτει η εταιρεία. Δηλαδή, από την ποιότητα εργασίας και κεφαλαίου που διαθέτει και τον τρόπο οργάνωσης της παραγωγής στην επιχείρηση.

το x με 1 και βρίσκουμε πόσες μονάδες από το προϊόν y θα παραχθούν δεδομένου ότι $x = 1$. Έτσι έχουμε:

Βήμα 1: αφαιρούμε τον παράγοντα 3x και από τις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης με αποτέλεσμα να προκύπτει, $2y = 4 - 3x$.

Βήμα 2: διαιρούμε και τις δύο πλευρές με τον παράγοντα 2 και προκύπτει, $y = 2 - 1{,}5x$.

Βήμα 3: όταν $x = 1$, $y = 2 - 1{,}5 \times 1 = 0{,}5$. Άρα αυτή είναι η απάντηση.

2. *Όταν η επιχείρηση παράγει μόνο το προϊόν y, τότε $x = 0$. Τότε η μέγιστη ποσότητα από το παραγόμενο προϊόν y είναι: $y = 2 - 1{,}5 \times 0 = 2$*

Παράδειγμα:

Εάν γνωρίζουμε το μέγεθος της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ πως μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγεθος σε βαθμούς Κελσίου;

Λύνουμε την εξίσωση $F = 32 + 1{,}8\,C$ ως προς τη μεταβλητή C. Έτσι, μένει η μεταβλητή C μόνη της στη μια πλευρά της εξίσωσης. Επομένως,

Βήμα 1: αφαιρούμε τον παράγοντα 32 και από τις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης με αποτέλεσμα να προκύπτει, $F - 32 = 1{,}8\,C$.

Βήμα 2: Διαιρούμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με τον παράγοντα 1,8 και προκύπτει,

$$c = \frac{F - 32}{1{,}8}$$

Με βάση την τελευταία αυτή εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβλητή C αντικαθιστώντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή F. Έτσι, για παράδειγμα, όταν $F = 32$, $C = 0$. Επίσης, όταν $F = 100$, $C = 37{,}8$, κ.λπ.

Η ικανότητα να λύνουμε εξισώσεις βελτιώνεται λύνοντας ασκήσεις. Στα επόμενα τμήματα του κεφαλαίου παρουσιάζονται κάποιες θεμελιώδεις έννοιες που είναι χρήσιμες κατά την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Επίσης γίνεται αναφορά σε κάποιες βασικές αρχές της άλγεβρας καθώς επίσης και σε γραφικές αναπαραστάσεις αλγεβρικών σχέσεων.

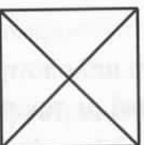
Όπου είναι δυνατό χρησιμοποιείται το Excel προκειμένου να απεικονιστούν καλύτερα οι έννοιες που παρουσιάζονται.

2.2 Ακέραιοι (Integers)

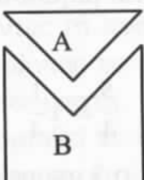
Ακέραιοι είναι οι αριθμοί όπως: – 5, – 3, + 1, + 2, κ.λπ. Οι ακέραιοι αριθμοί χωρίζονται επίσης και σε περιττούς, όπως –1, 1, 3, 5, 7, 9 κ.λπ., και άρτιους αριθμούς, όπως –2, 2, 4, 6, 8, 10 κ.λπ.

2.3 Κλάσματα (Fractions)

Το κλάσμα είναι ένας αριθμός που εκφράζει το τμήμα ενός συνόλου. Για παράδειγμα, παρουσιάζουμε το επόμενο τετράγωνο το οποίο αποτελείται από τέσσερα ίσα μέρη.



Κάθε μέρος αντιπροσωπεύει το ένα τέταρτο του τετραγώνου και γράφεται ως 1/4 ή $\frac{1}{4}$. Εάν ξεχωρίσουμε ένα μέρος, όπως στο ακόλουθο διάγραμμα,



τότε η επιφάνεια A αντιπροσωπεύει το ένα τέταρτο του τετραγώνου (δηλαδή 1/4) και η επιφάνεια B εκφράζει τα τρία τέταρτα του τετραγώνου (δηλαδή 3/4).

Ένα κλάσμα εκφράζει επίσης ***μία διαίρεση*** π.χ. $\frac{3}{4} = 3/4$, όπου ο παράγοντας 3 ονομάζεται ***αριθμητής (numerator)*** και ο παράγοντας 4 ***παρονομαστής (denominator)***.

2.3.1 Πράξεις με κλάσματα (Operations with fractions)

• Ένα κλάσμα, όπως για παράδειγμα το 4/6, θεωρείται ισοδύναμο του 2/3 επειδή αν διαιρέσουμε τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή του κλάσματος 4/6 με τον παράγοντα 2 προκύπτει το κλάσμα 2/3.

Δηλαδή: $\frac{4}{6} = \frac{4/2}{6/2} = \frac{2}{3}$

• Ένα κλάσμα όπως το $\frac{2}{3}$ θεωρείται ως η πιο απλοποιημένη μορφή, δεδομένου ότι δεν μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω. Έτσι, ο μόνος αριθμός με τον οποίο μπορεί να διαιρεθεί τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής είναι το 1

Παράδειγμα:

Το κλάσμα 35/40 μπορεί να απλοποιηθεί διαιρώντας τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρανομαστή με τον παράγοντα 5. Έτσι έχουμε,

$$\frac{35}{40} = \frac{35/5}{40/5} = \frac{7}{8}$$

• Ένα κλάσμα μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες του 1. Για παράδειγμα το 3/4 είναι μικρότερο του 1. Επίσης μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1, εάν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή.

Παράδειγμα:

$$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

• Ένα ακέραιος αριθμός όπως ο 3 μπορεί να μετατραπεί σε κλάσμα με οποιοδήποτε παρονομαστή διαιρώντας τον με τον αριθμό που θέλουμε σαν παρανομαστή και ταυτόχρονα πολλαπλασιάζοντας τον με τον ίδιο αριθμό.

Παράδειγμα:

Για να μετατρέψουμε τον ακέραιο αριθμό 3 σε κλάσμα με παρονομαστή το 5, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και να διαιρέσουμε το 3 με το 5 έτσι ώστε,

$$\frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5}$$

• Ένας αριθμός ο οποίος αποτελείται από ένα ακέραιο και ένα κλάσμα, όπως για παράδειγμα ο $4\frac{3}{5}$, μπορεί να μετατραπεί σε κλάσμα ως εξής: θα πρέπει να μετατρέψουμε τον ακέραιο σε κλάσμα με τον ίδιο παρονομαστή όπως αυτός του κλάσματος και στη συνέχεια να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα.

Παράδειγμα:

Ένας ακέραιος αριθμός όπως ο 4 μπορεί να μετατραπεί σε ένα κλάσμα με παρανομαστή το 5 όπως το $\frac{20}{5}$. Στη συνέχεια, προσθέτοντας στο $\frac{20}{5}$ το $\frac{3}{5}$ παράγεται το $4\frac{3}{5}$. Δηλαδή $\frac{20}{5} + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$. Στην παρακάτω ενότητα θα δούμε πως μπορούμε να προσθέσουμε δύο κλάσματα.

2.3.2 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων (Addition and subtraction of fractions)

Όταν πρόκειται να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) δύο κλάσματα τα οποία έχουν διαφορετικούς παρονομαστές, θα πρέπει να μετατρέψουμε τα κλάσματα αυτά σε κάποια ισοδύναμα των αρχικών, τα οποία να έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Τότε το άθροισμά τους (ή η διαφορά τους) προκύπτει προσθέτοντας (ή αφαιρώντας) τους αριθμητές των κλασμάτων και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα σαν αριθμητή και διατηρώντας τον κοινό παρονομαστή.

Προκειμένου να προσδιορισθεί ποιος θα είναι ο κοινός παρονομαστής θα πρέπει να καθορίσουμε το ***ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών (εκπ) (least common denominator)***. Έτσι ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

1. Γράφουμε τον κάθε παρονομαστή ως γινόμενο πρώτων αριθμών (prime numbers).[2]
2. Το εκπ κάθε παρονομαστή αναλύεται σε ένα γινόμενο ενός πρώτου αριθμού επί τον αριθμό των φορών που αυτός ο πρώτος αριθμός χωρά σε κάθε παρονομαστή.

[2] Πρώτος αριθμός θεωρείται κάθε αριθμός ο οποίος διαιρείται μόνο με τον εαυτό του ή με τη μονάδα. Έτσι για παράδειγμα, οι 1, 2, 3, 5, 7, 11 είναι πρώτοι αριθμοί, ενώ οι 4, 6, 8 δεν είναι πρώτοι αριθμοί.

Παράδειγμα:

Για να εκτιμήσουμε το $\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$ θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των κλασμάτων $\frac{4}{5}$ και $\frac{1}{10}$

Αρχικά εκφράζουμε τους παρονομαστές ως γινόμενα πρώτων αριθμών. Δηλαδή, $5 = 5 \times 1$ και $10 = 5 \times 2 \times 1$. Έτσι έχουμε, εκπ $= 5 \times 2 \times 1 = 10$. Επειδή το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 10, τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής του $\frac{4}{5}$ θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 2, προκειμένου ο παρονομαστής του κλάσματος να γίνει 10. Δηλαδή έχουμε:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{10}=\frac{4\times 2}{5\times 2}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

Παράδειγμα:

Να εκτιμηθεί το $\frac{5}{7}-\frac{1}{2}$

Το εκπ των $\frac{5}{7}$ και $\frac{1}{2}$ μπορεί να προσδιορισθεί εκφράζοντας τους παρονομαστές των κλασμάτων ως γινόμενα πρώτων αριθμών: $7 = 7 \times 1$ και $2 = 2 \times 1$. Τότε έχουμε, εκπ $= 7 \times 2 \times 1 = 14$. Δηλαδή, ο αριθμητής και ο παρονομαστής του $\frac{5}{7}$ θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 2, καθώς επίσης ο αριθμητής και ο παρονομαστής του $\frac{1}{2}$ θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 7, προκειμένου να καταλήξουμε σε δύο κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή. Έτσι έχουμε:

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{5\times 2}{7\times 2}-\frac{1\times 7}{2\times 7}=\frac{10}{14}-\frac{7}{14}=\frac{3}{14}$$

Εναλλακτικά, υποθέτουμε ότι έχουμε δύο κλάσματα, όπως τα $\frac{A}{B}$ και $\frac{C}{D}$, τα οποία θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε.

Σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμοστεί ο ακόλουθος κανόνας:

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{A\times D\pm C\times B}{B\times D}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον κανόνα αυτό στα παραπάνω παραδείγματα έχουμε:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{10}=\frac{4\times 10+1\times 5}{5\times 10}=\frac{40+5}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$

και

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{2}=\frac{5\times 2-7\times 1}{7\times 2}=\frac{10-7}{14}=\frac{3}{14}$$

Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα είναι τα ίδια με την προηγούμενη μέθοδο.

2.3.3 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων (Multiplication of fractions)

Όταν πολλαπλασιάζουμε κλάσματα, το αποτέλεσμα είναι ένα νέο κλάσμα του οποίου ο αριθμητής και παρονομαστής είναι το αποτέλεσμα του γινομένου των αριθμητών και των παρονομαστών των αρχικών κλασμάτων, αντίστοιχα. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός του κλάσματος $\frac{A}{B}$ με το κλάσμα $\frac{C}{D}$ προσδιορίζεται ως:

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 7}{5\times 8}=\frac{21}{40}$$

2.3.4 Διαίρεση κλασμάτων (Division of fractions)

Η διαίρεση του κλάσματος $\frac{A}{B}$ με το κλάσμα $\frac{C}{D}$ προσδιορίζεται ως:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

Παραδείγματα:

1. $$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3\times 6}{4\times 5}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε το κλάσμα $\frac{A}{B}$ με το αντίστροφο του κλάσματος $\frac{C}{D}$, δηλαδή με το $\frac{D}{C}$. Επομένως έχουμε:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{10}$$

2. $$\frac{\left(2\frac{1}{2} + 4\frac{3}{5}\right)}{\left(1\frac{1}{6} \times 2\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{23}{5}}{\frac{7}{6} \times \frac{9}{4}} = \frac{\frac{25}{10} + \frac{46}{10}}{\frac{63}{24}} = \frac{1704}{630} = \frac{284}{105}$$

2.3.5 Κάποιες ειδικές πράξεις κλασμάτων

Ας θεωρήσουμε ότι ο παράγοντας X εκφράζει έναν αριθμό όπως 2, –3 κ.λπ. Τότε το κλάσμα $\frac{0}{X} = 0$. Τα κλάσματα $\frac{X}{0}$ και $\frac{0}{0}$ είναι απροσδιόριστα.

2.4 Δεκαδικοί (Decimals)

Οι δεκαδικοί αριθμοί εκφράζουν ένα εναλλακτικό τρόπο παρουσίασης των κλασμάτων.

Παράδειγμα:

$$\frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{28}{100} = 0{,}28 \qquad \frac{254}{100} = 2{,}54$$

Το κόμμα ονομάζεται ***υποδιαστολή (decimal point)***. Οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιά από την υποδιαστολή προσδιορίζουν τις δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ. και είναι γνωστοί ως *δεκαδικά ψηφία (decimal digits)*. Για παράδειγμα,

$$0{,}4 = 4/10$$
$$0{,}04 = 4/100$$
$$0{,}004 = 4/1000$$
$$0{,}018 = 18/1000$$

Βλέπουμε ότι για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα, βάζουμε το δεκαδικό αριθμό αριθμητή και παρονομαστή τη μονάδα, ακολουθούμενη από τόσα μηδενικά, όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα:

1. Να μετατραπούν οι δεκαδικοί αριθμοί i) 3,375 και ii) 0,003 σε κλάσματα.
2. Να μετατραπούν τα κλάσματα i) 1/5 και ii) $5\frac{3}{7}$ σε δεκαδικούς αριθμούς.

Απαντήσεις:

1. *i)* $3{,}375 = 3\frac{375}{1000} = \frac{3375}{1000}$

Πρέπει να επισημανθεί ότι ο αριθμός των μηδενικών του παρονομαστή, ισοδυναμεί με τον αριθμό των ψηφίων που βρίσκονται μετά την υποδιαστολή.

ii) $0{,}003 = \frac{3}{1000}$

2. *i) Διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή προκύπτει ο δεκαδικός αριθμός* $0{,}2 : 1/5 = 0{,}2$

ii) Θα ασχοληθούμε μόνο με το $\frac{3}{7}$ *δεδομένου ότι το ακέραιο τμήμα του αριθμού παραμένει αμετάβλητο. Έτσι διαιρούμε το 3 με το 7 και προκύπτει ο δεκαδικός αριθμός 0,43. Επομένως,* $5\frac{3}{7} = 5{,}43$

2.5 Στρογγυλοποίηση αριθμών (Rounding of numbers)

Το κλάσμα $\frac{3}{7}$, που αναφέρθηκε παραπάνω, μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός δεκαδικού αριθμού ο οποίος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και ισούται με 0,4285714. Παρόλα αυτά ένας

καλύτερος υπολογιστής μπορεί να εκτιμήσει περισσότερα δεκαδικά ψηφία, δίνοντας έτσι μία καλύτερη προσέγγιση της τιμής του κλάσματος.

Όπως έχουμε ήδη δει, το κλάσμα $\frac{3}{7}$, εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή, παίρνει την τιμή 0,4285714. Δηλαδή, λέγεται ότι περιέχει 7 δεκαδικά ψηφία ή ότι έχει στρογγυλοποιηθεί μέχρι 7 δεκαδικά ψηφία.

Το κλάσμα θα μπορούσε επίσης να πάρει την τιμή 0,428571. Δηλαδή να έχει 6 δεκαδικά ψηφία. Στην περίπτωση αυτή επειδή το 7ο δεκαδικό ψηφίο είναι μικρότερο του 5, το 6ο δεκαδικό ψηφίο θα παραμείνει αμετάβλητο.

Εάν θέλαμε να εκφράσουμε το κλάσμα σε δεκαδική μορφή υπολογίζοντας όμως μόνο 4 δεκαδικά ψηφία θα είχαμε το δεκαδικό αριθμό 0,4286 δεδομένου ότι το 5ο δεκαδικό ψηφίο είναι μεγαλύτερο του 5

Επομένως συμπεραίνουμε ότι όταν έχουμε ένα δεκαδικό αριθμό και θέλουμε να μειώσουμε τα δεκαδικά του ψηφία, τότε εάν το ψηφίο που αφαιρούμε έχει τιμή μεγαλύτερη του 5 τότε θα αυξήσουμε κατά μία μονάδα την τιμή του αμέσως προηγούμενου ψηφίου, διαφορετικά θα αφήσουμε το προηγούμενο ψηφίο αμετάβλητο.

Όταν πραγματοποιούμε κάποιες πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών (όπως πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμό ή διαίρεση) και θέλουμε το τελικό αποτέλεσμα να περιέχει n δεκαδικά ψηφία θα πρέπει οι δεκαδικοί αριθμοί τους οποίους προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε να περιέχουν τουλάχιστον $n+1$ δεκαδικά ψηφία.

Για παράδειγμα, θέλουμε να πραγματοποιήσουμε την πράξη $3{,}4263+2{,}2542$ και το τελικό αποτέλεσμα να έχει 2 δεκαδικά ψηφία. Εάν ληφθούν υπόψη μόνο τα δύο δεκαδικά ψηφία τότε θα έχουμε: $3{,}42+2{,}25=5{,}67$ αποτέλεσμα το οποίο δεν είναι απόλυτα σωστό. Τουλάχιστον 3 δεκαδικά ψηφία θα πρέπει να ληφθούν υπόψη προκειμένου να έχουμε το σωστό αποτέλεσμα, δηλαδή $3{,}426+2{,}254=5{,}68$. Η απάντηση αυτή είναι διαφορετική από το αποτέλεσμα που είχε βρεθεί χρησιμοποιώντας μόνο τα δύο δεκαδικά ψηφία δηλαδή το 5,67. Η διαπίστωση αυτή επιβεβαιώνεται πραγματοποιώντας την πράξη λαμβάνοντας υπόψη και τα τέσσερα δεκαδικά ψηφία, οπότε έχουμε, $3{,}4263+2{,}2542=5{,}6805$. Εάν στρογγυλοποιήσουμε τον 5,6805 χρησιμοποιώντας μόνο τα 2 δεκαδικά ψηφία έχουμε τον αριθμό 5,68. Επομένως καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα όπως όταν είχαμε χρησιμοποιήσει 3 δεκαδικά ψηφία.

Ο οδηγός συναρτήσεων (function wizard) στο Excel εμπεριέχει την ακόλουθη μαθηματική συνάρτηση μέσω της οποίας στρογγυλοποιείται κάποιος αριθμός:

= ***round(number, number of digits)***.

Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 4,64321 λαμβάνοντας υπόψη μόνο 2 δεκαδικά ψηφία θα εφαρμόσουμε τον τύπο: = ***round(4,64321,2)***. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον αριθμό 4,64321 στο κελί a2 του φύλλου εργασίας (βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου), τότε μπορούμε να πάμε στο κελί b2 και να χρησιμοποιήσουμε την εντολή = ***round(a2,2)***.

Τέλος, αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε ακέραιο δηλαδή να μην περιέχει κανένα δεκαδικό ψηφίο, θα εφαρμόσουμε πάλι τη μαθηματική συνάρτηση που περιγράψαμε παραπάνω. Έτσι για παράδειγμα θα εφαρμόσουμε τον τύπο: = ***round (4,64321,0)*** και από τον δεκαδικό αριθμό 4,64321 θα προκύψει ο ακέραιος αριθμός 5. Πρέπει να επισημανθεί ότι η συνάρτηση = ***round(number, 0)***, που εκφράζει την συνάρτηση στρογγυλοποίησης με μηδέν δεκαδικά ψηφία δεν είναι απαραίτητα η ίδια με την ***συνάρτηση των ακεραίων (int function)***. Η συνάρτηση των ακεραίων στο Excel στρογγυλοποιεί έναν αριθμό προς τον πλησιέστερο ακέραιο προς τα κάτω και λαμβάνει υπόψη μόνο το ακέραιο μέρος του αριθμού. Έτσι στο Excel έχουμε τη συνάρτηση = ***int()***. Επομένως, στο παραπάνω παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τον τύπο = ***int(4,64321)***, προκύπτει ο αριθμός 4 ενώ χρησιμοποιώντας τον τύπο = ***round(4,64321,0)***, προκύπτει ο αριθμός 5

2.6 Ποσοστά (Percentages)

Η έκφραση επί τοις εκατό (percent) σημαίνει για κάθε εκατοντάδα. Για παράδειγμα το ποσοστό δέκα τοις εκατό (10%) εκφράζει το 10 από τα 100 και ισούται με 10/100 ή 0,10

• Ένα κλάσμα το οποίο έχει παρονομαστή ίσο με 100 μπορεί να εκφραστεί ως ποσοστό καταγράφοντας απλά τον αριθμητή.

Παράδειγμα: $43/100 = 43\% = 0{,}43$

• Γενικότερα, προκειμένου να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε ποσοστό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα με το 100

Παράδειγμα:

Προκειμένου να εκφράσουμε το κλάσμα 3/5 σε ποσοστό θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με το 100. Δηλαδή έχουμε (3/5) $100 = 300/5 = 60$ ή 60%. Επομένως, το 3/5 είναι ισοδύναμο του 60%

• Για να μετατρέψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε ποσοστό θα πρέπει πάλι να τον πολλαπλασιάσουμε με 100. Δηλαδή θα μετακινήσουμε την υποδιαστολή δύο θέσεις δεξιά.

Παράδειγμα:

Για να μετατρέψουμε το δεκαδικό αριθμό 0,003 σε ποσοστό θα πρέπει να τον πολλαπλασιάσουμε με το 100. Επομένως θα έχουμε: $0,003 \times 100 = 0,3$ ή 0,3%

• Για να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο ποσοστό ενός αριθμού ακολουθούμε την ακόλουθη διαδικασία: Εκφράζουμε το ποσοστό μέσω του αντίστοιχου δεκαδικού αριθμού και στη συνέχεια τον πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό του οποίου μας ενδιαφέρει να βρούμε το ποσοστό.

Παράδειγμα:

Για να εκτιμήσουμε το 10% του 90 μετατρέπουμε το 10% σε 0,10 και στη συνέχεια το πολλαπλασιάσουμε με το 90. Δηλαδή το 10% του $90 = 0,10 \times 90 = 9\%$

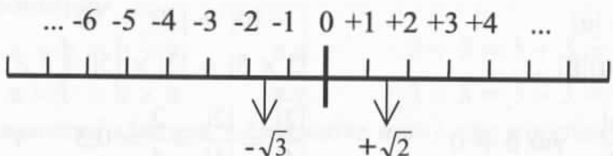
2.7 Άρρητοι αριθμοί (Irrational numbers)

Υπάρχουν κάποιοι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να εκφραστούν ως το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο ακεραίων (integers) αριθμών όπως:

$$\sqrt{2} = 1,4142, \quad \pi = 3,14159265, \quad \sqrt{3} = 1,7321, \quad \text{κ.λπ.}$$

Οι ακέραιοι, τα κλάσματα και οι άρρητοι αριθμοί συνιστούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών το οποίο συμβολίζεται ως $\mathbb{R}$. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορεί να απεικονιστεί στη γραμμή αναγωγής (scaled number) όπως αυτή παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.1.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.1: ***Γραμμή αναγωγής των πραγματικών αριθμών***



Στην αριθμημένη γραμμή υπάρχει το σημείο μηδέν, γνωστό ως ***αρχή (origin)***, και αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό 0. Για κάθε ένα σημείο στη γραμμή αναγωγής (των πραγματικών αριθμών) αντιστοιχεί και ένας πραγματικός αριθμός και για κάθε ένα πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο στη γραμμή. Όλα τα σημεία που βρίσκονται δεξιά από το σημείο 0, αντιστοιχούν στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, ενώ όλα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του 0 αντιστοιχούν στους αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

2.8 Απόλυτη τιμή (Absolute value)

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού εκφράζει το μέγεθος του αριθμού χωρίς τον προσδιορισμό κάποιου πρόσημου. Μετράει την απόσταση ενός αριθμού από το σημείο 0, στη γραμμή των πραγματικών αριθμών. Απεικονίζει πάντα κάποιο θετικό αριθμό. Η απόλυτη τιμή του α συμβολίζεται τοποθετώντας δύο κάθετες γραμμές σε κάθε πλευρά του α, |α|. Έτσι $|\alpha| = \alpha$ αν $\alpha \geq 0$, και $|\alpha| = -\alpha$ αν $\alpha < 0$.

Παράδειγμα:

$$|5| = 5, \quad |-5| = 5, \quad |2-8| = |-6| = 6$$

Ο οδηγός συναρτήσεων στο ***Excel*** εμπεριέχει τη ***συνάρτηση = abs()*** η οποία εκτιμά την απόλυτη τιμή κάποιου αριθμού.
Όπως βλέπουμε στο παράρτημα του κεφαλαίου, η τιμή −6 είναι στο κελί a4. Με την εφαρμογή του τύπου = ***abs(a4)***, στο κελί b4 προκύπτει η τιμή 6.

Κανόνας	Παράδειγμα
$\lvert -\alpha\rvert = \lvert\alpha\rvert$	$\lvert -10\rvert = \lvert 10\rvert = 10$
$\lvert\alpha\beta\rvert = \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert$	$\lvert 3\times 5\rvert = \lvert 3\rvert \times \lvert 5\rvert = 3\times 5 = 15$
$\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert = \frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}$ για $\beta \neq 0$	$\left\lvert\frac{2}{4}\right\rvert = \frac{\lvert 2\rvert}{\lvert 4\rvert} = \frac{2}{4} = 0{,}5$
$\lvert\alpha+\beta\rvert \leq \lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$	$\lvert 6+3\rvert \leq \lvert 6\rvert + \lvert 3\rvert$
$\lvert\alpha-\beta\rvert \leq \lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$	$\lvert 10-5\rvert \leq \lvert 10\rvert + \lvert 5\rvert$
$\lvert\alpha-\beta\rvert \geq \lvert\alpha\rvert - \lvert\beta\rvert$	$\lvert 10-5\rvert \geq \lvert 10\rvert - \lvert 5\rvert$

2.9 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών

Ο γενικός κανόνας είναι ότι, όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε δύο αρνητικούς (ή θετικούς) αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός και όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε έναν αρνητικό αριθμό και ένα θετικό αριθμό το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός. Ο κανόνας αυτός απεικονίζεται στα παρακάτω παραδείγματα (Σημειωτέον ότι όταν δεν υπάρχει κάποιο πρόσημο που να προηγείται του αριθμού τότε αυτό λαμβάνεται υπόψη ως θετικός αριθμός):

$$(+5)(+3) = +15$$
$$(+1)(-2) = -2$$
$$(-2)(-3) = +6$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$(+15) \div (-3) = -5$$
$$(-6) \div (-3) = +2$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, να πολλαπλασιάσουμε, και να διαιρέσουμε θετικές ή και αρνητικές ποσότητες.

2.10 Αλγεβρικές πράξεις (Algebraic operations)

Δεδομένου ότι a, b, c ∈ ℝ, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- ***Αντιμεταθετική ιδιότητα (Commutative laws)*** της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

  $a + b = b + a$ π.χ. $3 + 5 = 5 + 3 = 8$

  $a \times b = b \times a$ π.χ. $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$

- ***Προσεταιριστική ιδιότητα (Associative laws)*** της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

  $(a + b) + c = a + (b + c)$ π.χ. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2) = 10$

  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ π.χ. $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2) = 30$

2.11 Σειρά των πράξεων (Sequence of operations)

Όταν πραγματοποιούμε κάποιους αριθμητικούς υπολογισμούς, είναι απαραίτητο οι πράξεις του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, της πρόσθεσης, και της αφαίρεσης να γίνονται με τη σωστή σειρά. Γενικά, η σειρά που θα πρέπει να ακολουθείται είναι: Παρενθέσεις, Εκθέτες, Διαίρεση, Πολλαπλασιασμός, Πρόσθεση και Αφαίρεση. Η χρήση του παραπάνω κανόνα απεικονίζεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

$$\begin{aligned} 2 \times 3^2 - (1 + 2 \times 2^2)^2/3 &= 2 \times 9 - (1 + 2 \times 4)^2/3 \\ &= 18 - (9)^2/3 \\ &= 18 - 81/3 \\ &= 18 - 27 = -9 \end{aligned}$$

2.12 Δυνάμεις (Powers)

Όταν ένας πραγματικός αριθμός ***a*** πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, το γινόμενο αυτό προσδιορίζεται ως ***a × a*** ή ***aa***.

Γενικότερα, εάν ο αριθμός a πολλαπλασιάζεται n φορές με τον εαυτό του (όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος) τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: $a^n = a \times a \times a \times a \ldots$, n φορές. Ο αριθμός n ονομάζεται ***εκθέτης (exponent) ή δύναμη (power)*** και δείχνει τον αριθμό των φορών που ο αριθμός a πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του.

Για παράδειγμα $8^2 = 8 \times 8 = 64$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$a^1 = a$

$a^2 = a \times a$, «εκφράζει τον αριθμό a υψωμένο στη δύναμη 2» ή «στο τετράγωνο»

$a^3 = a \times a \times a$ «εκφράζει τον αριθμό a υψωμένο στη δύναμη 3» ή «στον κύβο»

a^n «εκφράζει τον αριθμό a υψωμένο στη δύναμη n»

2.12.1 Κανόνες εκθετών / δυνάμεων (Rules of exponents / powers)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται κάποιοι χρήσιμοι κανόνες εκθετών. Ας θεωρήσουμε ότι a και b είναι θετικοί αριθμοί. Τότε

Κανόνας	**Παράδειγμα**
$a^0 = 1$	$3^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$a^2 = aa$	$4^2 = 4 \times 4 = 16$
$a^3 = aaa$	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$5^2 5^4 = 5^6 = 15625$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8 = 6561$
$a^n b^n = (ab)^n$	$5^3 7^3 = (5 \times 7)^3 = 35^3 = 42875$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{4^3}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 1{,}33^3 = 2{,}37$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3 = 125$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ όπου $(a \neq 0)$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

2.12.2 Κλασματικές δυνάμεις (Ριζικοί) (Fractional powers (Radicals))

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ εκφράζει τη ρίζα τάξης m του a^n

Παράδειγμα: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = 3{,}34$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ εκφράζει την τετραγωνική ρίζα του a (όπου $a > 0$)

Παράδειγμα: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41$

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ εκφράζει την κυβική ρίζα του a

Παράδειγμα: $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ εκφράζει την κυβική ρίζα του a^2

Παράδειγμα 1: $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = 1{,}59$

Παράδειγμα 2: $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)(-3)(-3)} = -3$

2.12.3 Ιδιότητες των ριζικών (Laws of radicals)

Κανόνας	**Παράδειγμα**
$(\sqrt[n]{a})^n = \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a^{n/n} = a^1 = a$	$(\sqrt{4})^2 = \sqrt{4}\sqrt{4} = 4^{1/2}4^{1/2} = 4^{2/2} = 4^1 = 4$
$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$	$5\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = (5-3)\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$
$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} = 2\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$ όπου: $b \neq 0$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}$

2.12.4 Λύσεις εξισώσεων που περιέχουν εκθέτες

$x^n = \alpha$ με $\alpha > 0$ και n περιττό, υπάρχει ακριβώς μια λύση, $x = \sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$

Παράδειγμα: $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$x^n = \alpha$ με $\alpha > 0$ και n άρτιο, υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις, τις $x = +\sqrt[n]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[n]{\alpha}$

Παράδειγμα: $x^4 = 16 \Rightarrow x = +\sqrt[4]{16} = +2$ και $x = -\sqrt[4]{16} = -2$

$x^n = \alpha$ με $\alpha < 0$ και n άρτιο, δεν υπάρχουν λύσεις.

Παράδειγμα: $x^2 = -4$

$x^n = \alpha$ με $\alpha < 0$ και n περιττό, υπάρχει ακριβώς μια λύση, $-\sqrt[n]{|\alpha|}$

Παράδειγμα: $x^3 = -27 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{|27|} = -3$

Για την εξίσωση $x^n = \alpha^n$, $x = \alpha$ όταν ο εκθέτης n είναι περιττός, ενώ $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$ όταν ο εκθέτης n είναι άρτιος αριθμός.

Παραδείγματα:
1. $x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2$
2. $x^4 = 5^4 \Rightarrow x = \pm 5$

Ο οδηγός συναρτήσεων στο Excel εμπεριέχει τις συναρτήσεις: ***sqrt(), power(number, power)***. Η πρώτη συνάρτηση υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού ή ενός ορισμένου κελιού στις παρενθέσεις, ενώ η δεύτερη υπολογίζει την τιμή ενός αριθμού υψωμένου σε μία δύναμη (βλέπε το παράρτημα του κεφαλαίου).

Η ***τετραγωνική ρίζα (square root)*** του αριθμού 4,64321 στο κελί a2, υπολογίζεται στο κελί b5, εφαρμόζοντας τον τύπο = ***sqrt(a2)***. Η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δεν είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι στο κελί b6, εφαρμόζοντας τον τύπο = ***sqrt(a4)***, όπου ο αριθμός −6 είναι στο κελί a4, προκύπτει ένα αριθμητικό λάθος, το οποίο δηλώνεται ως ***#NUM!***.

Η πράξη $(-6)^2$ πραγματοποιείται στο κελί b7 μέσω του τύπου = power (α4, 2). Εναλλακτικά, εφαρμόζοντας τον τύπο = ***a4^2*** στο κελί b8, προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

Η m ρίζα ενός αριθμού μπορεί να υπολογιστεί στο Excel χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Έτσι, δεδομένου ότι $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$, ο τύπος = ***power(a9,1/3)*** εκτιμά την 3η ρίζα του 27 στο κελί b9, η οποία ισούται με 3

2.13 Πράξεις οι οποίες περιέχουν πολυώνυμα (Operations involving polynomials)

Στην έκφραση $6x^3$, ο παράγοντας x ονομάζεται ***μεταβλητή (variable)*** επειδή μπορεί να λάβει διάφορες τιμές και ο αριθμός 6 λαμβάνεται υπόψη ως ο ***συντελεστής (coefficient)*** της μεταβλητής x. Εκφράσεις όπως οι παραπάνω, οι οποίες αποτελούνται από κάποιον πραγματικό αριθμό ή από ένα συντελεστή πολλαπλασιασμένο με μία ή περισσότερες μεταβλητές υψωμένες σε κάποια δύναμη ενός ακεραίου, ονομάζονται ***μονώνυμα (monomials)***. Τα μονώνυμα μπορούν είτε να προστεθούν είτε να αφαιρεθούν με αποτέλεσμα να σχηματιστούν ***πολυώνυμα (polynomials)***. Κάθε μονώνυμο, το οποίο συνιστά το πολυώνυμο, ονομάζεται ***όρος (term)*** του πολυώνυμου. Οι όροι με τις ίδιες μεταβλητές και εκθέτες ονομάζονται ***όμοιοι όροι (like terms)***. Οι όμοιοι όροι των πολυωνύμων μπορούν να προστεθούν και να αφαιρεθούν, προσθέτοντας ή αφαιρώντας τους συντελεστές τους.

Παράδειγμα:

$$5x + 3x = 8x$$

$$4ab^2 - 3ab^2 + 8ab^2 = 9ab^2$$

Οι ***μη όμοιοι όροι (unlike terms)*** σε ένα πολυώνυμο πρέπει να τοποθετηθούν ξεχωριστά.

Παράδειγμα:

$3x^3 + 4x^2 - 5x^3 + 2x^2 = -2x^3 + 6x^2$ το οποίο περιέχει μη όμοιους όρους.

Διαίρεση και πολλαπλασιασμός μεταξύ των όμοιων και μη όμοιων όρων μπορεί να πραγματοποιηθεί πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας τόσο τους συντελεστές όσο και τις μεταβλητές.

Παραδείγματα:

1. $(3x^4y)(12y^4x^2) = 36x^4x^2yy^4 = 36x^6y^5$
2. $\dfrac{15x^4y^5z^5}{3x^2y^4z^3} = 5x^2yz^2$

Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα θα πρέπει ο κάθε παράγοντας του πρώτου πολυωνύμου να πολλαπλασιαστεί με τον κάθε παράγοντα του δεύτερου και στη συνέχεια τα γινόμενά τους να προστεθούν.

Παράδειγμα:

$$(3x + 5y + 2z)(3x + 2y)$$
$$= 3x(3x + 2y) + 5y(3x + 2y) + 2z(3x + 2y)$$
$$= 9x^2 + 6xy + 15xy + 10y^2 + 6zx + 4zy$$
$$= 9x^2 + 21xy + 10y^2 + 6zx + 4zy$$

2.13.1 Παραγοντοποίηση (Factoring)

Σε μία αλγεβρική έκφραση η οποία εμπεριέχει πολλαπλασιασμό κάποιων όρων, ***παράγοντας (factor)*** είναι οποιοσδήποτε όρος που μπορεί να πολλαπλασιαστεί και να δώσει το γινόμενο που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα

- 4 είναι ένας παράγοντας του 8 (όπου $4 \times 2 = 8$)
- 2 είναι ένας παράγοντας του 8 (όπου $2 \times 4 = 8$)
- $2a$ είναι ένας παράγοντας του $2ax^3$
- $2x^3$ είναι ένας παράγοντας του $8x^5 - 6x^4 + 4x^3$ (αφού $8x^5 - 6x^4 + 4x^3 = 2x^3(4x^2 - 3x + 2)$)

Παράδειγμα:

Να παραγοντοποιηθούν οι ακόλουθες εκφράσεις:

i) $\dfrac{x^3z^2}{y} - \dfrac{x}{y^2}$, **ii)** $xy^2 + xyz$

Απαντήσεις:

i) Διαπιστώνουμε ότι ο κοινός παράγοντας των δύο όρων της έκφρασης αυτής είναι το $\frac{x}{y}$. Επομένως:

$$\frac{x^3z^2}{y} - \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y}\left(x^2z^2 - \frac{1}{y}\right)$$

ii) Διαπιστώνουμε ότι ο κοινός παράγοντας των δύο όρων της παραπάνω έκφρασης είναι το xy. Επομένως:

$$xy^2 + xyz = xy(y + z)$$

2.13.2 Κοινοί τύποι πολυωνύμων (Common forms of polynomials)

Εάν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = \mathbf{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = \mathbf{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2 = \mathbf{x^2 - y^2}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 = \mathbf{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x-y)^2 = (x-y)(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3 = \mathbf{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^\nu - y^\nu = (x-y)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}y + \ldots + xy^{\nu-2} + y^{\nu-1})$$

2.14 Ανισότητες (Inequalities)

2.14.1 Εισαγωγή

Οι ανισότητες, συχνά, χρησιμοποιούνται, για να εκφράσουν κάποιες σχέσεις μεταξύ αριθμών, συναρτήσεων, μεταβλητών κ.λπ. και δείχνουν ότι, δύο αριθμοί δεν είναι ίσοι αλλά μπορούν να συγκριθούν.

Παράδειγμα:

Όταν συγκρίνουμε το μήκος δύο φορτηγών, το ένα εκ των οποίων είναι 10 μέτρα και το άλλο είναι 12 μέτρα, τότε το δεύτερο φορτηγό είναι μακρύτερο από το πρώτο. Τέτοιες σχετικές συγκρίσεις μεταξύ των μεγεθών, πραγματοποιούνται με τις ανισότητες και αποτελούν μέρη της καθημερινής μας ζωής. Συγκρίσεις των τιμών διαφορετικών προϊόντων, του βάρους και του ύψους των ανθρώπων, των συντελεστών φορολογίας, των επιτοκίων κ.λπ. αποτελούν τέτοια παραδείγματα.

Συμβολισμοί

Δεδομένου ότι $a, b \in \mathbb{R}$ τότε (όπου $\in$ δηλώνει «ανήκει στο»)

- $a < b$ σημαίνει a είναι μικρότερο από το b
- $a \leq b$ σημαίνει a είναι μικρότερο ή ίσο με το b

- $a > b$ σημαίνει a είναι μεγαλύτερο από το b
- $a \geq b$ σημαίνει a είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το b

Η δήλωση $a < b$ εκφράζει ότι στη γραμμή των πραγματικών αριθμών (βλέπε διάγραμμα 2.1), το a τοποθετείται αριστερά του b. π.χ. $-3 < 1$

Ομοίως, $a > b$ εκφράζει ότι στην γραμμή των πραγματικών αριθμών το a τοποθετείται δεξιά του b. π.χ. $-1 > -2$

Η δήλωση $y \leq -2$ εκφράζει ότι η μεταβλητή y παίρνει τιμές στον ***άξονα των πραγματικών αριθμών (real numbers axis)*** οι οποίες είναι μικρότερες ή ίσες του -2. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της μεταβλητής y θα είναι είτε -2 είτε βρίσκονται αριστερά του -2 στον άξονα.

Η σχέση αυτή μπορεί επίσης να εκφραστεί με την ακόλουθη δήλωση $y \in (-\infty, -2]$. Δηλαδή, το y λαμβάνει τιμές στο ανοικτό από αριστερά διάστημα (τιμών) ∞, -2 και κλειστό από δεξιά.

Ανισότητες του τύπου $>$ ή $<$, είναι γνωστές ως ***αυστηρές ανισότητες (strict inequalities)***, δεδομένου ότι οι τιμές που βρίσκονται από την μια πλευρά της ανισότητας θα πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις τιμές που βρίσκονται από την άλλη πλευρά της ανισότητας.

Ανισότητες του τύπου $\geq$ or $\leq$ είναι γνωστές ως ***ανισότητες αδύναμης μορφής (weak form inequalities)***, δεδομένου ότι οι τιμές που βρίσκονται από την μια πλευρά της ανισότητας δεν είναι αυστηρά μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις τιμές που βρίσκονται από την άλλη πλευρά της ανισότητας.

Η δήλωση $3 \leq x \leq 10$, δείχνει ότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές μεταξύ 3 και 10, συμπεριλαμβάνοντας όμως τους αριθμούς 3 και 10 στην κλίμακα. Εδώ η μεταβλητή x λαμβάνει τιμές στο κλειστό από αριστερά και από δεξιά διάστημα τιμών [3, 10].

Η δήλωση $3 < x < 10$, δείχνει ότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές μεταξύ 3 και 10, μη λαμβάνοντας υπόψη τους αριθμούς 3 και 10. Στην περίπτωση αυτή η ανισότητα μπορεί να εκφραστεί ως $x \in (3, 10)$.

Περιληπτικά:

Έκφραση Ανισότητας	**Έκφραση πεδίου τιμών**
$\alpha < x < b$	$x \in (\alpha, b)$
$\alpha \leq x \leq b$	$x \in [\alpha, b]$
$\alpha \leq x < b$	$x \in [\alpha, b)$
$\alpha < x \leq b$	$x \in (\alpha, b]$
$x > \alpha$	$x \in (\alpha, +\infty)$
$x \geq \alpha$	$x \in [\alpha, +\infty)$
$x < \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha)$
$x \leq \alpha$	$x \in (-\infty, \alpha]$
$-\infty < x < +\infty$	$x \in (-\infty, +\infty)$

2.14.2 Κανόνες ανισοτήτων (Rules of inequalities)

• Η πρόσθεση ή αφαίρεση ενός αριθμού και στις δύο πλευρές μιας ανισότητας δε μεταβάλλει τη φορά της ανισότητας.

Παραδείγματα:

1. Εάν $y > x$, τότε $y \pm 5 > x \pm 5$
Επίσης, εάν $y < x$, τότε $y \pm 5 < x \pm 5$
2. $-2 > -8$, τότε $-2 + 5 > -8 + 5$, όπου $3 > -3$

• Ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση και των δύο πλευρών μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό δεν μεταβάλλει την ανισότητα.

Παραδείγματα:

1. Εάν $y > x$, τότε $5y > 5x$
Επίσης, εάν $y < x$, τότε $(y/10) < (x/10)$
2. $-2 > -8$, τότε $(-2/10) > (-8/10)$, όπου $-0,2 > -0,8$

• Ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση και των δύο πλευρών μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αντιστρέφει τη φορά της ανισότητας.

Παραδείγματα:

1. Εάν: $y \geq x$, τότε $-3y \leq -3x$
2. $10 > 5$, τότε: $-3 \times 10 < -3 \times 5$, όπου: $-30 < -15$

2.14.3 Λύση απλών ανισοτήτων (Solving simple inequalities)

Οι παραπάνω κανόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να λυθούν απλές μορφές ανισοτήτων.

Παράδειγμα:

Ζητείται να λυθεί η ανισότητα $4x + 6 > 8x - 2$

Βήμα 1: Αφαιρούμε τον παράγοντα 4x και από τις δύο πλευρές:

$6 > 4x - 2$

Βήμα 2: Προσθέτουμε τον παράγοντα 2 και στις δύο πλευρές:

$8 > 4x$

Βήμα 3: Διαιρούμε και τις δύο πλευρές με το 4:

$2 > x$ ή ισοδύναμα $x < 2$

Παρατηρούμε ότι η λύση για την παραπάνω ανισότητα δεν είναι μία συγκεκριμένη τιμή αλλά ένα διάστημα τιμών. Επομένως, στη γραμμή των πραγματικών αριθμών, η λύση για τη μεταβλητή x είναι όλες οι τιμές που βρίσκονται αριστερά του 2.

2.15 Τελεστές άθροισης (Summation operators)

2.15.1 Μονές αθροίσεις (Single summations)

Το γράμμα Σ αντιπροσωπεύει το μαθηματικό σύμβολο που εκφράζει το άθροισμα ή την πράξη της άθροισης. Η έκφραση f(i) διαβάζεται ως «άθροισμα των f(i), όπου το i παίρνει τιμές από 1 έως n».

Παραδείγματα:

1. Το άθροισμα των ακεραίων από 1 έως 10 προσδιορίζεται ως:

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

2. $$\sum_{i=4}^{8} i^2 = (4)^2 + (5)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (8)^2$$

3. $$\sum_{i=0}^{3} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 = 1 + x + x^2 + x^3$$

4. Να γραφεί η έκφραση $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n$ χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του αθροίσματος.

Η παραπάνω παράσταση μπορεί να εκφραστεί ως $\sum_{i=1}^{n} ix^i$, όπου αναλύνοντάς την προκύπτει: $x^1 + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n$.

Ο οδηγός συναρτήσεων στο ***Excel*** συμπεριλαμβάνει τη συνάρτηση = ***sum(number1, number2, ...)***, η οποία δίνει το άθροισμα για ένα σύνολο αριθμών (βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου). Το άθροισμα των αριθμών στα κελιά a2, a4 και a9 εκτιμάται στο κελί b10 μέσω της συνάρτησης = ***sum(a2, a4, a9)***. Εναλλακτικά, το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ως = ***a2 + a4 + a9*** στο κελί b10. Παρόλα αυτά, ο πρώτος τύπος είναι προφανώς ευκολότερος στην εφαρμογή του, ειδικότερα όταν δεν υπάρχουν κενά μεταξύ των κελιών που θα πρέπει να προστεθούν, καθώς ένα διάστημα όπως το a2:a19 είναι πιο εύκολο να προσδιοριστεί μέσω του τύπου = sum(a2:a19), σε σχέση με την εφαρμογή του τύπου = a2 + a3 + . . . + a19. Η εντολή του αθροίσματος στο Excel μπορεί επίσης να ενεργοποιηθεί από το εικονίδιο του Σ

2.15.2 Διπλές αθροίσεις (Double summations)

Ας υποθέσουμε ότι ο Πίνακας 2.1 περιγράφει το κόστος ενοικίασης της γης, του κεφαλαίου και της εργασίας, που επωμίστηκε ένας γεωργός τους τέσσερις προηγούμενους μήνες, κατά την παραγωγή ενός προϊόντος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1: ***Τα κόστη σε Euro ενός γεωργού***

	Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3	Μήνας 4	Σύνολο
Γη	50	55	54	52	**211**
Κεφάλαιο	250	300	360	200	**1110**
Εργασία	900	850	800	1000	**3550**
Σύνολο	**1200**	**1205**	**1214**	**1252**	**4871**

Γενικοί συμβολισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν, προκειμένου να περιγραφεί το περιεχόμενο του πίνακα. Έτσι, συμβολίζοντας ως X το κόστος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο δείκτης $i = 1, 2, 3$ για να δηλωθούν τα τρία διαφορετικά κόστη, καθώς επίσης και ο δείκτης $j = 1, 2, 3, 4$ για να εκφραστούν τα διαφορετικά αυτά κόστη διαχρονικά, στους τέσσερις προηγούμενους μήνες. Έτσι, ο συμβολισμός X_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$ παρέχει ένα συνοπτικό τρόπο έκφρασης των ποσοτήτων του πίνακα. Για παράδειγμα το X_{12} είναι 55 και δείχνει ποιο είναι το κόστος για την ενοικίαση της γης το δεύτερο μήνα. Τώρα, προκειμένου να προσδιοριστεί το συνολικό κόστος για τους τέσσερις μήνες, λαμβάνοντας υπόψη και τους τρεις παράγοντες που συνεισφέρουν στο κόστος (γη, κεφάλαιο, εργασία), θα πρέπει να προστεθούν τα X_{ij}'s για όλα τα i's και j's. Εφαρμόζοντας το συμβολισμό της διπλής άθροισης προκύπτει:

$$\text{Συνολικό Κόστος} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

$$= (50 + 250 + 900) + \ldots + (52 + 200 + 1000) = 4871$$

Το άθροισμα που βρίσκεται σε κάθε παρένθεση στον παραπάνω τύπο εκφράζει το άθροισμα για κάθε i, $\sum_{i=1}^{3} X_{ij}$, και υπάρχουν τέσσερα τέτοια αθροίσματα που αντιστοιχούν στον κάθε μήνα. Έτσι, το άθροισμα της κάθε παρένθεσης περιλαμβάνει και τα τρία είδη κόστους και παρουσιάζεται στην τελευταία γραμμή του κάθε πίνακα. Για να βρεθεί το συνολικό κόστος, όλα τα X's θα πρέπει να προστεθούν σε όλα τα j's. Επομένως, το συνολικό άθροισμα θα παρουσιαστεί ως το άθροισμα της τελευταίας γραμμής του πίνακα και προκύπτει ως $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = 4871$

Η παραπάνω διπλή άθροιση υπολογίστηκε πρώτα για τα i και στη συνέχεια για τα j. Φυσικά, το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο εάν υπολογίζονταν πρώτα τα αθροίσματα για τα j's και έπειτα για τα i's.

Το ***Excel*** μπορεί να υπολογίσει τέτοιες διπλές αθροίσεις πολύ εύκολα. Ο Πίνακας του παραπάνω παραδείγματος παρουσιάζεται ως μέρος του φύλλου εργασίας στο παράρτημα του κεφαλαίου, στην περιοχή a23 με f29. Στο κελί f29, ο τύπος = ***sum(b26:e28)***, εκτιμά το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα και επαληθεύει το αποτέλεσμα 4871 που βρέθηκε παραπάνω εφαρμόζοντας τον τύπο της διπλής άθροισης.

Ένα ακόμη παράδειγμα παρουσιάζεται στον πίνακα των αριθμών στα κελιά a2 μέχρι b4. Το σύνολο των στοιχείων του πίνακα παρουσιάζεται στο κελί b11 χρησιμοποιώντας τον τύπο = sum(a2:b4). Ορίζοντας το εύρος των κελιών στην κύρια διαγώνιο του πίνακα υπολογίζει το άθροισμα σε 16,28321

2.16 Ακολουθίες (Sequences)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους ακόλουθους αριθμούς: 3, 10, 17, 24, ... Κάθε αριθμός μπορεί να προκύψει από τον προηγούμενο προσθέτοντας σε αυτόν τον αριθμό 7. Ισοδύναμα, η διαφορά μεταξύ διαδοχικών όρων (consecutive terms) είναι ο αριθμός 7. Αυτό το σύνολο των αριθμών αποτελεί παράδειγμα μιας ***ακολουθίας (sequence)***, η οποία ονομάζεται ***αριθμητική πρόοδος (arithmetic progression)***.[3]

Ας υποθέσουμε επίσης ότι έχουμε τους ακόλουθους αριθμούς: 2, 4, 8, 16, 32, ... Κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας τον με τον αριθμό 2. Ισοδύναμα, το πηλίκο δύο διαδοχικών αριθμών είναι 2. Το παράδειγμα αυτό εκφράζει ένα διαφορετικό τύπο ακολουθίας, η οποία είναι γνωστή ως ***γεωμετρική πρόοδος (geometric progression)***.

[3] Μια διατεταγμένη σειρά αριθμών ονομάζεται ακολουθία (sequence). Εάν υπάρχει κάποιος κανόνας, ο οποίος καθορίζει τον τρόπο δημιουργίας των αριθμών αυτών, οι ακολουθίες αυτές ονομάζονται *σειρές (series)* ή *πρόοδοι (progressions)*. Τέτοιοι κανόνες, δεν είναι πάντα εύκολο να αποκαλυφθούν. Δύο χρήσιμες σειρές σε επιχειρησιακά προβλήματα εξετάζονται στο βιβλίο αυτό – οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές πρόοδοι.

2.16.1 Αριθμητικές πρόοδοι (Arithmetic progressions)

Παράδειγμα:

Ο μισθός ενός τραπεζικού υπαλλήλου είναι € 40.000 και αυξάνεται ετησίως με το σταθερό ποσό των € 1.000. Έτσι, ο μισθός του τραπεζικού υπαλλήλου στα επόμενα τρία έτη θα είναι: 41.000, 42.000, 43.000. Το παράδειγμα αυτό εκφράζει μία αριθμητική πρόοδο. Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου, δηλαδή το 40.000 συμβολίζεται ως a. Η διαφορά μεταξύ διαδοχικών όρων, δηλαδή το € 1000, ονομάζεται ***κοινή διαφορά (common difference)*** και συμβολίζεται με d. Ο ετήσιος μισθός του τραπεζικού μπορεί να προσδιορισθεί μέσω της γενικής σχέσης:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2: ***Οι όροι μιας αριθμητικής προόδου***

Περίοδος	1	2	3	4	...	n
Όροι Α. Π.	a	a + d	a + 2d	a + 3d	...	a + (n − 1)d

Ο παραπάνω τύπος της περιόδου n μπορεί να εφαρμοστεί, προκειμένου να εκτιμηθεί ο μισθός του τραπεζικού υπαλλήλου για οποιοδήποτε έτος.

Παράδειγμα:

Ο μισθός του υπαλλήλου τον ενδέκατο χρόνο θα είναι:

$$40.000 + (11 - 1)1000 = € \, 50.000$$

Το συνολικό εισόδημα του τραπεζικού για τα πρώτα 10 χρόνια μπορεί να βρεθεί προσθέτοντας τους πρώτους 10 όρους της αριθμητικής προόδου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσον μπορεί να προκύψει ένας γενικός τύπος ο οποίος δίνει το άθροισμα των όρων. Ας θεωρήσουμε πάλι ότι ισχύει το παράδειγμα του Πίνακα 2.2. Το σύμβολο S_n που εμφανίζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα 2.3 χρησιμοποιείται για να δηλώσει το άθροισμα των πρώτων n όρων της προόδου, στη γραμμή 2. Στη γραμμή 3 η πρόοδος αντιστρέφεται, δηλαδή τοποθετείται ο n όρος της προόδου στην περίοδο 1, ο (n − 1) όρος στην περίοδο 2 κτλ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3: ***Το άθροισμα των όρων μιας αριθμητικής προόδου***

Περίοδος	1	2	...	n − 1	n
S_n	a	a + d	...	a + (n − 2)d	a + (n − 1)d
S_n	a + (n − 1)d	a + (n − 2)d		a + d	a
$2S_n$	2a + (n − 1)d	2a + (n − 1)d		2a + (n − 1)d	2a + (n − 1)d

Στην τέταρτη γραμμή του πίνακα βρίσκεται το άθροισμα των όρων της δεύτερης και της τρίτης γραμμής που αντιστοιχούν στο κάθε κελί. Παρατηρείται ότι το άθροισμα αυτό είναι το ίδιο για κάθε κελί και παίρνει την τιμή 2a + (n − 1)d. Επομένως, το άθροισμα των n αυτών όρων ισούται με $2S_n = n[2a + (n - 1)d]$. Έτσι το άθροισμα των πρώτων n όρων της αριθμητικής προόδου δίδεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

Ας θεωρήσουμε ότι το L προσδιορίζει τον τελευταίο όρο της προόδου. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να βρεθεί το άθροισμα των πρώτων n όρων δίδεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{n}{2}[a + L]$$

Παράδειγμα:

Ποιο θα είναι το εισόδημα του τραπεζικού στα πρώτα 11 χρόνια της δουλειάς του;

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2 \times 40.000 + (11 - 1)1.000] = € \, 495.000$$

Εναλλακτικά, $S_{11} = \frac{11}{2}[40.000 + 50.000] = € \, 495.000$

Σημειώνεται ότι ο τελευταίος όρος της προόδου θα πρέπει να προσδιορισθεί πριν εφαρμοστεί ο τελευταίος τύπος.

2.16.2 Γεωμετρικές πρόοδοι (Geometric progressions)

Παραδείγματα:

1. Ένα ποσό των € 100 κατατίθεται σε τράπεζα η οποία προσφέρει επιτόκιο 10% (r = 10%). Όπως βλέπουμε στον πίνακα 2.4, το συνολικό (ανατοκιζόμενο) ποσό του λογαριασμού κλιμακώνεται ως εξής: 100, 110, 121, 133,1 146,41, ... Κάθε ένα από τα ποσά αυτά προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας το προηγούμενο ποσό με τη σταθερά $(1+0{,}1)=1{,}1$. Ισοδύναμα, το πηλίκο μεταξύ των διαδοχικών όρων ισούται με τη σταθερά 1,1. Το παράδειγμα αυτό αντιπροσωπεύει μία γεωμετρική πρόοδο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4: ***Εξέλιξη ποσού σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, r = 10%***

Περίοδος	0	1	2	3	4	...
Ποσό	100	110	121	133,1	146,41	...

2. Ας υποθέσουμε ότι ο μισθός του τραπεζικού υπαλλήλου αυξάνεται κατά 2,5% κάθε χρόνο και όχι κατά το σταθερό ποσό των € 1000, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Έτσι, όπως βλέπουμε στον πίνακα 2.5 ο αρχικός μισθός των € 40000 κλιμακώνεται ως εξής: 40000, 41000, 42025, 43075,63,...

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5: ***Εξέλιξη μισθού τραπεζικού υπαλλήλου***

Περίοδος	0	1	2	3	..
Ποσό	40000	41000	42025	43075,63	..

Το πηλίκο μεταξύ των διαδοχικών όρων ισούται με τη σταθερά 1,025

Ονομάζοντας το σταθερό πηλίκο μεταξύ των διαδοχικών όρων της προόδου ***κοινό λόγο (common ratio)*** (r), και εκφράζοντας ως a τον πρώτο όρο της προόδου, τότε ο πίνακας 2.6 περιγράφει μία γεωμετρική πρόοδο:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.6: ***Οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου***

Περίοδος	1	2	3	4	...	n
Όρος Γ.Π	a	ar	ar^2	ar^3	...	ar^{n-1}

Ο n τύπος του παραπάνω πίνακα μπορεί να εφαρμοστεί στα δεδομένα του παραδείγματος που είδαμε, προκειμένου να εκτιμηθεί το ανατοκιζόμενο ποσό για κάθε συγκεκριμένο έτος (είτε για το παράδειγμα που αναφέρεται στο ποσό που κατατίθεται στην τράπεζα, είτε για τον μισθό του τραπεζικού υπαλλήλου). Έτσι το τελικό ποσό που θα βρίσκεται στον τραπεζικό λογαριασμό μετά από 10 χρόνια θα ισούται με: $100(1,1)^{(10-1)} =$ € 235, 79. Επίσης, ο μισθός του τραπεζικού μετά από 11 χρόνια θα είναι: $40000(1{,}025)^{(11-1)} =$ € 51.203,38

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα αποτελεί ο υπολογισμός του αθροίσματος των πρώτων n όρων της γεωμετρικής προόδου. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το συνολικό ποσό που θα εισπράξει ο τραπεζικός στα πρώτα 10 χρόνια της δουλειάς του. Ο πίνακας 2.7 χρησιμοποιείται προκειμένου να εξαχθεί ο γενικός τύπος, ο οποίος προσδιορίζει το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.7: ***Το άθροισμα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου***

Περίοδος	1	2	3	...	n	n + 1
S_n	a	ar	ar^2	...	ar^{n-1}	
$r\,S_n$		ar	ar^2	...	ar^{n-1}	ar^n
$rS_n - S_n$	−a	0	0	...	0	ar^n

Η πρώτη γραμμή του πίνακα 2.7 παρουσιάζει τις χρονικές περιόδους και η δεύτερη γραμμή δείχνει τους όρους της γεωμετρικής προόδου που αντιστοιχούν σε κάθε χρονική περίοδο. Επίσης, στην τρίτη γραμμή, κάθε όρος της προόδου που βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή του πίνακα πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα r και το αποτέλεσμα το μεταφέρει μια περίοδο μπροστά. Έτσι, ο πρώτος όρος της προόδου αντιστοιχεί

στην περίοδο 2, ο δεύτερος στην περίοδο 3 και ούτω καθεξής. Τέλος, η τέταρτη γραμμή υπολογίζει τη διαφορά μεταξύ της τρίτης και της δεύτερης γραμμής. Επομένως, προσθέτοντας όλους τους όρους, προκύπτει: $rS_n - S_n = ar^n - a$. Θεωρώντας $S_n(r-1) = a(r^n - 1)$ και λύνοντας ως προς S_n προκύπτει ο παρακάτω τύπος, ο οποίος δίνει το άθροισμα των πρώτων n όρων της γεωμετρικής προόδου:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Παράδειγμα:

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εκτιμηθεί το συνολικό εισόδημα που θα εισπράξει ο τραπεζικός τα πρώτα 11 χρόνια της δουλειάς του. Επομένως, το συνολικό εισόδημα εκτιμάται ως εξής:

$$S_{11} = \frac{a(r^{11} - 1)}{r - 1} = \frac{40000(1{,}025^{11} - 1)}{1{,}025 - 1} = € 499.338{,}65$$

Με το ***Excel*** μπορούν να υπολογιστούν διάφορες πρόοδοι πολύ εύκολα. Το Γράφημα 2.1 παρουσιάζει σε πίνακα, ο οποίος δημιουργείται στο Excel, τις σειρές που εξετάστηκαν στα προηγούμενα παραδείγματα. Στη στήλη A παρουσιάζονται οι χρονικές περίοδοι και στη γραμμή 7 εισάγεται η διαφορά, d, ή ο λόγος (common ratio), r, της προόδου. Ο πρώτος όρος της σειράς εισάγεται στη γραμμή 9 (περίοδος 1). Σημειώνεται ότι εάν γνωρίζουμε στον τύπο της προόδου, τον πρώτο όρο και τον παράγοντα d ή r, ανάλογα με την ακολουθία αριθμητική ή γεωμετρική, τότε τα στοιχεία αυτά επαρκούν για να υπολογίσουμε την πρόοδο.

Ξεκινώντας με την αριθμητική πρόοδο που παρουσιάζεται στη στήλη B, βλέπουμε ότι d = 1000 και βρίσκεται στο κελί b7, καθώς επίσης a = 40000 και βρίσκεται στο κελί b9. Τότε, στο κελί b10 ο τύπος = ***b9+b7***, παράγει την τιμή 41000, για τη χρονική περίοδο 2. Όταν ο τύπος αυτός αντιγράφεται στο επόμενο κελί (μέσω της εντολής ***Edit/Copy, Edit/Paste***), τότε στο κελί b11 θα υπάρχει ο τύπος = ***b10+b7***. Επομένως, η τιμή για τη χρονική περίοδο 3 προκύπτει προσθέτοντας στην τιμή της χρονικής περιόδου 2, που βρίσκεται στο κελί b10, την τιμή d = 1000, που βρίσκεται στο κελί b7. Το πρώτο μέρος του τύπου, δηλαδή το b10, το οποίο διαφοροποιείται από κελί σε κελί, γράφεται στο Excel ως ***σχετική αναφορά (relative address)***. Το δεύτερο μέρος του τύπου δηλαδή το b7 γράφεται ως ***απόλυτη αναφορά (absolute address)***. Τοποθετώντας το σήμα $ μπροστά από τη στήλη b, όπως επίσης μπροστά από την γραμμή 7, έχει ως αποτέλεσμα να μη μεταβάλλεται ο παράγοντας αυτός καθώς αντιγράφεται ο τύπος από κελί σε κελί. Έχοντας κατασκευάσει το σωστό τύπο, τον αντιγράφουμε από κελί σε κελί και έτσι υπολογίζουμε τις τιμές για όλες τις χρονικές περιόδους που μας ενδιαφέρουν. Στον πίνακα αυτό οι όροι της προόδου είναι 11 και αντιστοιχούν σε 11 χρονικές περιόδους. Το άθροισμα των 11 όρων της προόδου δείχνουν το συνολικό εισόδημα του τραπεζικού στα πρώτα 11 χρόνια της δουλειάς του. Το συνολικό αυτό αποτέλεσμα υπολογίζεται στο κελί b20 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση = ***sum(b9:b19)***. Με αυτό τον τρόπο το Excel επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα που είχαμε βρεί, εφαρμόζοντας τους αναλυτικούς τύπους.

Πρέπει να επισημανθεί ότι, καθώς δημιουργούνται οι διάφοροι τύποι στο Excel, προκειμένου να προκύψουν οι διάφοροι όροι της αριθμητικής προόδου, οποιοσδήποτε από τους παράγοντες a ή d (που είναι στα κελιά b9 ή b7 αντίστοιχα) και αν μεταβληθεί, θα μεταβληθούν αντίστοιχα όλοι οι όροι της προόδου στον πίνακα.

Οι στήλες C και D στο Excel χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστούν οι όροι της γεωμετρικής προόδου. Έτσι, η στήλη C δείχνει πώς κλιμακώνεται ο μισθός του τραπεζικού υπαλλήλου κάθε περίοδο, εάν αυξάνεται ο μισθός του κατά 2,5% κάθε έτος, ξεκινώντας από € 40000. Το κοινό πηλίκο της προόδου, r = 1,025, τοποθετείται στο κελί c7, και ο πρώτος όρος a = 40000 στο κελί c9. Ο μισθός για τη δεύτερη χρονική περίοδο υπολογίζεται στο κελί c10 μέσω του τύπου = c9*c$7. Σημειώνεται ότι, στον παραπάνω τύπο ο παράγοντας c9 μεταβάλεται μεταξύ των στηλών και των γραμμών, ενώ ο παράγοντας c$7 μεταβάλλεται μεταξύ των στηλών, αλλά διατηρείται σταθερός μεταξύ των γραμμών. Αυτό συμβαίνει επειδή θέλουμε να δημιουργήσουμε μία παρόμοια γεωμετρική πρόοδο στη στήλη D και έτσι αντιγράφουμε τον τύπο από την στήλη C στην D. Αρχικά αντιγράφουμε τον τύπο στις υπόλοιπες γραμμές

και προκύπτει ο μισθός του τραπεζικού σε κάθε χρονική περίοδο μέχρι το χρόνο 11. Εν συνεχεία, το συνολικό εισόδημα εκτιμάται στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Η στήλη D χρησιμοποιείται για να παρουσιάσει τη δεύτερη γεωμετρική πρόοδο, που εξετάστηκε προηγουμένως. Στο παράδειγμα αυτό, υποθέτουμε ότι κατατίθεται το ποσό των € 100 σε ένα λογαριασμό, με επιτόκιο 10%. Η μόνη διαφορά στην πρόοδο αυτή σε σχέση με εκείνη της στήλης D είναι ότι, στην περίπτωση αυτή ο πρώτος όρος a = 100 και το κοινό πηλίκο r = 1,1. Είναι πολύ απλό να γίνει αντιγραφή των τύπων c5:c14 με d5:d14 στη στήλη D, προκειμένου να παραχθούν οι όροι της νέας γεωμετρικής προόδου μέσω των εντολών ***Edit|Copy, c10:c19, Edit|Paste|d10:d19***

ΓΡΑΦΗΜΑ 2.1: ***Κατασκευή αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων στο Excel***

	A	B	C	D
1				
2	Κατασκευή Αριθμητικών Προόδων (ΑΠ) και Γεωμετρικών Προόδων (ΓΠ) στο Excel			
3				
4		Αριθμητική Πρόοδος	Γεωμετρική Πρόοδος	Γεωμετρική Πρόοδος
5		=a+(n-1)*d	=a*r^(n-1)	=a*r^(n-1)
6	Διαφορά (d) ή Λόγος (r) της προόδου	d	r	r
7		1000	1.025	1.1
8	Περίοδος	ΑΠ (a=40000, d=1000)	ΓΠ (a=40000, r=1.025)	ΓΠ (a=100, r=1.1)
9	1	40000	40000.00	100.00
10	2	41000	41000.00	110.00
11	3	42000	42025.00	121.00
12	4	43000	43075.63	133.10
13	5	44000	44152.52	146.41
14	6	45000	45256.33	161.05
15	7	46000	46387.74	177.16
16	8	47000	47547.43	194.87
17	9	48000	48736.12	214.36
18	10	49000	49954.52	235.79
19	11	50000	51203.38	259.37
20	Άθροισμα Όρων	495000	€ 499,338.65	€ 1,853.12
21				
22				
23				
24				
25				

2.17 Γραφήματα - Διαγράμματα (Graphs)

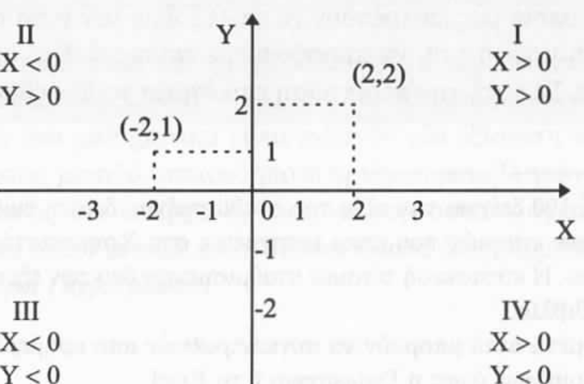
Το ***Καρτεσιανό επίπεδο (Cartesian plane)*** είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή ένα ζευγάρι από διαβαθμισμένες ευθείες γραμμές, ας πούμε X και Y, οι οποίες σχηματίζουν μία ορθή γωνία μεταξύ τους (90°) (Βλέπε διάγραμμα 2.2). Αυτές διαιρούν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, τα οποία είναι αριθμημένα από I έως IV καθώς μετακινούμαστε αντίστροφα της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Το σημείο τομής των αξόνων ονομάζεται αρχή των αξόνων.

Το Καρτεσιανό επίπεδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί ένα σημείο σε αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τις συντεταγμένες (coordinates) του σημείου (X,Y). Έτσι για το σημείο με συντεταγμένες (X,Y), X είναι η ***τετμημένη (abscissa)*** ή ***X-συντεταγμένη (X-coordinate)***, και Y είναι η ***τεταγμένη (ordinate)*** ή ***Y-συντεταγμένη***. Όταν χρησιμοποιείται το ίδιο μοναδιαίο μέτρο επί των δύο αξόνων το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα.

Παράδειγμα:

Δύο σημεία τοποθετούνται στο καρτεσιανό επίπεδο του Διαγράμματος 2.2. Το σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο έχει X-συντεταγμένη 2 και Y-συντεταγμένη 2. Σε συντομία, $(X, Y) = (2, 2)$. Το σημείο στο δεύτερο τεταρτημόριο έχει τετμημένη -2 και τεταγμένη 1. Σε συντομία, $(X, Y) = (-2, 1)$.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.2: ***Το Καρτεσιανό επίπεδο (Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων)***



Οι σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών, μπορούν να εκφραστούν μέσω μαθηματικών εξισώσεων, και αυτές στη συνέχεια μπορούν να απεικονιστούν γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο, ως ένα (συνεχές) σύνολο σημείων. Θα δούμε μερικά παραδείγματα στο επόμενο κεφάλαιο.

Σε ένα ειδικό τύπο γραφήματος, το οποίο ονομάζεται ***γράφημα χρονολογικών σειρών (time-series graph)***, ο οριζόντιος άξονας (X) μετράει το χρόνο. Σε ένα τέτοιο γράφημα εμφανίζεται η εξέλιξη της μεταβλητής Y διαχρονικά (ως συνάρτηση του χρόνου).

Παράδειγμα:

Ο ρυθμός του πληθωρισμού ή της ανεργίας στην Ελλάδα, από το 1945 έως 2004, μπορεί να παρουσιαστεί μέσω ενός γραφήματος χρονολογικών σειρών. Το γράφημα χρονολογικής σειράς του δείκτη[4] FTSE100 σε μηνιαία βάση, από τον Ιανουάριο του 1990 έως τον Νοέμβριο του 1997, απεικονίζεται στο Γράφημα 2.2.

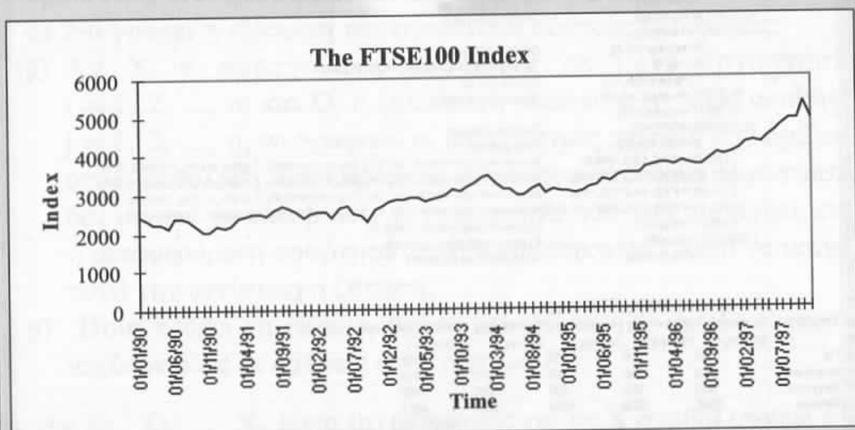
Το διάγραμμα μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας τον οδηγό γραφημάτων (***chart-wizard***) στο ***Excel***. Αρχικά μαυρίζουμε την περιοχή όπου βρίσκονται τα δεδομένα[5] στο φύλλο εργασίας. Ας θεωρήσουμε ότι οι ημερομηνίες ανά μήνα (θα μετρηθούν στον οριζόντιο άξονα) είναι στα κελιά a1 έως a96 και οι τιμές του FTSE100 (θα μετρηθούν στον κάθετο άξονα) είναι στα κελιά b1 έως b96. Ο οδηγός διαγραμμάτων ενεργοποιείται μέσω της εντολής ***Insert|Chart***. Εναλλακτικά, επιλέγουμε το εικονίδιο του διαγράμματος από το δεξί κουμπί του ποντικιού και εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου του οδηγού γραφημάτων. Άλλα τέσσερα βήματα ακολουθούν, τα οποία μας επιτρέπουν να επιλέξουμε τον τύπο του διαγράμματος, τη μορφή του, να προσθέσουμε επικεφαλίδες, ονόματα αξόνων κ.λπ. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγεται το line chart option και

[4] Ο FTSE 100 δείχνει την αξία του σταθμισμένου δείκτη τιμών των 100 μεγαλυτέρων εταιριών που είναι εισηγμένες στο Χρηματιστήριο Αξιών του Λονδίνου. Η κατασκευή τέτοιων σταθμισμένων δεικτών εξετάζεται αργότερα στο βιβλίο.

[5] Τα δεδομένα αυτά μπορούν να συγκεντρωθούν από εφημερίδες, ή από βάσεις δεδομένων, όπως η Datastream ή το Extel.

παράγεται το ακόλουθο διάγραμμα χρονολογικής σειράς του δείκτη FTSE100. Ο οριζόντιος άξονας κλιμακώνεται ως προς το χρόνο σε μήνες, ενώ ο κάθετος άξονας καταγράφει τις τιμές του δείκτη για κάθε μήνα.

ΓΡΑΦΗΜΑ 2.2: *Χρονολογική σειρά του δείκτη FTSE100*



Υπάρχει η δυνατότητα στο Excel να δημιουργήσουμε περισσότερους από έναν δείκτες στο ίδιο διάγραμμα χρονολογικών σειρών. Αυτό είναι χρήσιμο όταν απαιτείται η διαχρονική σύγκριση της εξέλιξης δύο ή περισσότερων χρονολογικών σειρών. Όπως θα δούμε, σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου αυτό είναι πολύ εύκολο να γίνει στο Excel.

Σχέσεις μεταξύ τριών μεταβλητών μπορεί να παρουσιαστούν γραφικά σε ένα σύνολο τριών αξόνων, που αντιπροσωπεύουν το χώρο. Ωστόσο, ενώ στα μαθηματικά είναι πιθανόν μία εξίσωση να αντιπροσωπεύει σχέσεις μεταξύ οποιουδήποτε αριθμού μεταβλητών, σε γραφικές παραστάσεις δεν υπάρχει τρόπος να εκφραστούν σχέσεις μεταξύ περισσότερων από 3 μεταβλητές. Τέτοια ιδεατά διαγράμματα ονομάζονται ***υπερ-χώροι (hyperplanes)***

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Χρήσιμες μαθηματικές και χρηματοοικονομικές συναρτήσεις στο Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Μερικές Συναρτήσεις του Excel, Μαθηματικές και Χρηματοοικονομικές					
2	4.84321	4.84	=round(a2,2)		Στρογγυλοποίηση Αριθμών	
3		4	=int(a2)		Ακέραιο μέρος αριθμού	
4	-6	6	=abs(a4)		Απόλυτη τιμή	
5		2.1548109	=sqrt(a2)		Τετραγωνική ρίζα	
6		#NUM!	=sqrt(a4)			
7		36	=power(a4,2)		Δύναμη αριθμού	
8		36	=a4^2		Το αντίστοιχο του παραπάνω σε εξίσωση	
9	27	3	=power(a9,1/3)		3η ρίζα του 27	
10		25.84321	=sum(a2,a4,a9)		Τελεστής άθροισης	
11		13.28321	=sum(a2:b4)			
12	3	20.0855369	=EXP(a12)		Εκθετική δύναμη	
13	3	6	=FACT(A13)		Παραγοντικό	
14		£121.00	= FV(0.1,2,0,-100,0)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 1 φορά το έτος, επιτόκιο 10%	
15		£121.55	= FV(0.1/2,2*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 2 φορές το έτος, επιτόκιο 10%	
16		£121.84	= FV(0.1/4,4*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 4 φορές το έτος, επιτόκιο 10%	
17		£122.14	= FV(0.1/365,365*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός ημερησίως, επιτόκιο 10%	
18	5	0.69897	=log(a18)		Κανονικός λογάριθμος, βάση 10	
19		1.60943791	=ln(a18)		Φυσικός λογάριθμος, βάση e	
20		1	=log(a18,5)		Λογάριθμος με βάση το 5	
21						
22						
23		Παράδειγμα διπλής άθροισης				
24	Υπολογισμός συνολικού κόστους γεωργικής επιχείρησης στους τελευταίους 4 μήνες					
25		Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3	Μήνας 4	Σύνολο
26	Γη	50	55	54	52	211
27	Κεφάλαιο	250	300	360	200	1110
28	Εργατικά	900	850	800	1000	3550
29	Σύνολο	1200	1205	1214	1252	4871
30						=sum(h7:k7)
31						

Ασκήσεις για λύση

1) Εάν $2x + 4(x + 4y) = 2y - 2(x + y)$, να γραφεί το y ως συνάρτηση του x.

2) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $y = x^2x^3/x^6$.

3) Ποιες τιμές του x ικανοποιούν τις εξισώσεις.

- $3x = 2$
- $5x^{-1} = 3$
- $6x - 2 = 0$
- $3x^2 - 3 = 0$
- $3x^2 + 2x - 4 = 0$
- $(3 + x) - (3x^2 + 2x - 4) = 0$
- $5(3 - x) = x/(x + 2)$

- $|x| = 4$
- $|x - 2| = 4$

4) Έστω m εργοστάσια κατασκευής ενός προϊόντος και n αποθήκες διανομής των προϊόντων. Αν με $Q_{ij}(i = 1, 2, ..., m$ και $j = 1, 2, ..., n)$ συμβολίζεται η ποσότητα που μεταφέρεται από το εργοστάσιο i στην αποθήκη j και με C_{ij} το αντίστοιχο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος, τότε χρησιμοποιώντας τελεστές άθροισης.

α) Να γραφεί η εξίσωση του συνολικού κόστους μεταφοράς.

β) Αν X_i η παραγόμενη ποσότητα σε κάθε εργοστάσιο $i = 1, 2, ..., m$ και D_j η ζητούμενη ποσότητα σε κάθε αποθήκη $j = 1, 2, ..., n$, να γραφούν οι μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν ότι η συνολική μεταφερόμενη ποσότητα από κάθε εργοστάσιο δεν μπορεί να υπερβαίνει την ποσότητα που έχει παραχθεί, ενώ η μεταφερόμενη ποσότητα σε κάθε αποθήκη θα πρέπει να ικανοποιεί την αντίστοιχη ζήτηση.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των X_i και D_j ώστε να ισχύουν όλες οι σχέσεις στο ερώτημα (β);

5) Αν $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι (n) μετρήσεις και με $\overline{X}$ συμβολίσουμε τον μέσο όρο των μετρήσεων:

α) Να γραφεί ο τύπος που υπολογίζει τον μέσο όρο.

β) Να αποδειχτεί ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2$$

6) Η διακύμανση (S^2) των n μετρήσεων $X_1, X_2, ..., X_n$ γύρω από το μέσο όρο τους $(\overline{X})$ δίνεται από τον τύπο

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n - 1}$$

Να δειχτεί ότι ένας εναλλακτικός τύπος υπολογισμού της διακύμανσης είναι:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n-1} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

7) Η κατανομή πιθανοτήτων μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι ένας πίνακας με όλες τις τιμές της μεταβλητής X_i και των πιθανοτήτων $P(X_i)$ να λάβει κάθε μια από τις τιμές αυτές. Για παράδειγμα, η κατανομή πιθανότητας να συμβεί κεφάλι σε δυο ρίψεις ενός νομίσματος παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα.

X_i	$P(X_i)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Η αναμενόμενη τιμή ή μέση τιμή ή μαθηματική ελπίδα {E(X)} της μεταβλητής X υπολογίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου

$$\mu \equiv E(X) = \sum_i X_i P(X_i) \quad \text{όπου} \quad \sum_i P(X_i) = 1$$

ενώ η διακύμανση $\{\sigma^2 \equiv V(X)\}$ υπολογίζεται ως:

$$\sigma^2 \equiv V(X) = E[X_i - E(X)]^2 = \sum_i [X_i - E(X)]^2 P(X_i)$$

$$= E(X_i^2) - [E(X)]^2 = \sum_i X_i^2 P(X_i) - [E(X)]^2$$

Να υπολογιστούν: Ο μέσος αριθμός της μεταβλητής «κεφάλι» και η διακύμανση της μεταβλητής στις δυο ρίψεις του νομίσματος. Προσοχή η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης ονομάζεται τυπική απόκλιση, και είναι εκφρασμένη στη μονάδα μέτρησης της μεταβλητής.

8) Ο ακόλουθος πίνακας αποτελεί ένα παράδειγμα μιας διμεταβλητής κατανομής. Καταγράφει τις πιθανές τιμές δυο μεταβλητών (X, Y, στα περιθώρια του πίνακα) που έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους και την από κοινού πιθανότητα {P(X,Y), στο εσωτερικό του πίνακα} να λάβουν ταυτόχρονα τις τιμές τους, όπως παρουσιάζονται στο πάνω και στο αριστερό περιθώριο του πίνακα. Στον πίνακα οι μεταβλητές αναφέρονται στην απόδοση (Y = 8,5%, 11,5% και 17,5%) και στον κίνδυνο (X = 1, 2, 3) που ενέχουν οι ομολογίες – αναμένεται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος των ομολογιών τόσο υψηλότερη θα πρέπει να είναι η απόδοση που έχουν ώστε να αποζημιώνονται οι επενδυτές από τον επιπλέον κίνδυνο που αναλαμβάνουν αγοράζοντας τις ομολογίες. Η τιμή 0,26 στο κελί (1,1) στο εσωτερικό του πίνακα αναφέρεται στην πιθανότητα να λάβουν ταυτόχρονα οι μεταβλητές X και Y τις τιμές 1 και 8,5 αντίστοιχα. Δηλαδή η πιθανότητα μια ομολογία να έχει κίνδυνο επιπέδου 1 και απόδοση 8,5% είναι P(X = 1, Y = 8,5) = 0,26 ή 26%.

Y%	Κίνδυνος (X)			Σύνολο P(Y)
	1	2	3	
8,5	0,26 = P(X = 1, Y = 8,5)	0,10	0,00	0,36
11,5	0,04	0,28	0,04	0,36=P(Y=11,5)
17,5	0,00	0,02	0,26	0,28
Σύνολο, P(X)	0,30	0,40 = P(X = 2)	0,30	1,00

Η τελευταία στήλη του πίνακα αναφέρεται στην πιθανότητα να λάβει η μεταβλητή Y κάθε μια από τις τιμές της (8,5, 11,5 και 17,5) που φαίνονται στην αριστερή –πρώτη– στήλη του πίνακα, ανεξάρτητα από τις τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή X. Υπολογίζεται ως το άθροισμα των από κοινού πιθανοτήτων, της X με την Y, αθροίζοντας οριζοντίως. Έτσι, η πιθανότητα επενδυτής να λάβει απόδοση 11,5% από τη διακράτηση ομολογιών παντός κινδύνου είναι 36%, 0,36 = P(Y = 11,5). Η τελευταία σειρά του πίνακα αναφέρεται στην πιθανότητα να λάβει η μεταβλητή X τις πιθανές τιμές της (1, 2 και 3) που φαίνονται στην πρώτη σειρά του πίνακα. Έτσι, η πιθανότητα οι ομολογίες επενδυτή να έχουν κίνδυνο ύψους 2 από τη

διακράτηση τους ανεξάρτητα της απόδοσής τους είναι 40%, $0{,}40 = P(X = 2)$.

Η μέση τιμή και διακύμανση της μεταβλητής X που ακολουθεί διμεταβλητή κατανομή υπολογίζεται ως:

Μέση τιμή του X:

$$\mu_X \equiv E(X) = \sum_X \sum_Y X_{ij} P(X_i, Y_j) = \sum_X X_i P(X_i)$$

Διακύμανση του X:

$$V(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_X \sum_Y (X_{ij} - \mu_X)^2 P(X_i, Y_j) = \sum_X (X_i - \mu_X)^2 P(X_i)$$

Η σχέση μεταξύ των μεταβλητών X και Y μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ακόλουθου συντελεστή **συνδιακύμανσης:**

$$C(X, Y) \equiv \sigma_{XY} = E\{[X_i - E(X)][Y_j - E(Y)]\}$$
$$= \sum_X \sum_Y (x_i - \mu_X)(Y_j - \mu_Y) P(X_i, Y_j)$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= \sum_X \sum_Y X_i Y_j P(X_i, Y_j) - \mu_X \mu_Y$$

όπου $-\infty < \sigma_{XY} < +\infty$. Όταν $\sigma_{XY} > 0$ υπάρχει θετική σχέση μεταξύ των μεταβλητών (κινούνται ταυτόχρονα ανοδικά ή καθοδικά). Όταν $\sigma_{XY} < 0$ υπάρχει αρνητική σχέση μεταξύ των μεταβλητών (κινούνται αντίστροφα μεταξύ τους). Όταν $\sigma_{XY} = 0$ δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών.

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, να υπολογιστούν: Η μέση τιμή, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του X και του Y και η συνδιακύμανση τους.

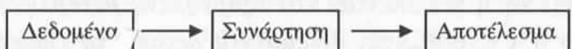
3 Συναρτήσεις (Functions)

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε κάποια παραδείγματα απλών συναρτήσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τους ορισμούς και θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται περισσότερο στην οικονομική και επιχειρησιακή ανάλυση.

Μία συνάρτηση εκφράζει μία μαθηματική σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι είναι ένας μηχανισμός ***εισόδου-εξόδου (input-output)*** σύμφωνα με τον οποίο, ένα σύνολο δεδομένων τοποθετούνται σε έναν μαθηματικό τύπο έτσι ώστε αυτά να μετατρέπονται σε αποτέλεσμα. Σχηματικά η συνάρτηση απεικονίζεται στο Διάγραμμα 3.1.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.1: ***Σχηματική απεικόνιση συναρτήσεων***



Με μαθηματικούς όρους μια συνάρτηση εκφράζεται ως $y = f(x)$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι ο παράγοντας y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x (ή ότι ο παράγοντας y προσδιορίζεται από τη μεταβλητή x). Διαφορετικά, μπορούμε να πούμε ότι $f: x \rightarrow y$, το οποίο διαβάζουμε: οι τιμές του x απεικονίζονται στις τιμές του y μέσω της f.

Παράδειγμα:

Η ποσότητα που πωλείται από ένα προϊόν y (για παράδειγμα φράουλες) εξαρτάται από την τιμή τους, x.

Πεδίο ορισμού (domain) μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x.

Πεδίο τιμών (range) μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των τιμών του y.

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τη μεταβλητή y για δεδομένες τιμές της μεταβλητής x θα πρέπει να προσδιορίσουμε το συναρτησιακό τύπο (functional form) – f(x) που συνδέει τις μεταβλητές αυτές. Υπάρχουν διάφοροι τύποι συναρτήσεων, μερικοί από τους οποίους θα εξεταστούν σε επόμενα τμήματα του κεφαλαίου. Αρχικά, ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα αντιστοίχησης τιμών x στην y μέσω της f.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = 100 - 5x$, η οποία συσχετίζει την πωλούμενη ποσότητα με την τιμή για φράουλες. Επίσης, δίνονται οι τιμές 6, 8, 10, που εκφράζουν τις τιμές πώλησης για φράουλες και ζητείται να βρεθεί η πωλούμενη ποσότητα. Οπότε έχουμε:

$$x = 6: \quad y = 100 - 5(6) = 70$$
$$x = 8: \quad y = 100 - 5(8) = 60$$
$$x = 10: \quad y = 100 - 5(10) = 50$$

Η παραπάνω συνάρτηση δείχνει ότι στην αγορά για φράουλες η πωλούμενη ποσότητα y συσχετίζεται αρνητικά με την τιμή του προϊόντος. Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνο με τη θεωρία της ζήτησης στα οικονομικά, σύμφωνα με την οποία, όταν η τιμή ενός προϊόντος αυξάνεται (μειώνεται) η πωλούμενη ποσότητα μειώνεται (αυξάνεται). Δηλαδή, υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ τιμής και ζήτησης. Στην παραπάνω σχέση η y καλείται και ***εξαρτημένη μεταβλητή (dependent variable)*** ενώ η x ονομάζεται ***ανεξάρτητη μεταβλητή (independent variable)***.

Στην πραγματικότητα βέβαια, οι πωλήσεις για φράουλες δεν εξαρτώνται μόνο από την τιμή τους αλλά και από άλλους παράγοντες, όπως τις τιμές των άλλων φρούτων (x_1), το εισόδημα των καταναλωτών (x_2), και από τις καιρικές συνθήκες (x_3). Εκφράζοντας τους παράγοντες αυτούς σε μαθηματικούς όρους έχουμε τη νέα σχέση $y = f(x_1, x_2, x_3)$, η οποία καθορίζει τη ζήτηση για φράουλες. Τέτοιου είδους συναρτήσεις καλούνται ***πολυμεταβλητές συναρτήσεις (multivariate functions)***.

Γενικότερα, οι συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν με τρεις διαφορετικές μορφές: Η πρώτη μορφή αναφέρεται στις ***μαθηματικές εξισώσεις (mathematical equation)***, η δεύτερη μορφή εκφράζεται μέσω ***πινάκων (table form)*** και η τρίτη αφορά στις ***γραφικές παραστάσεις (graphical form)***. Στα επόμενα τμήματα του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν διάφορες μορφές συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις τρεις διαφορετικές μορφές, καθώς επίσης και διάφορα παραδείγματα που δείχνουν τη χρησιμοποίηση των συναρτήσεων αυτών στην περιγραφή οικονομικών και επιχειρησιακών προβλημάτων. Στην πορεία θα δούμε πως η χρήση του λογισμικού Excel, διευκολύνει τη γρήγορη δημιουργία και παρουσίαση των σχέσεων αυτών, στις τρεις διαφορετικές μορφές τους.

3.2 Σταθερές συναρτήσεις (Constant functions)

Η γενική μαθηματική εξίσωση η οποία περιγράφει συναρτήσεις σταθερής μορφής γράφεται ως:

$$y = k$$

Σε μία σταθερή συνάρτηση, για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x, η τιμή της μεταβλητής y δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή παραμένει σταθερή. Για παράδειγμα, τα ***σταθερά κόστη (fixed costs)*** μιας επιχείρησης αφορούν τα αρχικά κόστη που πραγματοποιήθηκαν, προκειμένου η επιχείρηση να ξεκινήσει τις επιχειρηματικές τις δραστηριότητες. Τα κόστη αυτά δεν μεταβάλλονται με την εξέλιξη της παραγωγικής διαδικασίας.

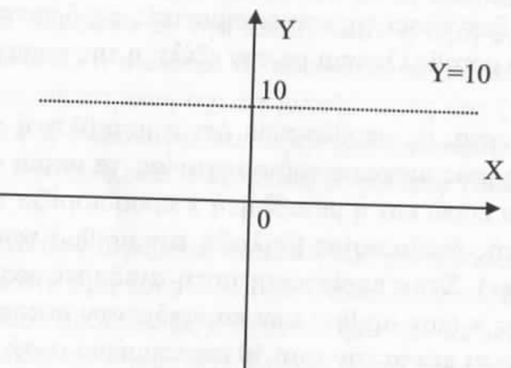
Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή y εκφράζει τα σταθερά κόστη μιας αυτοκινητοβιομηχανίας, τα οποία ανέρχονται σε 10 εκατομμύρια ευρώ και η μεταβλητή x προσδιορίζει το αποτέλεσμα της παραγωγικής διαδικασίας (δηλαδή τον αριθμό των αυτοκινήτων που παράγονται). Στην περίπτωση αυτή ανεξαρτήτως από την τιμή της μεταβλητής x (τον αριθμό των παραγόμενων αυτοκινήτων), η μεταβλητή y παίρνει πάντα την τιμή 10 εκατομμύρια ευρώ, δεδομένου ότι η μεταβλητή αυτή εκφράζει τα αρχικά κόστη της επιχείρησης που πραγματοποιούνται με την ίδρυσή της. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται από τη συνάρτηση που απεικονίζεται σε μορφή πίνακα στον Πίνακα 3.1. Αυτός ο πίνακας παρουσιάζει τις τιμές της μεταβλητής y για τις διαφορετικές τιμές της μεταβλητής x.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1: ***Η συνάρτηση Y = 10, υπό μορφή πίνακα***

Y (Fixed costs in € mill)	X (Car Production)
10	0
10	5
10	20
10	22

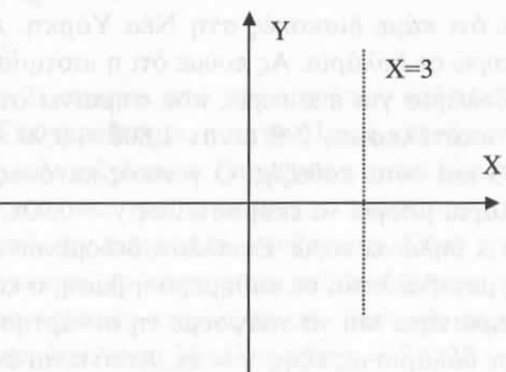
Γραφικά, η σταθερή συνάρτηση αντιπροσωπεύεται από μία ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα των x, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο k = 10. Το Διάγραμμα 3.2 παρουσιάζει τη σταθερή συνάρτηση Y = 10, η οποία εκφράζει το κόστος ίδρυσης της αυτοκινητοβιομηχανίας, σε μορφή γραφήματος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.2: ***Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης Y = 10***



Σημειωτέον, ότι για την επίλυση επιχειρησιακών και οικονομικών προβλημάτων με πραγματικά δεδομένα, συνήθως, χρησιμοποιούμε θετικούς αριθμούς. Έτσι, χρησιμοποιούμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου για να παρουσιάσουμε τις σχέσεις μεταξύ των x και y.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.3: ***Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης X = 3***



Η συνάρτηση x = k εκφράζει ένα άλλο παράδειγμα σταθερής συνάρτησης. Γραφικά απεικονίζεται από μια ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα των y και η οποία τέμνει τον άξονα των x στο σημείο k. Το Διάγραμμα 3.3 απεικονίζει τη σταθερή συνάρτηση X = 3

3.2.1 Οριακά έσοδα (Marginal revenue)

Τα ***συνολικά έσοδα (total revenue)*** (TR), από την πώληση κάποιου προϊόντος υπολογίζονται από το συνολικό αριθμό των πωλούμενων μονάδων (x), επί την τιμή πώλησης του προϊόντος (y), TR = yx. Τα ***οριακά έσοδα (marginal revenue) (MR),*** προσδιορίζονται ως τα επιπλέον έσοδα από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας του παραγόμενου προϊόντος. Εάν η τιμή του προϊόντος παραμένει η ίδια για όλες τις μονάδες του πωληθέντος προϊόντος, τότε το οριακό έσοδο είναι σταθερό στο δεδομένο επίπεδο τιμών. Έτσι, MR = y = Σταθερό. Η περίπτωση αυτή ισχύει, συνήθως, υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού στην αγορά, οπότε η συνάρτηση ζήτησης είναι οριζόντια ευθεία, στο επίπεδο της τιμής ισορροπίας και τα οριακά έσοδα συμπίπτουν με τη ζήτηση. Μαθηματικά, τα οριακά έσοδα αντιπροσωπεύονται από μια σταθερή συνάρτηση και γραφικά από μία οριζόντια γραμμή.

3.3 Γραμμικές συναρτήσεις (Linear functions)

Ας υποθέσουμε ότι πάμε διακοπές στη Νέα Υόρκη. Απαιτείται να ανταλλάξουμε ευρώ σε δολάρια. Ας πούμε ότι η ισοτιμία συναλλάγματος είναι 0,90 δολάρια για ένα ευρώ, που σημαίνει ότι 1 € = 0,90$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, 2 € είναι 1,80$ = 0,90 × 2, 3 € είναι 2,70$ = 0,90 × 3 και ούτω καθεξής. Ο γενικός κανόνας που μετατρέπει ευρώ σε δολάρια μπορεί να εκφραστεί ως $y = 0,90x$, όπου y δηλώνει δολάρια και x δηλώνει ευρώ. Επιπλέον, δεδομένου ότι η ισοτιμία συναλλάγματος μεταβάλλεται σε καθημερινή βάση, ο κανόνας μπορεί να γενικευθεί περαιτέρω και να γράψουμε τη συνάρτηση η οποία μετατρέπει ευρώ σε δολάρια ως εξής: $y = ax$. Αυτό είναι ένα παράδειγμα γραμμικής συνάρτησης. Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι ο ανταλλακτικός οργανισμός (π.χ. η τράπεζα) χρεώνει κατά την ανταλλαγή μια σταθερή προμήθεια, η οποία ισούται με 2 ευρώ. Ισοδύναμα, € 2 = 0,90 × 2 € = 1,80$. Λαμβάνοντας υπόψη την προμήθεια αυτή θα πρέπει να προσαρμόσουμε την εξίσωση που μας δίνει το τελικό ποσό σε δολάρια ως εξής: $y = -1,80 + 0,90x$. Γενικότερα, $y = c + ax$, όπου $c = -1,80$, $a = 0,90$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Το παραπάνω αποτελεί άλλο ένα παράδειγμα γραμμικής συνάρτησης. Στη συνέχεια εξετάζουμε αναλυτικότερα τις συναρτήσεις αυτής της μορφής.

Η γενική μαθηματική εξίσωση της γραμμικής συνάρτησης προσδιορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$y = ax + c$$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη δύναμη της μεταβλητής x είναι η μονάδα. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ευθείες γραμμές, των οποίων η θέση εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή κλίσης ***(slope coefficient) (a)***, και την τιμή της σταθεράς ***(intercept) (c)***. Έτσι έχουμε: Όταν το

- $a = 0$ η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα των x – σταθερή συνάρτηση
- $a > 0$ η ευθεία έχει κλίση προς τα πάνω (upward sloping) (από τα αριστερά στα δεξιά)
- $a < 0$ η ευθεία έχει κλίση προς τα κάτω (downward sloping) (από τα αριστερά στα δεξιά)
- $c = 0$ η ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του συντελεστή κλίσης, a, τόσο πιο απότομη κλίση έχει η ευθεία.

Παραδείγματα:

1. Η ευθεία $y = 2x$ περνάει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση προς τα πάνω. Για παράδειγμα, η κατανάλωση καυσίμων ενός ταχύπλοου είναι 2 € ανά μίλι ταξιδιού, x. Επομένως η κατανάλωση του καυσίμου συσχετίζεται θετικά και γραμμικά με την απόσταση του ταξιδιού και περιγράφεται από την παραπάνω συνάρτηση. Όταν η απόσταση του ταξιδιού είναι γνωστή, το κόστος του ταξιδιού μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξίσωση. Έτσι για παράδειγμα, εάν η απόσταση του ταξιδιού είναι 10 μίλια, τότε $y = 2 \times 10 =$ € 20, κ.λπ.

2. Η ευθεία $y = 4x$ περνάει επίσης από την αρχή των αξόνων, η κλίση της είναι προς τα επάνω και είναι δύο φορές πιο απότομη από την κλίση της ευθείας $y = 2x$. Για παράδειγμα, η κατανάλωση καυσίμων ενός άλλου ταχύπλοου είναι € 4, ανά μίλι ταξιδιού, x. Επομένως, το κόστος του ταξιδιού συσχετίζεται θετικά και γραμμικά με την απόσταση και είναι δύο φορές υψηλότερο σε σχέση με το κόστος του προηγούμενου ταχύπλοου.

3. Η ευθεία $y = -2x + 10$ έχει αρνητική κλίση και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο 10. Η ευθεία αυτή αντιπροσωπεύει την εξίσωση της καμπύλης ζήτησης για ένα προϊόν και δείχνει ότι για κάθε μονάδα αύξησης (μείωσης) των τιμών του παραγόμενου προϊόντος αντιστοιχούν δύο μονάδες μείωσης (αύξησης) της ζητούμενης ποσότητας.

Οι μαθηματικές αυτές συναρτήσεις, που αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές, μπορούν να αναπαρασταθούν στο Excel σε πίνακες (table form), καθώς επίσης και σε γραφικές παραστάσεις (graphical form). Ας εξετάσουμε τις ευθείες που παρουσιάστηκαν στα πρώτα δύο παραδείγματα, και για αντιπαραβολή την ευθεία με εξίσωση $y = -2x$.

Αρχικά, τιμές στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων δημιουργούνται στη στήλη A του φύλλου εργασίας (worksheet) που βλέπουμε στο Γράφημα 3.1. Αυτό μπορεί να γίνει εισάγοντας δύο τιμές από το πεδίο ορισμού, ας πούμε τις −4, −3 στα κελιά a9 και a10 αντίστοιχα. Εν συνεχεία, μαρκάρουμε τα κελιά και προτείνοντας το ποντίκι στην κάτω δεξιά γωνία της μαυρισμένης περιοχής, τραβάμε το πο-

ντίκι μαυρίζοντας έως το κελί a17. Αυτή η ενέργεια θα τοποθετήσει στα κελιά a9 με a17 αριθμούς που αυξάνονται κατά 1.[1] Στη συνέχεια, τιμές για τα πεδία τιμών της συναρτήσεων y = 2x, y = 4x και y = −2x, της γενικής μορφής y = ax, απαιτείται να δημιουργηθούν σε ξεχωριστές στήλες, ας πούμε στις στήλες B, C και D, αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι ο συντελεστής κλίσης a της εξίσωσης καθορίζει τη συγκεκριμένη μορφή της πρωτοβάθμιας εξίσωσης. Για το λόγο αυτό στη σειρά 6 του φύλλου εργασίας ορίζονται οι τιμές του a = 2, 4 και −2, στα κελιά b6, c6 και d6. Στις αντίστοιχες στήλες δημιουργούνται τιμές για τα πεδία τιμών των συναρτήσεων ως εξής: Εισάγεται ο τύπος *=b$6*$a9* στο κελί b9, ο οποίος δημιουργεί την τιμή −8 στο πεδίο τιμών της y = 2x. Το σύμβολο $ μπροστά από το 6 στο μέρος b$6 του παραπάνω τύπου διατηρεί την τιμή 2 σταθερή όταν μετακινούμαστε καθέτως στο φύλλο εργασίας, ενώ της επιτρέπει να αλλάξει όταν μετακινούμαστε οριζοντίως. Το σύμβολο $ μπροστά από το a στο μέρος $a9 του τύπου διατηρεί την στήλη A σταθερή όταν μετακινούμαστε οριζοντίως στο φύλλο εργασίας, ενώ της επιτρέπει να αλλάξει όταν μετακινούμαστε καθέτως. Όταν λοιπόν αντιγράψουμε τον τύπο του κελιού b9 καθέτως δημιουργούνται οι τιμές που βλέπουμε στα κελιά b9 έως b17 στο πεδίο τιμών της συνάρτησης y = 2x. Η αντιγραφή του τύπου στα κελιά b9 έως b17 πραγματοποιείται μαρκάροντας από την κάτω δεξιά γωνία του κελιού b9 και σύροντας προς τα κάτω στο b17.[2] Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιούνται οι τιμές εισόδου από το a9 έως το a17 προκειμένου να υπολογιστούν οι αντίστοιχες τιμές του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Ομοίως, τιμές των πεδίων τιμών των συναρτήσεων y = 4x και y = −2x δημιουργούνται στις στήλες C και D στα κελιά c9 έως d17. Αυτό μπορεί να γίνει μαρκάροντας τα κελιά b9 με b17 στη στήλη B και έχοντας τοποθετήσει το

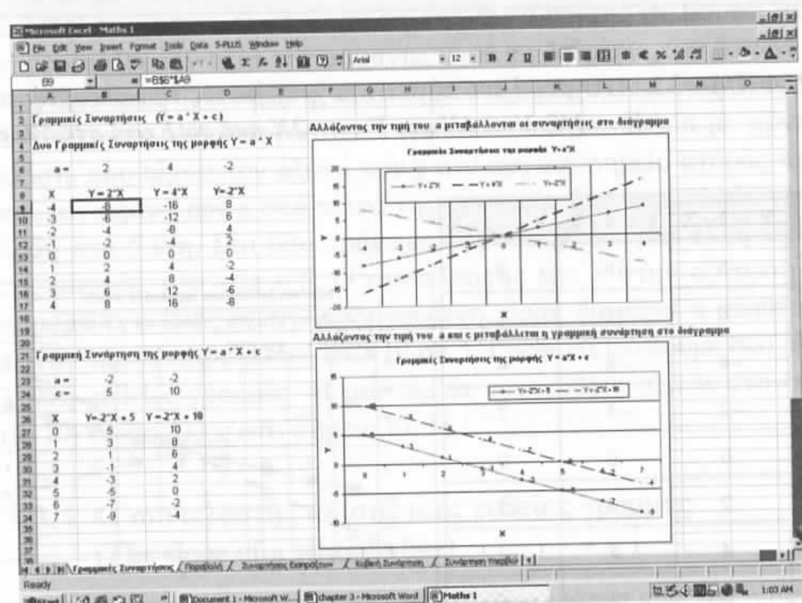
[1] Εναλλακτικά, εισάγουμε την πρώτη τιμή της σειράς, −4, στο κελί a9 και επιλέγουμε: Edit/Fill/Series/Columns-Linear-Step Value = 1-Stop Value = 4

[2] Εναλλακτικά θα πάμε στο κελί b9 και επιλέγουμε από το μενού την εντολή ***Edit/Copy.*** Αυτή η πράξη αντιγράφει τον τύπο στη μνήμη. Τότε μαυρίζουμε την περιοχή που θέλουμε να τοποθετήσουμε τον τύπο, στην περίπτωση αυτή τα κελιά από b10 έως b17. Στη συνέχεια, διαλέγουμε από το μενού την εντολή ***Edit/Paste,*** προκειμένου να τοποθετήσουμε το περιεχόμενο της μνήμης στα κελιά b10 έως b17.

ποντίκι στην κάτω δεξιά πλευρά της περιοχής αυτής σύρουμε το ποντίκι προς τις δύο διπλανές στήλες οριζοντίως. Οι συναρτήσεις που προκύπτουν σε μορφή πίνακα, των δύο εξισώσεων, y = 4x και y = −2x, παρουσιάζονται στο φύλλο εργασίας[3].

Τα περιεχόμενα των κελιών a8 έως d17 μπορούν τότε να χρησιμοποιηθούν ως τιμές εισόδου (input values) στον οδηγό γραφημάτων του Excel, για να δημιουργηθούν οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Για να χρησιμοποιήσουμε τον οδηγό γραφημάτων, πρώτα επιλέγουμε τα κελιά a8 έως d17, και έπειτα επιλέγουμε το εικονίδιο του οδηγού γραφημάτων. Στο παράθυρο που εμφανίζεται διαλέγουμε το κατάλληλο γράφημα από την επιλογή ***chart type*** και τότε ορίζουμε τον επιθυμητό τύπο γραφήματος, επιλέγοντας το διάγραμμα που αρμόζει στο πρόβλημα από την επιλογή ***chart sub-type***

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.1: ***Απεικόνιση γραμμικών συναρτήσεων με χρήση Excel***

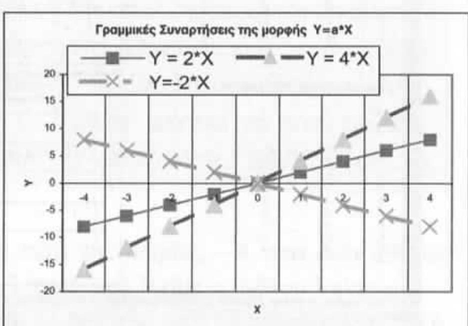


[3] Σημειώνεται ότι οι αρνητικές τιμές του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων δεν συσχετίζονται με τα επιχειρησιακά και τα οικονομικά προβλήματα και συνεπώς θα πρέπει να βασιστούμε στο πρώτο τεταρτημόριο του Καρτεσιανού επιπέδου για τέτοιου είδους προβλήματα.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα επιθυμούσαμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα γραμμή (Line chart). Έτσι, επιλέγουμε ***Line*** από την επιλογή ***chart type***. Προκειμένου να διαλέξουμε τον πιο κατάλληλο τύπο γραφήματος, το Excel μας επιτρέπει να εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο τύπο επιλέγοντας την ετικέτα ***Press and hold to view sample.*** Έχοντας επιλέξει τον τύπο γραφήματος, μπορούμε να προχωρήσουμε στα επόμενα τρία βήματα του οδηγού γραφημάτων, που μας δίνουν τη δυνατότητα να επιλέξουμε ονόματα για τους άξονες, να εισάγουμε τίτλους, να προσθέσουμε υπομνήματα κοκ. Έτσι δημιουργήθηκαν και παρουσιάστηκαν στο φύλλο εργασίας του Γραφήματος 3.1 τα διαγράμματα που βλέπουμε των γραμμών y = 2x, y = 4x και y = −2x. Με ευκολία μπορούμε να διαλέξουμε την αντιγραφή από το Excel και επικόλληση στο Word του πίνακα και του γραφήματος που έχουμε δημιουργήσει. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται ξεχωριστά στο Γράφημα 3.2

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.2: ***Αντιγραφή του πίνακα και γραφήματος των συναρτήσεων Y = 2X, Y = 4X και Y = −2X από το Excel στο Word***

X	Y = 2 * X	Y = 4 * X	Y = −2 * X
−4	−8	−16	8
−3	−6	−12	6
−2	−4	−8	4
−1	−2	−4	2
0	0	0	0
1	2	4	−2
2	4	8	−4
3	6	12	−6
4	8	16	−8



Όπως φαίνεται, οι δυο ευθείες y = 2x και y = 4x έχουν θετική κλίση, αφού ο συντελεστής του x και στις δυο περιπτώσεις είναι θετικός

και διέρχονται από την αρχή των αξόνων (το σημείο (0, 0)), καθώς η σταθερά της εξίσωσης (c) και στις δυο περιπτώσεις είναι μηδέν. Περαιτέρω, η ευθεία y = 4x έχει διπλάσια κλίση από την ευθεία y = 2x, αφού ο συντελεστής κλίσης της πρώτης είναι διπλάσιος από το δεύτερο. Αυτό, φαίνεται, επίσης, στον πίνακα των τιμών, όπου για κάθε τιμή της x, οι απόλυτες τιμές στο πεδίο τιμών της y = 4x, είναι διπλάσιες από αυτές του πεδίου τιμών της συνάρτησης 2x. Τέλος η γραμμή με εξίσωση y = −2x έχει αρνητική κλίση, δεδομένου ότι ο συντελεστής του x είναι αρνητικός αριθμός, ο −2.

Ο πίνακας και η γραφική παράσταση της ευθείας, με αρνητική κλίση y = −2x + 10, που εξετάστηκε στο παράδειγμα 3 προηγουμένως, βρίσκεται στο κάτω τμήμα του φύλλου εργασίας του Excel στο Γράφημα 3.1.

Η συνάρτηση αυτή, στο πεδίο ορισμού των θετικών αριθμών 0 έως 5, θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει την αξία της μεταβαλλόμενης ***χρονικής διάρκειας ζωής μιας εργοστασιακής μηχανής***. Το αρχικό κόστος −αγοράς− στο χρόνο 0, είναι € 10.000 και υποτιμάται γραμμικά, κατά € 2.000 το χρόνο. Η απεικόνιση της συνάρτησης σε μορφή πίνακα παρουσιάζει την αξία της μηχανής κατά τη διάρκεια των 5 ετών ζωής της. Στο έτος 1 (x = 1) η αξία της είναι € 8.000, το έτος 3 κοστίζει € 4.000, κοκ. Αυτό παρίσταται γραφικά από μια ευθεία με αρνητική κλίση, που τέμνει τον άξονα των y στο αρχικό σημείο αγοράς των 10, και τον άξονα των x στο τέλος της χρονικής διάρκειας ζωής της, δηλαδή στα 5 έτη. Στο ίδιο γράφημα παρουσιάζεται μια άλλη εξίσωση της μορφής y = −2x + 5. Ο συντελεστής του x στην εξίσωση αυτή παραμένει ο ίδιος με την προηγούμενη, όμως διαφέρει η σταθερά της εξίσωσης. Μεταβάλλεται από 10 σε 5. Γραφικά βλέπουμε δύο παράλληλες ευθείες γραμμές. Η μια τέμνει τον κάθετο άξονα στο σημείο (0, 10) ενώ η άλλη στο σημείο (0, 5).

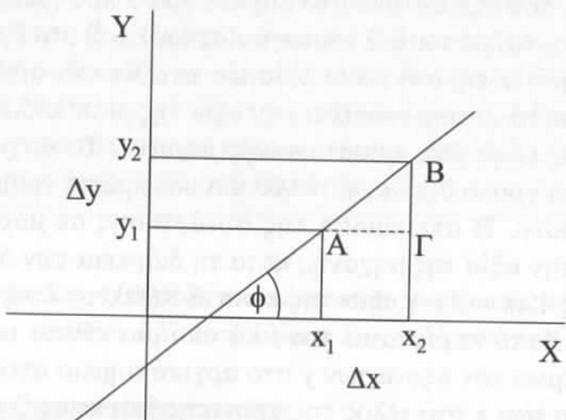
3.3.1 Ο συντελεστής κλίσης μιας ευθείας γραμμής (The slope of a straight line)

Ο συντελεστής κλίσης (slope coefficient) μιας ευθείας γραμμής, y = ax + c, ορίζεται ως η μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής y όταν μεταβάλλεται η τιμή της μεταβλητής x κατά μία μονάδα. Εναλλακτικά, λαμβάνοντας υπόψη δύο σημεία μιας ευθείας γραμμής (όπως αυτή που παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.4), έχουμε $A = (x_1, y_1)$ και

$B = (x_2, y_2)$. Ο συντελεστής κλίσης της ευθείας γραμμής μπορεί να προσδιορισθεί, μέσω αυτών των σημείων, ως η μεταβολή στο y ($= y_2 - y_1 = \Delta y$) για μεταβολές στο x ($= x_2 - x_1 = \Delta x$), καθώς μετακινούμαστε επί της ευθείας, από το σημείο Α στο σημείο Β. Μαθηματικά εκφρασμένος, ο συντελεστής κλίσης ορίζεται ως:

$$a = \Delta y/\Delta x = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.4: ***Η έννοια του συντελεστή κλίσης γραφικά***



Σημειώνεται ότι για να προσδιορισθεί ο συντελεστής κλίσης θα πρέπει $x_1 \neq x_2$ (η ευθεία θα πρέπει να μην είναι κάθετη). Ο δείκτης $\Delta y/\Delta x$ αντιπροσωπεύει την ***εφαπτομένη (tangent)*** (μέτρηση της γωνίας, φ) με τον άξονα των x. Επομένως έχουμε, $\tan(\varphi) = \Delta y/\Delta x = a$.

Παραδείγματα:

1. Ο συντελεστής κλίσης της ευθείας γραμμής $y = 2x$ μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα και δείχνει κατά πόσο μεταβάλλεται το y όταν μεταβάλλεται το x κατά μία μονάδα. Έτσι, όταν το x μεταβάλλεται από 2 σε 3 το y μεταβάλλεται από 4 σε 6. Επομένως, $a = (6-4)/(3-2) = 2 = \text{εφ}(\varphi)$ μετράει την κλίση της ευθείας γραμμής. Βλέπουμε ότι, όταν μεταβάλλεται το x κατά μία μονάδα, το y μεταβάλλεται κατά δύο μονάδες. Για το πλοίο, του προηγούμενου παραδείγματος 1, ο συντελεστής κλίσης δείχνει ότι η κατανάλωση καυσίμων ανά μίλι ταξιδιού είναι € 2. Για το πλοίο του παραδείγματος 2 η κατανάλωση καυσίμου ανά μίλι είναι € 4

2. Ο συντελεστής κλίσης της γραμμής $y = -2x + 10$, μπορεί να μετρηθεί από το λόγο a ενώ μετακινούμαστε κατά μήκος της ευθείας, από το σημείο (2,6), στο σημείο (3,4); $a = (4-6)/(3-2) = -2$. Επομένως, η γραμμή αυτή έχει αρνητική κλίση, με συντελεστή κλίσης -2

Εάν λάβουμε υπόψη μας οποιουσδήποτε άλλους συνδυασμούς σημείων της ευθείας γραμμής και υπολογίσουμε το συντελεστή κλίσης (a) θα διαπιστώσουμε ότι ο τελευταίος παραμένει σταθερός. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μετακινούμαστε από το σημείο (5, 0) στο (6, −2) κατά μήκος της ευθείας γραμμής. Σε αυτήν την περίπτωση ο συντελεστής κλίσης εκτιμάται ως $a = (-2-0)/(6-5) = -2$, δηλαδή παραμένει ο ίδιος όπως και πριν.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιαδήποτε ευθεία γραμμή. Δηλαδή ο συντελεστής κλίσης οποιασδήποτε ευθείας γραμμής παραμένει σταθερός σε όλα τα σημεία της.

- Δύο διαφορετικές ευθείες γραμμές με τον ίδιο συντελεστή κλίσης ονομάζονται παράλληλες ευθείες (parallel lines), όπως για παράδειγμα οι ευθείες $y = -2x + 10$ και $y = -2x + 5$ στο γράφημα 3.1.
- Εάν ο συντελεστής κλίσης μίας ευθείας γραμμής είναι α και ο συντελεστής κλίσης μίας άλλης είναι $-1/a$, τότε οι δύο ευθείες σχηματίζουν ορθή γωνία (right angle) (90°). Δηλαδή είναι ***κάθετες (perpendicular)*** μεταξύ τους.

Δύο σημεία επαρκούν για να προσδιορισθεί επακριβώς μία ευθεία γραμμή. Δηλαδή δύο σημεία είναι αρκετά για να προσδιορίσουν την ευθεία γραμμή που περνάει από αυτά. Η ιδέα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να απεικονίσουμε μία ευθεία γραμμή σε χαρτί χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Παράδειγμα:

Με βάση την εξίσωση $y = -2x + 10$, ένα σημείο της ευθείας γραμμής μπορεί να προσδιοριστεί θέτοντας όπου $x = 0$, και επομένως $y = 10$. Άρα η ευθεία περνάει από το σημείο (0, 10). Μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή για το x, για παράδειγμα, $x = 1$, άρα $y = 8$. Το δεύτερο σημείο είναι (1, 8). Τα δύο αυτά σημεία μπορούν να τοποθετηθούν στο Καρτεσιανό επίπεδο. Έτσι μία μοναδική ευθεία

γραμμή περνάει από αυτά, η οποία αντιπροσωπεύεται μαθηματικά από την παραπάνω εξίσωση. Γραφικά μπορεί να χαρακτεί συνδέοντας τα δύο σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα και επεκτείνοντάς το προς τα αριστερά και δεξιά.

Σημειώνεται ότι για να βρούμε το σημείο τομής (point of intersection) της ευθείας γραμμής με τον άξονα των x, θέτουμε y = 0 και λύνουμε την εξίσωση. Επομένως, λύνοντας την εξίσωση έχουμε $0 = -2x + 10$, άρα $x = 5$

3.3.2 Η εξίσωση μίας ευθείας γραμμής η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ευθεία γραμμή η οποία περνάει από δύο γνωστά σημεία, τα (x_1, y_1) και (x_2, y_2) όπως στο διάγραμμα 3.4. Η εξίσωση που περιγράφει την ευθεία γραμμή η οποία περνάει από τα σημεία αυτά είναι:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ή} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Παραδείγματα:

1. Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι τα (2, 4) και (3, 6), αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τα σημεία αυτά στον παραπάνω τύπο έχουμε:

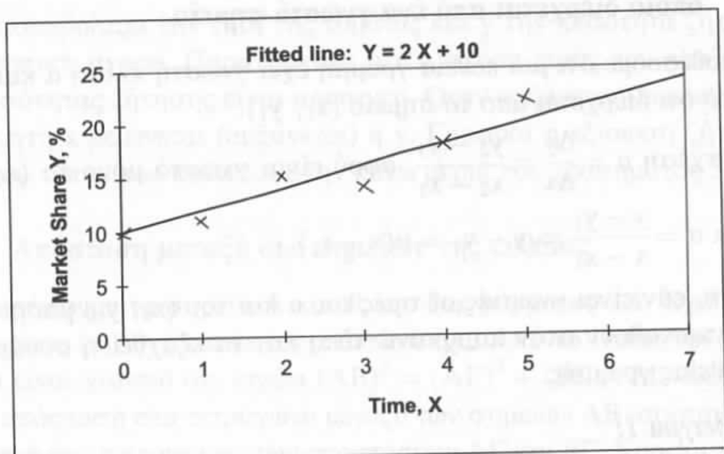
$$\frac{y-4}{6-4} = \frac{x-2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{y-4}{2} = \frac{x-2}{1} \Leftrightarrow (y-4) = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x$$

2. Το Γράφημα 3.3 παρουσιάζει το μερίδιο αγοράς (market share) μίας αεροπορικής εταιρείας ως ποσοστό, για τη χρονική περίοδο 1999-2004 (0-5), το οποίο έχει ως εξής: 10, 11, 15, 14, 18, 22. Τα σημεία αυτά απεικονίζονται στο γράφημα με ένα σταυρό. Για παράδειγμα, η ευθεία γραμμή που παρουσιάζεται στο γράφημα εκφράζει το πώς το μερίδιο αγοράς της αεροπορικής εταιρίας εξελίχτηκε από την ίδρυσή της.

1. Ποια είναι η εξίσωση που αντιστοιχεί στην ευθεία γραμμή αυτή;

2. Με δεδομένη την εξίσωση που αντιστοιχεί σε αυτήν την ευθεία γραμμή, ποιο είναι το αναμενόμενο μερίδιο αγοράς της αεροπορικής εταιρίας για το έτος 2005 (όταν x = 7);

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.3: ***Το μερίδιο αγοράς αεροπορικής εταιρείας, διαχρονικά***



Απαντήσεις:

1. *Λαμβάνουμε υπόψη τα σημεία (1999, 10) και (2003, 18) ή ισοδύναμα τα (0, 10) και (4, 18), τα οποία φαίνεται να είναι πιο κοντά στην ευθεία* ***γραμμή προσέγγισης (fitted line).*** *Τα σημεία αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία περνάει από αυτά. Αντικαθιστώντας στο γνωστό τύπο, προκύπτει:*

$$\frac{y-10}{18-10} = \frac{x-0}{4-0} \Leftrightarrow \frac{y-10}{8} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow 4(y-10) = 8x \Leftrightarrow y = 2x + 10$$

Βλέπουμε ότι το αρχικό μερίδιο αγοράς της αεροπορικής εταιρείας ήταν 10% το 1999 και αυξήθηκε κατά μέσο όρο 2% το χρόνο. Σημειώνεται ότι η εξίσωση αυτή αποτελεί μόνο μία προσέγγιση και δεν είναι απαραίτητα η ιδανικότερη ευθεία γραμμή η οποία μπορεί να εκτιμηθεί με βάση αυτά τα δεδομένα. Αυτό μπορεί να συμβεί επειδή χρησιμοποιήθηκαν μόνο δύο παρατηρήσεις προκειμένου να εκτιμηθεί η ευθεία γραμμή, και μπορεί να μην αποτελούν τις ιδανικότερες τιμές που μπορούν χρησιμοποιηθούν. Παρόλα αυτά, υπάρχουν διάφορες μαθηματικές μέθοδοι που μπορούν να εφαρμοστούν και οι οποίες χρησιμοποιούν ανάλυση παλινδρόμησης, έτσι ώστε να βρεθεί η ιδανικότερη γραμμή με βάση τα δεδομένα.

2. *Το μερίδιο αγοράς για το έτος 2005 (όπου x = 7) είναι: $y = 2(7) + 10 = 24$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από το γράφημα, εξετάζοντας την τιμή του y όταν x = 7*

3.3.3 Η εξίσωση μιας ευθείας γραμμής με γνωστή κλίση και η οποία διέρχεται από ένα γνωστό σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία γραμμή έχει γνωστή κλίση α και είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1).

Η σχέση $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, αφού είναι γνωστό μόνο το (x_1, y_1),

γίνεται $\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \alpha(x - x_1)$

Έτσι, εάν είναι γνωστές οι τιμές του α και του (x_1, y_1) μπορούν να αντικατασταθούν στον παραπάνω τύπο και να εξαχθεί η συνάρτηση της ευθείας γραμμής.

Παράδειγμα 1:

Ευθεία γραμμή έχει συντελεστή κλίσης 3 και διέρχεται από το σημείο (2, 8). Η εξίσωση της ευθείας γραμμής μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο, όπου $\alpha = 3$ και $(x_1, y_1) = (2, 8)$. Έτσι έχουμε $y - 8 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x + 2$

Παράδειγμα 2:

Ένας έμπορος λαχανικών στην τοπική αγορά παρατηρεί ότι όταν η τιμή για τομάτες είναι 2 €/κιλό η ζήτηση κάθε Τετάρτη διαμορφώνεται στα 4 κιλά. Επίσης, παρατηρώντας τις αντιδράσεις των καταναλωτών στις τελευταίες 5 εβδομάδες παρατηρεί ότι κατά μέσο όρο όταν αυξομειώνεται η τιμή της τομάτας κατά 1 € η ποσότητα που ζητείται μεταβάλεται αντιστρόφως ανάλογα με την τιμή κατά 2 κιλά, και αντιστρόφως, για αύξηση της τιμής της τομάτας. Να εξαχθεί η γραμμική εξίσωση που να περιγράφει τη ζήτηση για τομάτες στην τοπική αγορά ως συνάρτηση της τιμής της τομάτας.

Απάντηση:

Η εξίσωση ζήτησης για τομάτες είναι ευθεία γραμμή, όπου $y = y_1 + \alpha(x - x_1)$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος η μεταβολή στην ποσότητα ζήτησης (Δy) για μεταβολές στην τιμή (Δx) είναι $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha = -2$. Επίσης, ένα σημείο της ευθείας ζήτησης είναι $(x_1, y_1) = (2, 4)$. Αντικαθιστώντας στον τύπο λαμβάνουμε την εξίσωση ζήτησης για τομάτες στην τοπική αγορά

$$y = 4 + (-2)(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 8$$

όπου x συμβολίζει την τιμή της τομάτας και y την ποσότητα ζήτησης στην τοπική αγορά. Παρατηρείται ότι η σχέση τιμής του προϊόντος και ποσότητας ζήτησης είναι αρνητική. Όταν αυξάνεται (μειώνεται) η μεταβλητή x μειώνεται (αυξάνεται) η y. Γραφικά η εξίσωση ζήτησης είναι του τύπου που φαίνεται στην κάτω μεριά του γραφήματος 3.1.

3.3.4 Απόσταση μεταξύ δύο σημείων της ευθείας

Ας θεωρήσουμε τα σημεία Α και Β του διαγράμματος 3.4. Έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι γνωστό ότι ισχύει $(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2$. Με άλλα λόγια, η απόσταση στο τετράγωνο μεταξύ των σημείων ΑΒ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων ΑΓ και ΒΓ. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των σημείων και συμβολίζοντας την απόσταση που μας ενδιαφέρει με $d \equiv AB$ λαμβάνουμε:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παράδειγμα:

Η απόσταση μεταξύ των σημείων $A = (1, 15)$ και $B = (2, 25)$ της εξίσωσης $y = 10x + 5$ είναι:

$$d = \sqrt{(25 - 15)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{101} = 10{,}05$$

3.4 Περισσότερες εφαρμογές

3.4.1 Υπολογισμός κόστους (Cost calculation)

Μία εταιρεία ενοικιάσεως αυτοκινήτων διαθέτει 10 ίδια αυτοκίνητα. Η τιμή αγοράς κάθε αυτοκινήτου είναι € 15.000 και εκτιμάται ότι το μέσο λειτουργικό κόστος, συμπεριλαμβάνοντας και τις αποσβέσεις, ανέρχεται σε € 0,50 ανά χιλιόμετρο.

1. Να γραφεί μία μαθηματική εξίσωση η οποία να περιγράφει το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος κάθε αυτοκινήτου.

2. Να αξιολογηθεί το κόστος του κάθε αυτοκινήτου για την εταιρεία εάν κάθε ένα από αυτά τα αυτοκίνητα πραγματοποιεί 40.000 χιλιόμετρα.

3. Ποιό είναι το συνολικό κόστος των 10 αυτοκινήτων για την επιχείρηση (κόστος κτήσης και λειτουργίας), δεδομένου ότι το κάθε ένα πραγματοποιεί 40.000 χιλιόμετρα;

Απαντήσεις:

Ας συμβολίσουμε y και x το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος, και τον αριθμό των χιλιομέτρων που έχει διανύσει ένα αυτοκίνητο, αντίστοιχα.

1. *Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει το κόστος κτήσης και το λειτουργικό κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από αυτά τα αυτοκίνητα λαμβάνει τη μορφή:*

$$y = 15.000 + 0{,}5x$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η αρχική δαπάνη για κάθε αυτοκίνητο ανέρχεται σε €15.000 και το κόστος, για κάθε χιλιόμετρο που διανύεται από κάθε ένα αυτοκίνητο, ανέρχεται σε €0,5. Επομένως, το συνολικό κόστος του κάθε αυτοκινήτου μπορεί να εκτιμηθεί λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των χιλιομέτρων (x), που έχει διανύσει κάθε αυτοκίνητο.

2. *Εάν $x = 40.000$, τότε $y = 15.000 + 0{,}5 \cdot 40.000 = €35.000$*

Στο Excel μπορούν για παράδειγμα να κατασκευασθούν εύκολα πίνακες, που να προσομοιώνουν τα διαφορετικά κόστη που αφορούν διαφορετικές χιλιομετρικές αποστάσεις που έχει διανύσει το κάθε αυτοκίνητο.

3. *Το συνολικό κόστος κτήσης και λειτουργίας (για 40.000 χιλιόμετρα) των 10 αυτοκινήτων ανέρχεται σε €350.000*

3.4.2 Πρόβλημα εφοδιαστικής αλυσίδας (A logistics problem)

Η χωρητικότητα ενός φορτηγού πλοίου, το οποίο μεταφέρει τρία διαφορετικά φορτία είναι 30.000 τόνοι. Οι παλέτες των μήλων είναι 200 τόνοι η κάθε μία, οι παλέτες με τις πατάτες είναι 300 τόνοι η κάθε μία και οι παλέτες με τις μπανάνες είναι 250 τόνοι η κάθε μία.

1. Ποιος συνδυασμός από τα τρία προϊόντα εξαντλεί τη χωρητικότητα του πλοίου;

2. Εάν μεταφέρονται μόνο μήλα, πόσες παλέτες μήλων μπορούν να μεταφερθούν;

Απαντήσεις:

1. *Ας θεωρήσουμε ότι οι X, Y και Z δηλώνουν τις παλέτες των μήλων, τις παλέτες με τις πατάτες και τις παλέτες με τις μπανάνες, αντίστοιχα. Τότε:*

$$200X + 300Y + 250Z = 30.000$$

Αυτό αποτελεί παράδειγμα μιας γραμμικής (η δύναμη στην οποία είναι υψωμένες και οι τρεις μεταβλητές είναι το ένα) εξίσωσης με τρεις μεταβλητές.

2. *Δεδομένου ότι $Y = 0$, $Z = 0$, $200X = 30.000$. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε ότι: $X = 30.000/200 = 150$ παλέτες μήλων.*

3.4.3 Ένα επενδυτικό πρόβλημα (An investment problem)

Ένας επενδυτής διαθέτει € 6.000 τα οποία πρόκειται να επενδύσει σε τέσσερις διαφορετικές μετοχές. Οι τιμές των μετοχών αυτών ανέρχονται σε € 1,5, € 0,8, € 3,9 και € 8. Ποιος συνδυασμός μετοχών θα εξαντλήσει τα € 6000;

Απάντηση:

$$1{,}5X_1 + 0{,}8X_2 + 3{,}9X_3 + 8X_4 = 6000$$

3.4.4 Ένα πρόβλημα καταμερισμού διαλέξεων στις διαθέσιμες αίθουσες (A room allocation problem)

Ας υποθέσουμε ότι οι πανεπιστημιακές διαλέξεις διακρίνονται σε τέσσερις διαφορετικούς τύπους, ανάλογα με τη χρονική διάρκεια τους. Έτσι, υπάρχουν διαλέξεις που διαρκούν 1, 1,5, 2 και 3 ώρες. Ο συνολικός αριθμός ωρών που μπορούν να πραγματοποιηθούν στις αίθουσες διδασκαλίας το κάθε εξάμηνο είναι 4.800. Η ακόλουθη εξίσωση καθορίζει τους διάφορους συνδυασμούς των διαλέξεων έτσι ώστε να συμπληρωθεί η δυναμικότητα όλων των αιθουσών:

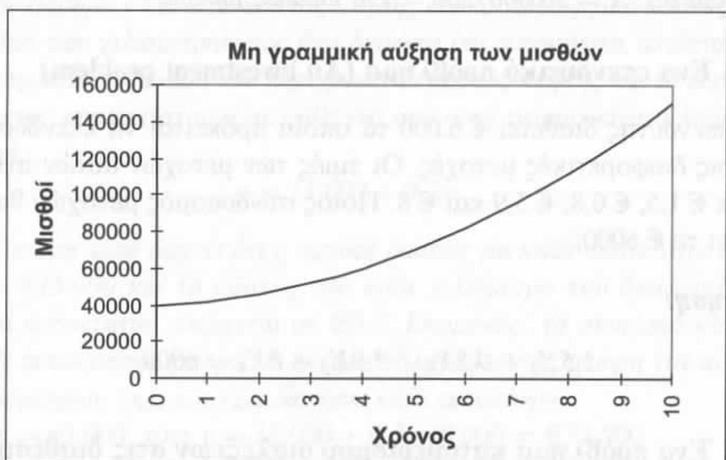
$$X_1 + 1{,}5X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 4.800$$

3.5 Τετραγωνικές συναρτήσεις – Παραβολές (Quadratic functions – parabolas)

Το Γράφημα 3.4 παριστάνει τη μισθολογική εξέλιξη ενός τραπεζικού υπαλλήλου σε μια χρονική περίοδο έντεκα ετών. Προφανώς η αύξηση των μισθών του τραπεζικού δεν μπορεί να απεικονιστεί ως γραμμική συνάρτηση. Οι μισθοί δεν αυξάνονται κατά ένα σταθερό ποσό από

χρόνο σε χρόνο. Η μαθηματική συνάρτηση η οποία μπορεί να περιγράψει τη μεταβολή του μισθού είναι τετραγωνικής μορφής.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.4: ***Η διαχρονική εξέλιξη του μισθού τραπεζικού υπαλλήλου***



Η γενική εξίσωση μίας τετραγωνικής συνάρτησης λαμβάνει τη μορφή:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ όπου a, b, c είναι σταθερές και } a \neq 0$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή η υψηλότερη δύναμη του x είναι το 2, εξ' ου και ο όρος τετραγωνική στην ονομασία. Η εξίσωση αυτή ισοδυναμεί με μία γραμμική συνάρτηση, εκτός από τον επιπλέον όρο ax^2 ο οποίος δημιουργεί το μη γραμμικό σχήμα της συνάρτησης στο γράφημα των αξόνων y, x του καρτεσιανού πεδίου.

Όταν τα a, b, c είναι γνωστά τότε έχουμε μία συγκεκριμένη τετραγωνική συνάρτηση.

Παράδειγμα:

Για $a = 1, b = -8, c = 7, \quad y = x^2 - 8x + 7$

Οι τετραγωνικές συναρτήσεις είναι καμπύλες γραμμές με ένα ακρότατο σημείο το οποίο ονομάζεται ***κορυφή (vertex)***. Ονομάζονται ***παραβολές*** και έχουν άλλοτε σχήμα καμπάνας και άλλοτε σχήμα δοχείου, το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο του συντελεστή a.

• Όταν $a < 0$ η καμπύλη είναι ***κοίλη (concave down ή απλά concave)***, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω – έχει σχήμα καμπάνας. Αυτό συμβαίνει όταν η παραβολή βρίσκεται εξ ολοκλήρου κάτω από την εφαπτομένη που διέρχεται από την κορυφή της, και μάλιστα η εφαπτομένη στηρίζεται πάνω στην καμπύλη της παραβολής, όπως φαίνεται στο δεξί σχήμα του διαγράμματος 3.5.

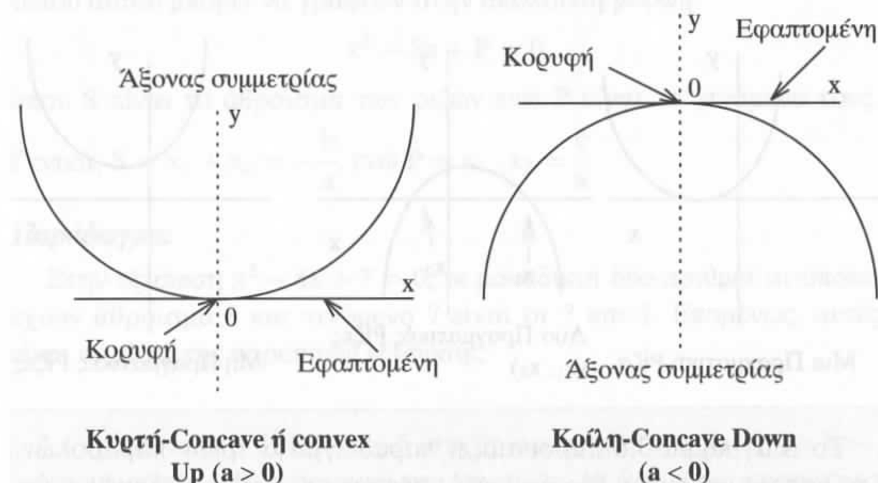
• Όταν $a > 0$ η καμπύλη είναι ***κυρτή (concave up ή convex)***, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω – έχει σχήμα δοχείου. Στο αριστερό σχήμα του διαγράμματος 3.5 φαίνεται ότι η παραβολή βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από την εφαπτομένη που διέρχεται από την κορυφή της, και μάλιστα η παραβολή στηρίζεται πάνω στην εφαπτόμενη.

Η παραβολή είναι συμμετρική γύρω από την κάθετο στην εφαπτομένη που διέρχεται από την κορυφή της παραβολής.

Η καμπύλη τέμνει τον άξονα των y (όπου $x = 0$) στο c, δηλαδή στη σταθερά της εξίσωσης.

Το Διάγραμμα 3.5 απεικονίζει δύο τετραγωνικές συναρτήσεις, μία κυρτή, U, και μία κοίλη, με $c = 0$ (αυτές περνάνε από την αρχή των αξόνων τέμνοντας τον κάθετο άξονα στο 0).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.5: ***Δύο τετραγωνικές συναρτήσεις: κυρτή και κοίλη***



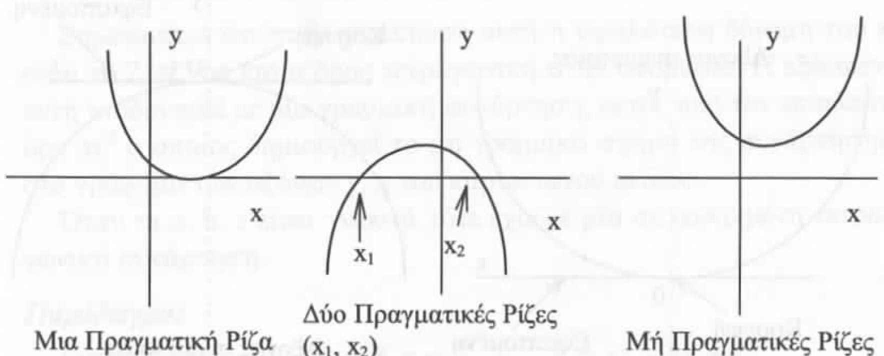
3.5.1 Οι ρίζες μίας τετραγωνικής (δευτεροβάθμιας) εξίσωσης (The roots of a quadratic equation)

Εάν η καμπύλη παραβολής τέμνει τον άξονα των x, τότε το y στα σημεία αυτά είναι μηδέν. Τα σημεία αυτά ονομάζονται ***ρίζες (roots)*** της τετραγωνικής συνάρτησης. Αυτά αποτελούν τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, και προκύπτουν από τον τύπο:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Όταν ο όρος που βρίσκεται στην τετραγωνική ρίζα ($\Delta = b^2 - 4ac$), γνωστός ως ***διακρίνουσα (discriminant)***, είναι αρνητικός, τότε οι ρίζες είναι μιγαδικές. Η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι περιπτώσεις αυτές δεν εξετάζονται στο παρόν βιβλίο. Γραφικά αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη δεν τέμνει τον άξονα των x. Όταν η διακρίνουσα είναι 0 υπάρχει μία πραγματική διπλή ρίζα. Δηλαδή υπάρχουν δύο ίσες ρίζες, οι $x_1,\ x_2 = -\frac{b}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή η κορυφή της παραβολής αγγίζει τον άξονα των x σε ένα σημείο.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.6: ***Οι πιθανές ρίζες τετραγωνικών συναρτήσεων***



Μια Πραγματική Ρίζα — Δύο Πραγματικές Ρίζες (x_1, x_2) — Μή Πραγματικές Ρίζες

Το Διάγραμμα 3.6 παρουσιάζει παραδείγματα τριών παραβολών. Στο μεσαίο υπάρχουν δύο διακριτές πραγματικές ρίζες, δεδομένου ότι η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x σε δύο διακριτά σημεία. Η παραβολή που βρίσκεται στο αριστερό μέρος του διαγράμματος έχει δύο ισοδύναμες ρίζες, δεδομένου ότι η παραβολή αγγίζει τον άξονα των x σε ένα σημείο. Η καμπύλη στα δεξιά του διαγράμματος δεν έχει πραγματικές ρίζες, δεδομένου ότι δεν τέμνει τον άξονα των x σε κανένα σημείο.

Όταν οι ρίζες της παραβολής είναι γνωστές, η εξίσωση μπορεί να ***παραγοντοποιηθεί (factored)*** –δηλαδή να εκφραστεί ως το γινόμενο δύο όρων– ως εξής $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Παράδειγμα:

Η τετραγωνική συνάρτηση $y = x^2 - 8x + 7$ έχει σχήμα U και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο 7. Οι ρίζες της εξίσωσης μπορούν να βρεθούν λαμβάνοντας υπόψη ότι: $a = 1$, $b = -8$, $c = 7$. Επομένως, αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο, προκύπτει:

$$x_1, x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = 1 \text{ και } 7$$

Έτσι προκύπτει ότι $x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1)$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες δεν είναι δύσκολο να απεικονιστεί η γραφική παράσταση της εξίσωσης.

Ένα γρήγορος τρόπος εύρεσης των ριζών μιας τετραγωνικής εξίσωσης μπορεί να εξαχθεί, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις του τύπου αυτού μπορεί να γραφούν στην ακόλουθη μορφή:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

όπου S είναι το άθροισμα των ριζών ενώ P είναι το γινόμενο τους.

Γενικά, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ενώ $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Παράδειγμα:

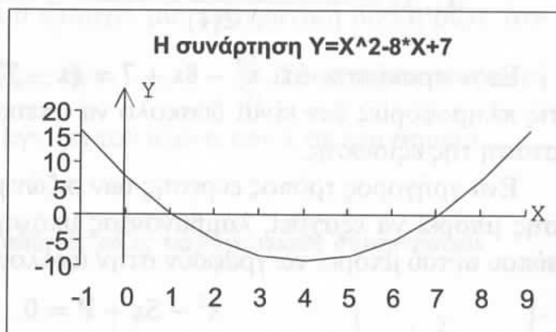
Στην εξίσωση $x^2 - 8x + 7 = 0$, οι μοναδικοί δύο αριθμοί οι οποίοι έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 7 είναι οι 7 και 1. Επομένως, αυτές είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Ο πίνακας στο Γράφημα 3.5 έχει δημιουργηθεί στο Excel και δείχνει μέρος του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της τετραγωνικής συνάρτησης $y = x^2 - 8x + 7$. Η πρώτη στήλη (στήλη A στο Excel)

περιέχει της τιμές του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, ενώ στη δεύτερη στήλη (στήλη B στο Excel) έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση = *a2^2-8*a2+7*, και τα δεδομένα της στήλης A, προκειμένου να βρεθούν οι αντίστοιχες τιμές του y. Χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης, όπως φαίνεται στο Γράφημα 3.5

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.5: ***Η συνάρτηση $y = x^2 - 8x + 7$ σε μορφή πίνακα και γραφήματος***

X	Y = X^2 – 8*X + 7
–1	16
0	7
1	0
2	–5
3	–8
4	–9
5	–8
6	–5
7	0
8	7
9	16



Το Γράφημα 3.6 έχει κατασκευαστεί με τη βοήθεια του ***Excel***. Παρουσιάζει γραφήματα τετραγωνικών συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων a, b και c.

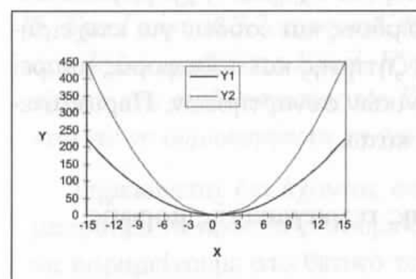
• Για παράδειγμα, στο Γράφημα 1 (Graph 1) απεικονίζονται δύο τετραγωνικές συναρτήσεις με σχήμα δοχείου, U, όπου b = c = 0. Αυτές είναι οι $Y1 = X^2$ και $Y2 = 2X^2$. Στην πρώτη α = 1, ενώ στη δεύτερη α = 2. Όπως παρατηρείται και οι δύο συναρτήσεις περνάνε από την αρχή των αξόνων και η παραβολή με την υψηλότερη τιμή α (= 2) αυξάνεται γρηγορότερα, σχηματίζοντας μία καμπύλη στενότερου εύρους. Η κά-

θε συνάρτηση έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις τέμνουν τον άξονα των x σε ένα μοναδικό σημείο.

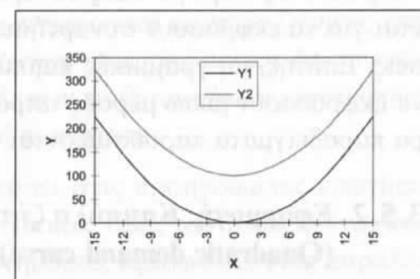
• Το Γράφημα 2 (Graph 2) παρουσιάζει δύο τετραγωνικές συναρτήσεις με b = 0, a = 1, αλλά η μία έχει c = 0 ενώ η άλλη έχει c = 100. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη έχει το ίδιο σχήμα με την πρώτη, αλλά βρίσκεται πάνω από αυτήν κατά 100 μονάδες, τέμνοντας τον άξονα των y στο 100. Η συνάρτηση Y1 έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, ενώ η συνάρτηση Y2 έχει δύο μιγαδικές ρίζες, δεδομένου ότι δεν τέμνει τον άξονα των x σε κανένα σημείο.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.6: ***Γραφήματα τετραγωνικών συναρτήσεων για διάφορες τιμές των a, b, c***

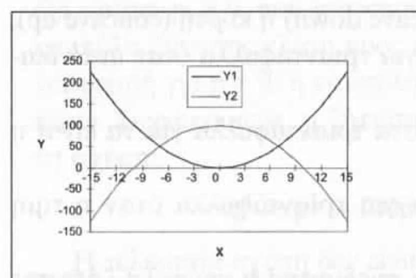
Graph 1: $Y1 = X^2$, $Y2 = 2X^2$



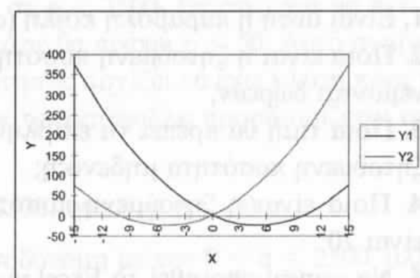
Graph 2: $Y1 = X^2$, $Y2 = X^2 + 100$



Graph 3: $Y1 = X^2$, $Y2 = -X^2 + 100$



Graph 4: $Y1 = X^2 + 10X + 1$, $Y2 = X^2 - 10X + 1$



• Το Γράφημα 3 (Graph 3) παρουσιάζει δύο τετραγωνικές συναρτήσεις με b = 0, στο οποίο η πρώτη έχει a > 0 και άρα έχει σχήμα U. Η δεύτερη έχει a < 0, εμφανίζει σχήμα καμπάνας, και επιπλέον λόγω

του ότι $c = 100$ τέμνει τον άξονα των y στο 100. Η συνάρτηση Y1 έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, ενώ η συνάρτηση Y2 έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες, καθώς η συνάρτηση αυτή τέμνει τον άξονα των x σε δύο διαφορετικά σημεία.

• Το Γράφημα 4 (Graph 4) παρουσιάζει δύο τετραγωνικές συναρτήσεις με τα a, b και c διαφορετικά από το 0. Και οι δύο έχουν σχήμα U αφού $a > 0$ και τέμνουν τον άξονα των y στο $c = 1$. Ωστόσο, $b = 10$ για Y1, ενώ $b = -10$ για Y2. Και οι δύο εξισώσεις έχουν δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες και τέμνουν τον άξονα των x σε δύο διαφορετικά σημεία.

Κυρτές τετραγωνικές συναρτήσεις (με σχήμα ∪) χρησιμοποιούνται στα οικονομικά και αντιπροσωπεύουν το οριακό κόστος (marginal cost) και το μέσο κόστος (average cost) παραγωγής κάποιου προϊόντος. Κοίλες τετραγωνικές συναρτήσεις (σε σχήμα ∩) χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν συναρτήσεις κέρδους και εσόδων για επιχειρήσεις. Επίσης, μη γραμμικές καμπύλες ζήτησης και προσφοράς μπορεί να εκφραστούν μέσω μέρους τετραγωνικών συναρτήσεων. Περισσότερα παραδείγματα παρουσιάζονται πιο κάτω.

3.5.2 Εφαρμογή: Καμπύλη ζήτησης τετραγωνικής μορφής (Quadratic demand curve)

Ας θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα (q^d) στην τοπική αγορά εξαρτάται από την τιμή των τριαντάφυλλων και περιγράφεται από την ακόλουθη τετραγωνική συνάρτηση: $q^d = p^2 - 100p + 2500$

1. Είναι αυτή η παραβολή κοίλη (concave down) ή κυρτή (concave up);

2. Ποια είναι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν αυτά διανέμονται δωρεάν;

3. Ποια τιμή θα πρέπει να επιβληθεί στα τριαντάφυλλα για να είναι η ζητούμενη ποσότητα μηδενική;

4. Ποια είναι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν η τιμή είναι 20;

5. Να χρησιμοποιηθεί το Excel για να σχεδιαστεί η καμπύλη ζήτησης για τριαντάφυλλα. Να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

Απαντήσεις:

1. *Δεδομένου ότι ο συντελεστής του p^2 είναι θετικός, η παραβολή είναι κυρτή.*

2. *Η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν $p = 0$ είναι:*
$q^d = 0^2 - 100(0) + 2500 = 2500$

3. *Όταν η ζητούμενη ποσότητα είναι μηδενική $q^d = 0$. Για να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή του p λύνουμε την εξίσωση $p^2 - 100p + 2500 = 0$. Δηλαδή βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης ζήτησης. Έτσι:*

$$p_1, p_2 = \frac{100 \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(1)(2500)}}{2(1)} = \frac{100}{2} = 50$$

Σε αυτή την περίπτωση η τιμή των 50 μονάδων θα ικανοποιήσει πλήρως όλη τη ζητούμενη ποσότητα, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί με την αντικατάσταση του 50 στη θέση του p στη συνάρτηση ζήτησης (βλέπε επίσης Γράφημα 3.7 στην απάντηση 5 πιο κάτω).

4. *Όταν $p = 20$: $q^d = 20^2 - 100(20) + 2500 = 900$*

5. *Στο Γράφημα 3.7 παρουσιάζεται η τετραγωνική καμπύλη ζήτησης όπως έχει δημιουργηθεί στο Excel. Η συνάρτηση σε μορφή πίνακα δημιουργείται αρχικά στο φύλλο εργασίας του Excel και οι τιμές του πίνακα χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση.*

Σημειώνεται ότι έχοντας απαντήσει στις προηγούμενες ερωτήσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σχετικές τιμές των p και q, έτσι ώστε να παραμείνουμε στο θετικό τεταρτημόριο, εξασφαλίζοντας παράλληλα για την καμπύλη ζήτησης κλίση προς τα κάτω, όπως απαιτείται από την θεωρία των οικονομικών. Έτσι, οι ακόλουθοι περιορισμοί είναι αναγκαίοι προκειμένου να παραμείνουμε στο θετικό τεταρτημόριο. Θα πρέπει $p \geq 0$, που αντιστοιχεί σε $q < 2500$. Επίσης, για να έχει η καμπύλη ζήτησης κλίση προς τα κάτω θα πρέπει $p \leq 50$. Αυτό συμβαίνει επειδή για $p > 50$ η καμπύλη ζήτησης αρχίζει να έχει κλίση προς τα πάνω. Συγκεκριμένα, η ζήτηση για τριαντάφυλλα προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$q^d = p^2 - 100p + 2500, \text{ για } 0 \leq p \leq 50$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι ισοδύναμη με την $0 \leq q \leq 2500$, αλλά παρόλα αυτά η καμπύλη ζήτησης είναι πιθανόν να έχει κλίση προς τα επάνω (στα δεξιά του σημείου $p = 50$). Έτσι έχουμε μία συνάρτηση ζήτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι περιορισμένο. Στο γράφημα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχει σκοπίμως επεκταθεί ελα-

του ότι c = 100 τέμνει τον άξονα των y στο 100. Η συνάρτηση Y1 έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, ενώ η συνάρτηση Y2 έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες, καθώς η συνάρτηση αυτή τέμνει τον άξονα των x σε δύο διαφορετικά σημεία.

• Το Γράφημα 4 (Graph 4) παρουσιάζει δύο τετραγωνικές συναρτήσεις με τα a, b και c διαφορετικά από το 0. Και οι δύο έχουν σχήμα U αφού $a > 0$ και τέμνουν τον άξονα των y στο $c = 1$. Ωστόσο, $b = 10$ για Y1, ενώ $b = -10$ για Y2. Και οι δύο εξισώσεις έχουν δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες και τέμνουν τον άξονα των x σε δύο διαφορετικά σημεία.

Κυρτές τετραγωνικές συναρτήσεις (με σχήμα ∪) χρησιμοποιούνται στα οικονομικά και αντιπροσωπεύουν το οριακό κόστος (marginal cost) και το μέσο κόστος (average cost) παραγωγής κάποιου προϊόντος. Κοίλες τετραγωνικές συναρτήσεις (σε σχήμα ∩) χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν συναρτήσεις κέρδους και εσόδων για επιχειρήσεις. Επίσης, μη γραμμικές καμπύλες ζήτησης και προσφοράς μπορεί να εκφραστούν μέσω μέρους τετραγωνικών συναρτήσεων. Περισσότερα παραδείγματα παρουσιάζονται πιο κάτω.

3.5.2 Εφαρμογή: Καμπύλη ζήτησης τετραγωνικής μορφής (Quadratic demand curve)

Ας θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα (q^d) στην τοπική αγορά εξαρτάται από την τιμή των τριαντάφυλλων και περιγράφεται από την ακόλουθη τετραγωνική συνάρτηση: $q^d = p^2 - 100p + 2500$

1. Είναι αυτή η παραβολή κοίλη (concave down) ή κυρτή (concave up);

2. Ποια είναι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν αυτά διανέμονται δωρεάν;

3. Ποια τιμή θα πρέπει να επιβληθεί στα τριαντάφυλλα για να είναι η ζητούμενη ποσότητα μηδενική;

4. Ποια είναι η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν η τιμή είναι 20;

5. Να χρησιμοποιηθεί το Excel για να σχεδιαστεί η καμπύλη ζήτησης για τριαντάφυλλα. Να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

Απαντήσεις:

1. *Δεδομένου ότι ο συντελεστής του p^2 είναι θετικός, η παραβολή είναι κυρτή.*

2. *Η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα όταν $p = 0$ είναι:*
$q^d = 0^2 - 100(0) + 2500 = 2500$

3. *Όταν η ζητούμενη ποσότητα είναι μηδενική $q^d = 0$. Για να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή του p λύνουμε την εξίσωση $p^2 - 100p + 2500 = 0$. Δηλαδή βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης ζήτησης. Έτσι:*

$$p_1, p_2 = \frac{100 \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(1)(2500)}}{2(1)} = \frac{100}{2} = 50$$

Σε αυτή την περίπτωση η τιμή των 50 μονάδων θα ικανοποιήσει πλήρως όλη τη ζητούμενη ποσότητα, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί με την αντικατάσταση του 50 στη θέση του p στη συνάρτηση ζήτησης (βλέπε επίσης Γράφημα 3.7 στην απάντηση 5 πιο κάτω).

4. *Όταν $p = 20$: $q^d = 20^2 - 100(20) + 2500 = 900$*

5. *Στο Γράφημα 3.7 παρουσιάζεται η τετραγωνική καμπύλη ζήτησης όπως έχει δημιουργηθεί στο Excel. Η συνάρτηση σε μορφή πίνακα δημιουργείται αρχικά στο φύλλο εργασίας του Excel και οι τιμές του πίνακα χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν τη γραφική παράσταση.*

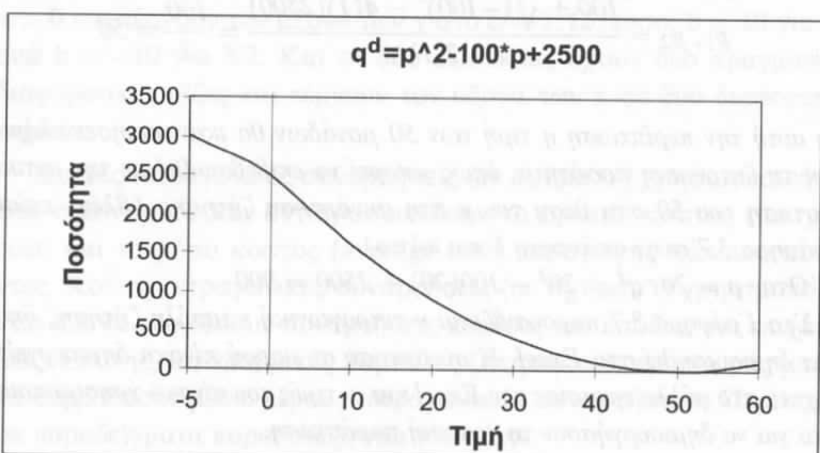
Σημειώνεται ότι έχοντας απαντήσει στις προηγούμενες ερωτήσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σχετικές τιμές των p και q, έτσι ώστε να παραμείνουμε στο θετικό τεταρτημόριο, εξασφαλίζοντας παράλληλα για την καμπύλη ζήτησης κλίση προς τα κάτω, όπως απαιτείται από την θεωρία των οικονομικών. Έτσι, οι ακόλουθοι περιορισμοί είναι αναγκαίοι προκειμένου να παραμείνουμε στο θετικό τεταρτημόριο. Θα πρέπει $p \geq 0$, που αντιστοιχεί σε $q < 2500$. Επίσης, για να έχει η καμπύλη ζήτησης κλίση προς τα κάτω θα πρέπει $p \leq 50$. Αυτό συμβαίνει επειδή για $p > 50$ η καμπύλη ζήτησης αρχίζει να έχει κλίση προς τα πάνω. Συγκεκριμένα, η ζήτηση για τριαντάφυλλα προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$q^d = p^2 - 100p + 2500, \text{ για } 0 \leq p \leq 50$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι ισοδύναμη με την $0 \leq q \leq 2500$, αλλά παρόλα αυτά η καμπύλη ζήτησης είναι πιθανόν να έχει κλίση προς τα επάνω (στα δεξιά του σημείου $p = 50$). Έτσι έχουμε μία συνάρτηση ζήτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι περιορισμένο. Στο γράφημα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχει σκοπίμως επεκταθεί ελα-

φρώς έξω από τα όρια του πεδίου ορισμού, ώστε η ανάγκη των παραπάνω περιορισμών να γίνει πιο πρόδηλη.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.7: *Γράφημα της τετραγωνικής συνάρτησης ζήτησης* $q^d = p^2 - 100p + 2500$



3.6 Κυβικές συναρτήσεις (Cubic functions)

Η γενική μαθηματική εξίσωση μιας κυβικής συνάρτησης είναι:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, όπου a, b, c, d είναι σταθερές με $a \neq 0$

Σε μορφή διαγράμματος, το σημείο τομής της συνάρτησης με τον άξονα των y είναι το d. Γενικά, υπάρχουν δύο ακρότατα σημεία (μέγιστο και ελάχιστο) και τρεις ρίζες. Το μέγιστο βρίσκεται αριστερά του ελάχιστου όταν $a > 0$, και το αντίστροφο όταν $a < 0$

Το Γράφημα 3.8 παρουσιάζει ένα παράδειγμα δύο κυβικών συναρτήσεων (η μία με $a > 0$ και η άλλη με $a < 0$), οι οποίες δημιουργούνται στο Excel υπό μορφή πίνακα και υπό μορφή γραφικής παράστασης.[4]

[4] Στον πίνακα του Excel και στα γραφήματα χρησιμοποιείται η τελεία αντί για το κόμμα για την ένδειξη δεκαδικών, λόγω του ότι χρησιμοποιούμε αγγλικό περιβάλλον Windows. Το ίδιο ισχύει και για τους επόμενους πίνακες και γραφήματα.

Οι κυβικές συναρτήσεις συχνά χρησιμοποιούνται στα οικονομικά για να περιγράψουν τη συμπεριφορά του συνολικού κόστους παραγωγής ενός προϊόντος για διαφορετικές ποσότητες παραγωγής. Το συνολικό κόστος ενός προϊόντος αυξάνεται αρχικά, έως ότου φτάνει σε ένα μέγιστο σημείο και στη συνέχεια αρχίζει να πέφτει, δεδομένου ότι δημιουργούνται οικονομίες κλίμακας στην παραγωγική διαδικασία. Στη συνέχεια ωστόσο, φτάνει σε ένα ελάχιστο σημείο καθώς όσο αυξάνεται η παραγωγή, αρνητικές οικονομίες κλίμακας εμφανίζονται και το κόστος αρχίζει να αυξάνεται γρήγορα. Βέβαια, στην κυβική συνάρτηση κόστους τίθεται ο περιορισμός να βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο του Καρτεσιανού πεδίου και επομένως θα πρέπει να τεθούν οι σχετικοί περιορισμοί στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

3.6.1 Ρίζες της κυβικής συνάρτησης

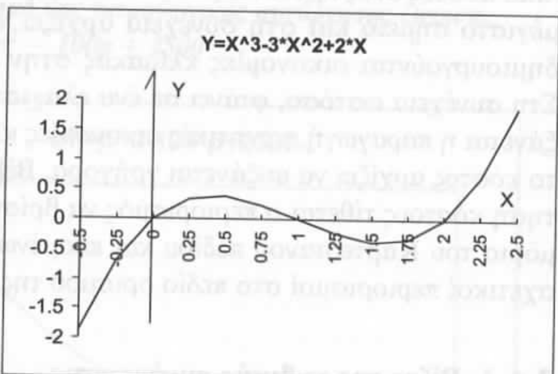
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εύρεση των ριζών (το πολύ τρεις) της κυβικής συνάρτησης. Εάν οι παράμετροι a, b, c και d είναι όλοι ακέραιοι, τότε όλες οι δυνατές ακέραιες ρίζες της κυβικής συνάρτησης πρέπει να είναι παράγοντες του σταθερού όρου d. Χρησιμοποιώντας επιπλέον το βασικό θεώρημα της άλγεβρας ξέρουμε ότι κάθε τριώνυμο της μορφής $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μιας γραμμικής και μιας διωνυμικής εξίσωσης.

Παράδειγμα:

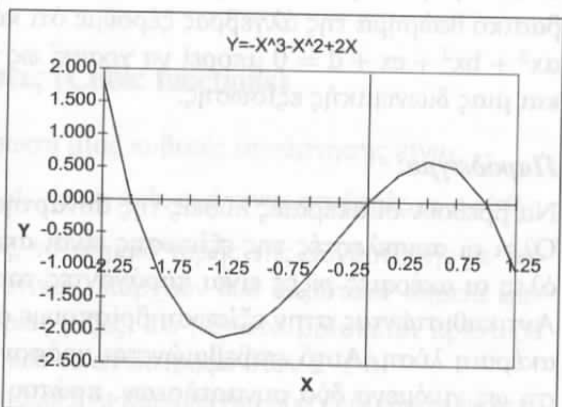
Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της συνάρτησης $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$. Όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ακέραιοι αριθμοί, επομένως όλες οι ακέραιες ρίζες είναι παράγοντες του 2. Αυτοί είναι, ±1, ±2. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε ότι η $x = -2$ είναι η μόνη ακέραιη λύση. Αυτό επιβεβαιώνεται γράφοντας την κυβική συνάρτηση ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, πρώτου και δεύτερου βαθμού, ως εξής: $x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x + 2) + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1) = 0$

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.8: ***Κυβικές συναρτήσεις σε μορφή πίνακα και σε μορφή διαγράμματος***

X	Y = X^3 − 3*X^2 + 2X
−0.5	−1.875
−0.3	−0.703
0	0.000
0.25	0.328
0.5	0.375
0.75	0.234
1	0.000
1.25	−0.234
1.5	−0.375
1.75	−0.328
2	0.000
2.25	0.703
2.5	1.875



X	Y = −X^3 − X^2 + 2X
−2.3	1.828
−2	0.000
−1.8	−1.203
−1.5	−1.875
−1.3	−2.109
−1	−2.000
−0.8	−1.641
−0.5	−1.125
−0.3	−0.547
0	0.000
0.25	0.422
0.5	0.625
0.75	0.516
1	0.000
1.25	−1.016



3.7 Πολυώνυμα (Polynomials)

Η υψηλότερη δύναμη του x σε μία γραμμική συνάρτηση είναι το 1, σε μία τετραγωνική είναι το 2 και σε μία κυβική είναι το 3. Οι εξισώσεις αυτές είναι πολυώνυμα τάξης 1, 2 και 3, αντίστοιχα. ***Ένα πολυώνυμο τάξης (ή βαθμού)*** η εκφράζεται από το γενικό τύπο:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \text{όπου: } a_n \neq 0$$

Η τάξη ενός πολυωνύμου και το πρόσημο των a_n καθορίζουν το σχήμα του.

Τελικά, πολυώνυμα αρκετά πολύπλοκα μπορούν να κατασκευαστούν, προκειμένου να περιγραφεί οποιαδήποτε περίπτωση προβλημάτων επιχειρησιακής ή οικονομικής μορφής.

3.8 Ρητές συναρτήσεις (Rational functions)

Ο λόγος (ή πηλίκο) δυο πολυωνύμων είναι γνωστός ως ρητή συνάρτηση. Η γενική μορφή τέτοιων συναρτήσεων είναι:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

όπου: g(x) και h(x) είναι πολυώνυμα τάξης n και m, και h(x) δεν είναι μηδέν.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{3x^2 + 2}{6x - 5}$ αποτελεί ένα παράδειγμα ρητής συνάρτησης.

3.9 Συναρτήσεις υπερβολής (Hyperbolic functions)

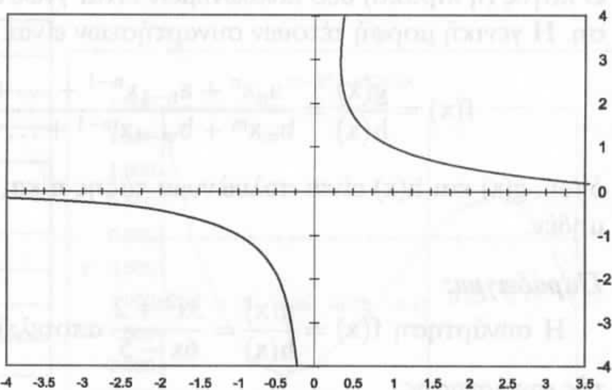
Η γενική μαθηματική εξίσωση μιας συνάρτησης υπερβολής είναι:

$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{όπου } x \neq 0 \text{ και k είναι μια σταθερά}$$

Αποτελεί ειδική περίπτωση ρητής συνάρτησης, όπου ο αριθμητής είναι η σταθερή συνάρτηση k και ο παρονομαστής είναι η γραμμική συνάρτηση x. Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δεδομένου ότι το γινόμενο των x και y παραμένει σταθερό. Η καμπύλη υπερβολής έχει ως ***ασύμπτωτες (asymptotes)*** τον άξονα των x και τον άξονα των y (αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη προσεγγίζει αυτούς τους άξονες αλλά ποτέ δεν τους τέμνει) και η ***καμπυλότητα (curvature)*** της συνάρτησης εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς k. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του k, τόσο περισσότερο απομακρύνεται η καμπύλη από την αρχή των αξόνων.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.9: ***Συνάρτηση υπερβολής (y = 1/x) σε μορφή πίνακα και διαγράμματος***

X	y = 1/x
− 3.5	− 0.286
− 3	− 0.333
− 2.5	− 0.4
− 2	− 0.5
− 1.5	− 0.667
− 1	− 1
− 0.5	− 2
0	N/A
0.5	2
1	1
1.5	0.667
2	0.5
2.5	0.4
3	0.333
3.5	0.286



Το Γράφημα 3.9 παρουσιάζει ως παράδειγμα της συνάρτησης υπερβολής $y = 1/x$, η οποία έχει δημιουργηθεί στο ***Excel*** σε μορφή πίνακα και ως γραφική παράσταση.

Η ***υπερβολή (hyperbola)*** χρησιμοποιείται συχνά για να εκφράσει μη γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης των οποίων η ελαστικότητα παραμένει σταθερή (= −1) κατά μήκος της καμπύλης.[5]

Παράδειγμα:

Η ελαστικότητα της ζήτησης της $y = 1/x$, είναι −1 σε όλες τις περιπτώσεις.

3.10 Εκθετικές συναρτήσεις (Exponential functions)

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με συναρτήσεις μεταβλητών υψωμένες σε κάποια δύναμη (power functions), της μορφής $y = x^a$, στις οποίες η μεταβλητή x που βρίσκεται στη βάση υψώνεται σε ένα σταθερό εκθέτη a. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες συναρτήσεις στις οποίες μία σταθερά a βρίσκεται στη βάση και υψώνεται σε ένα μεταβλητό εκθέτη x. Για παράδειγμα, $y = a^x$. Αυτή ονομάζεται εκθετική συνάρτηση και ο γενικός μαθηματικός τύπος που την εκφράζει είναι ο εξής:

$$y = a^x, \quad \text{όπου } a > 0,\ a \neq 1$$

Παραδείγματα:

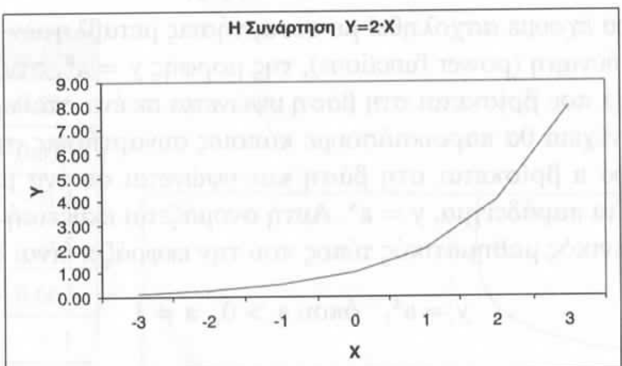
1. $y = 3^x$, $y = 100^x$, $y = 0{,}5^x$ αποτελούν παραδείγματα εκθετικών συναρτήσεων.

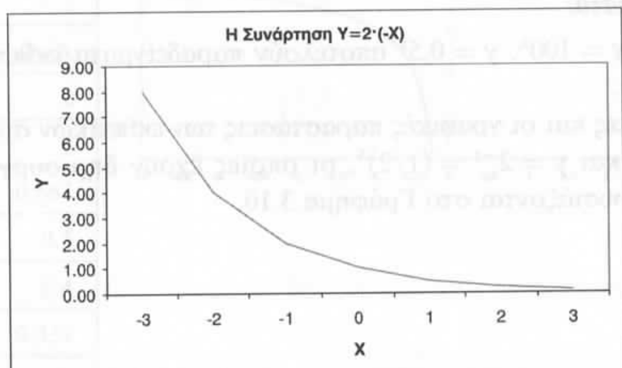
2. Οι πίνακες και οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών συναρτήσεων $y = 2^x$ και $y = 2^{-x} = (1/2)^x$, οι οποίες έχουν δημιουργηθεί στο ***Excel***, παρουσιάζονται στο Γράφημα 3.10.

[5] Βλέπε κεφάλαιο 7 για ορισμό της ελαστικότητας μιας συνάρτησης.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.10: ***Πίνακας και διαγράμματα των εκθετικών συναρτήσεων, $y = 2^x$ και $y = 2^{-x}$***

x	$y = 2^x$	$y = 2^{-x} = (1/2)^x$
−3	0.13	8.00
−2	0.25	4.00
−1	0.50	2.00
0	1.00	1.00
1	2.00	0.50
2	4.00	0.25
3	8.00	0.13





Σημειώνεται ότι στην πρώτη συνάρτηση $a > 1$, ενώ στη δεύτερη $a < 1$. Οι ιδιότητες της συνάρτησης παρουσιάζονται παρακάτω.

3.10.1 Ιδιότητες της συνάρτησης $y = a^x$

• Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ το πεδίο τιμών είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Έτσι $y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η καμπύλη της συνάρτησης αυτής θα βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x. Αυτό φαίνεται και στα παραδείγματα του Γραφήματος 3.10.

• Όταν $a > 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται στο αρνητικό τμήμα του άξονα των x, όπως μία ασύμπτωτη, τέμνει τον άξονα των y στο 1 και αυξάνεται με βάση τον εκθέτη x, δηλαδή από τα αριστερά στα δεξιά. Όσο μεγαλύτερη είναι η βάση a, τόσο μεγαλύτερη είναι η αύξηση στο y καθώς το x αυξάνεται. Οι συναρτήσεις αυτές είναι χρήσιμες στην απεικόνιση περιπτώσεων αυξανόμενων μεγεθών, όπως στη διαχρονική αύξηση του πληθυσμού της γης.

• Όταν $0 < a < 1$ η ασύμπτωτη του γραφήματος βρίσκεται στο θετικό τμήμα του άξονα των x. Πάλι τέμνει τον άξονα των y στο σημείο 1. Ωστόσο το y μειώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά όταν αυξάνεται το x. Όσο μικρότερη είναι η βάση a, τόσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός μείωσης του y όταν το x αυξάνεται. Αυτές οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση περιπτώσεων φθινουσών μεγεθών, όπως στη μείωση της αξίας ενός μηχανήματος διαχρονικά.

• Όταν $a = 1$, η συνάρτηση παίρνει τη μορφή της σταθερής συνάρτησης, $y = 1$

3.10.2 Εκθετικές συναρτήσεις με βάση e

Μία ειδική κατηγορία εκθετικών συναρτήσεων αναφέρεται σε εκείνες που έχουν βάση το e, δηλαδή τον άρρητο αριθμό 2,71828. Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Επομένως: $$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2,71828$$

Εκθετικές συναρτήσεις με βάση το e εκφράζονται από το μαθηματικό τύπο:

$$y = e^x$$

Γενικότερα:

$$y = ce^{dx}, \quad \text{όπου c και d είναι σταθερές}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση e^x μπορεί να προσεγγιστεί από:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

όπου n! διαβάζεται ως ***η παραγοντικό (factorial)*** και ορίζεται ως:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

Παραδείγματα:

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \quad 2! = 2 \times 1 = 2, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1$

Στο ***Excel*** υπάρχει η συνάρτηση = ***fact()***, η οποία επιτρέπει την εκτίμηση παραγοντικών αριθμών. Βλέπε για παράδειγμα το παράρτημα του κεφαλαίου, όπου εφαρμόζεται η συνάρτηση = ***fact(a3)*** στο κελί b13, επιβεβαιώνοντας ότι 3! = 6

Οι εκθετικές συναρτήσεις με βάση το e είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην κατασκευή υποδειγμάτων ***εκθετικών διαδικασιών αύξησης (exponential growth processes)***, όπως ο συνεχής ρυθμός αύξησης του χρήματος, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού, ο ρυθμός υπερπληθωρισμού κ.λπ.

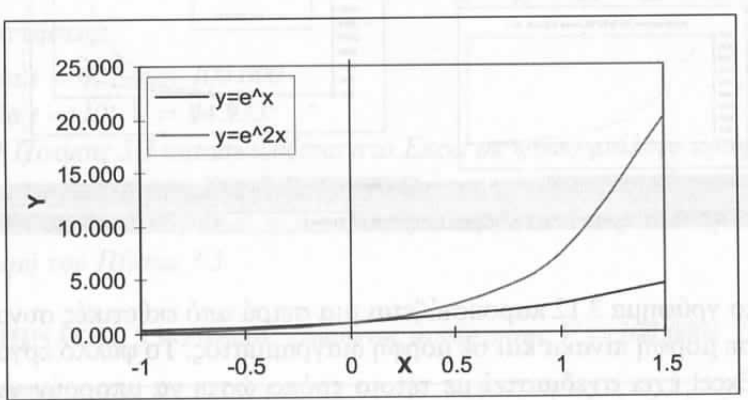
Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε ότι το ***Excel*** περιλαμβάνει τη συνάρτηση = ***exp()***, προκειμένου να εκτιμηθεί ο εκθέτης κάποιου αριθμού. Τα περιεχόμενα του κελιού a3, δηλαδή ο αριθμός 3, χρησιμοποιούνται ως οι εισερχόμενες τιμές στο κελί b12 για να βρεθεί ότι = ***exp(3) = 20,08554***, το οποίο ισούται με e^3. Το φύλλο εργασίας του Excel μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν οι τιμές της εκθετικής συνάρτησης, για περισσότερες από μία τιμές του πεδίου ορισμού της και για διάφορες τιμές της δύναμης d και c στην ce^{dx}. Έτσι, ο Πίνακας 3.2, που έχει δημιουργηθεί στο Excel, εμφανίζει 5 διαφορετικές εκθετικές συναρτήσεις. Είναι εμφανές στον πίνακα ότι ο ρυθμός αύξησης του y μεγαλώνει όσο αυξάνεται η σταθερά d στον εκθέτη της συνάρτησης

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2: ***Εκθετικές συναρτήσεις, $y = e^{dx}$, για διαφορετικές τιμές του d***

x	y = exp(x)	y = exp(2x)	y = exp(3x)	y = exp(4x)	y = exp(8x)
–1	0.368	0.135	0.050	0.018	0.0003
– 0.5	0.607	0.368	0.223	0.135	0.0183
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0000
0.5	1.649	2.718	4.482	7.389	54.5982
1	2.718	7.389	20.086	54.598	2980.9580
1.5	4.482	20.086	90.017	403.429	162754.7914

Στο Γράφημα 3.11 βλέπουμε δύο παραδείγματα των εκθετικών συναρτήσεων, $y = e^x$ and $y = e^{2x}$, σε γραφική μορφή έτσι όπως δημιουργήθηκαν στο Excel. Παρατηρούμε ότι οι τιμές του y αυξάνονται πολύ πιο γρήγορα στην $y = e^{2x}$, σε σχέση με την $y = e^x$

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.11: ***Γράφημα δύο εκθετικών συναρτήσεων, $y = e^x$ και $y = e^{2x}$***



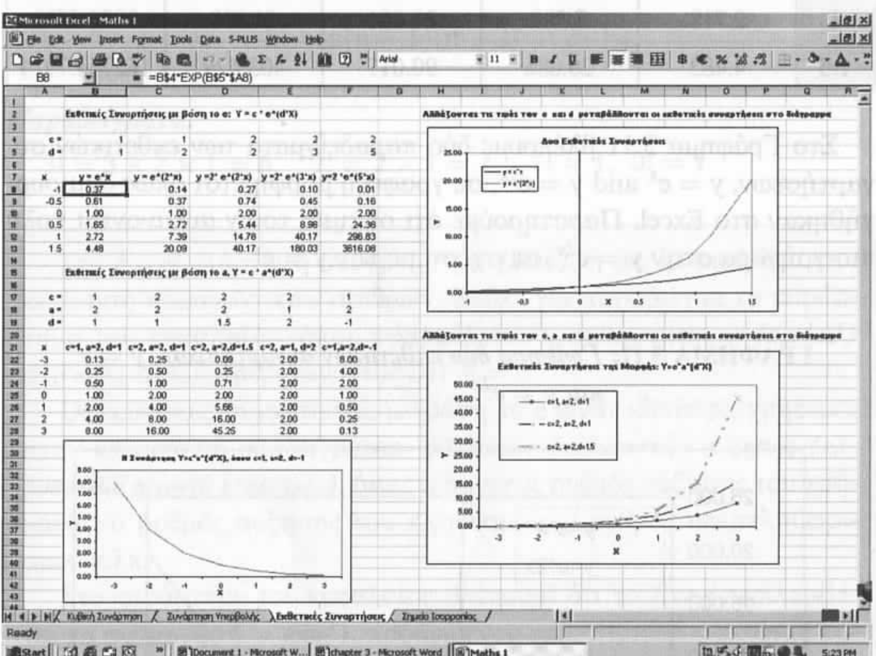
Όταν:

$$y = ce^{-dx}$$

η καμπύλη της παραπάνω συνάρτησης μειώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Χρησιμοποιείται για να απεικονίσει ***φθίνουσες εκθετικές***

διαδικασίες μείωσης (exponential decay processes), όπως η μείωση της αξίας ενός μηχανήματος με το χρόνο, η παραγωγικότητα του μηχανήματος με την πάροδο του χρόνου, η μείωση της αγοραστικής δύναμης ενός νομίσματος όταν η οικονομία είναι σε ύφεση, η προεξόφληση μιας συνεχούς ροής ταμειακών ροών κ.λπ.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.12: ***Δημιουργία εκθετικών συναρτήσεων στο Excel***



Στο γράφημα 3.12 παρουσιάζεται μια σειρά από εκθετικές συναρτήσεις σε μορφή πίνακα και σε μορφή διαγράμματος. Το φύλλο εργασίας του Excel έχει σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να δημιουργηθούν ταυτόχρονα διαφορετικές συναρτήσεις των ευρύτερων ομάδων $y = ce^{dx}$ και $y = ca^{dx}$. Στην πρώτη περίπτωση, δεδομένου ότι $e = 2{,}718$ οι σταθερές που καθορίζουν τη συνάρτηση είναι οι c και d. Στα κελιά b4 έως f5 χρησιμοποιούνται διάφορες τιμές των δύο αυτών σταθερών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στους τύπους των κελιών b8 έως f13 ταυτόχρονα με τις τιμές του x που βρίσκονται στη στήλη A, για τη δημιουργία των πεδίων τιμών των συναρτήσεων. Ο πίνακας τιμών χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τη δημιουργία των συναρτήσεων σε μορφή διαγράμματος. Το ίδιο κάνουμε και στη δεύτερη συνάρτηση, όπου οι τιμές των σταθερών c, a και d καθορίζουν την εκθετική αυτή συνάρτηση με βάση το a. Αυτό φαίνεται από τον πίνακα τιμών που δημιουργείται για διαφορετικούς συνδυασμούς των σταθερών αυτών, αλλά και από τα αντίστοιχα γραφήματα που εμφανίζονται δίπλα και κάτω από τον πίνακα.

3.10.3 Εφαρμογές εκθετικών συναρτήσεων

3.10.3.1 Η αξία του χρόνου ζωής ενός εξοπλισμού (The life time value of equipment)

Η αξία ενός μηχανήματος εργοστασίου (V) μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (t), σύμφωνα με την ακόλουθη εκθετική συνάρτηση $V = 100.000e^{-0{,}08t}$

1. Ποιά ήταν η αξία του εξοπλισμού όταν αγοράστηκε;

2. Ποιά είναι η αξία του εξοπλισμού μετά από 10 χρόνια;

3. Να κατασκευαστεί ένας πίνακας, που να δείχνει πώς η αξία του εξοπλισμού μεταβάλλεται τα πρώτα 10 χρόνια της ζωής του.

Απαντήσεις:

1. *Για* $t = 0$, $V = 100.000$

2. *Για* $t = 10$, $V = 44.933$

3. *Ο Πίνακας 3.3 κατασκευάζεται στο Excel με τρόπο ανάλογο προηγούμενων παραδειγμάτων. Στη δεύτερη γραμμή του πίνακα εφαρμόζεται ο τύπος* $V = 100.000e^{-0{,}08t}$, *όπου η μεταβλητή t λαμβάνει τιμές από την πρώτη γραμμή του Πίνακα 3.3.*

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3: ***Πίνακας τιμών της συνάρτησης*** $V = 100.000e^{-0{,}08t}$

Χρόνος, t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Αξία, V	100000	92312	85214	78663	72615	67032	61878	57121	52729	48675	44933

3.10.3.2 Επιτόκιο ανατοκισμού (Interest compounding)

Ένα αρχικό ποσό χρημάτων P, επενδύεται για t χρόνια, με επιτόκιο r,

με αποτέλεσμα να προκύπτει το ***τελικό (μελλοντικό) ποσό (compound amount)***, S.

• Εάν ο ***ανατοκισμός πραγματοποιείται μία φορά το χρόνο*** (δηλαδή, t πληρωμές τόκων, με επιτόκιο r) τότε:

$$S = P(1+r)^t$$

• Εάν ο ανατοκισμός πραγματοποιείται ***m φορές το χρόνο*** (δηλαδή, m πληρωμές τόκων το χρόνο, με επιτόκιο r/m, για mt περιόδους) τότε:

$$S = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

• Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$S = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P\left[\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{m/r}\right]^{rt}$$

Προηγουμένως δείξαμε ότι η σχέση $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \simeq 2,71828$ όταν $n \to \infty$. Επομένως, στην παραπάνω σχέση θεωρώντας ως συχνότητα (m) ανατοκισμού το διηνεκές, δηλαδή με ***συνεχή ανατοκισμό (continuously compounded)***, η σχέση που βρίσκεται στην παρένθεση αντικαθίσταται από το e και το τελικό ποσό της αρχικής επένδυσης ισούται με:

$$S = Pe^{rt}$$

Παράδειγμα:

Η τελική αξία S, € 100 επενδυμένων με επιτόκιο 10% σε 2 χρόνια θα είναι:

i) Ετήσιο ανατοκισμό (Annually), $S = P(1+r)^t$, όπου $r = 0,1$ και $t = 2$ είναι:

$$S = 100(1+0,10)^2 = 100(1,1)^2 = 100(1,21) = €121$$

ii) Εξαμηνιαίο ανατοκισμό (Semi-annually), $S = P(1+r/m)^{mt}$, όπου $m = 2$, $t = 2$ είναι:

$$S = 100(1+0,10/2)^{2(2)} = 100(1+0,05)^4 = 100(1,2155) = €121,55$$

iii) Τριμηνιαίο ανατοκισμό (Quarterly), $S = P(1+r/m)^{mt}$, όπου $m = 4$ είναι:

$S = 100(1+0,10/4)^{2(4)} = 100(1+0,025)^8 = 100(1,2184) = €\ 121,84$

iv) Συνεχή ανατοκισμό (Continuously), $S = Pe^{rt}$, είναι:

$$S = 100e^{0,1(2)} = 100e^{0,2} = 100(1,2214) = €122,14$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να υπολογισθούν στο ***Excel***, εφαρμόζοντας την ακόλουθη χρηματοοικονομική συνάρτηση, η οποία υπολογίζει το ανατοκιζόμενο ποσό ενός αρχικού ποσού ως εξής: ***= FV(interest rate per period, total number of payment periods, payment per period, present value, type)***. Ο παράγοντας ***type*** στον τύπο αυτό αντιπροσωπεύει το χρόνο που γίνεται η πληρωμή. Εάν η πληρωμή πραγματοποιείται στην αρχή της χρονικής περιόδου τότε το ***type*** ισούται με την μονάδα, εάν η πληρωμή πραγματοποιείται στο τέλος της χρονικής περιόδου τότε το type ισούται με το μηδέν (ή μπορεί να παραληφθεί). Η χρησιμοποίηση αυτού του τύπου για κάθε ένα από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται στα κελιά b14 με b17 του φύλλου εργασίας του Excel που βλέπουμε στο παράρτημα του κεφαλαίου. Έτσι:

• μελλοντική αξία ποσού € 100 σήμερα (εκροή −100), με επιτόκιο 10%, με ετήσιο ανατοκισμό, για 2 χρόνια είναι: ***= FV(0.1,1*2,0,-100,0)***

• μελλοντική αξία ποσού € 100 σήμερα, με επιτόκιο 10%, με εξαμηνιαίο ανατοκισμό, για 2 χρόνια είναι: ***= FV(0.1/2,2*2,0,-100)***

• μελλοντική αξία ποσού € 100 σήμερα, με επιτόκιο 10%, με τριμηνιαίο ανατοκισμό, για 2 χρόνια είναι: ***= FV(0.1/4,4*2,0,-100)***

• μελλοντική αξία ποσού € 100 σήμερα, με επιτόκιο 10%, με διαρκή ανατοκισμό (ας υποθέσουμε ημερησίως = 365), για 2 χρόνια είναι: ***= FV(0.1/365,365*2,0,-100)***

3.11 Αντίστροφες συναρτήσεις (Inverse functions)

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί με συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$. Δηλαδή δοθέντος των x, οι τιμές των y καθορίζονται μέσω του κανόνα f(x).

Παράδειγμα:

$$y = 2x - 5$$

Η συνάρτηση η οποία εκφράζει το x σε όρους του y καλείται ***αντίστροφη συνάρτηση (inverse function)*** και συμβολίζεται (όταν ορίζεται) ως $x = f^{-1}(y)$

Παράδειγμα:

Λύνουμε την συνάρτηση $y = 2x - 5$ ως προς x και έχουμε την ακόλουθη αντίστροφη συνάρτηση της $y = 2x - 5$, $x = (y + 5)/2$

Γραφικά γίνεται ανταλλαγή των αξόνων και το διάγραμμα σχεδιάζεται ως συνήθως. Οι αντίστροφες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, η οποία διχοτομεί το I και III τεταρτημόριο.

Παράδειγμα:

Έστω η ποσότητα ζήτησης ενός προϊόντος (q) περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $q = f(p)$. Συγκεκριμένα $q = 6 - 3p$, όπου p συμβολίζει την τιμή του προϊόντος. Η αντίστροφη συνάρτηση της παραπάνω εξίσωσης, $p = f^{-1}(q) - g(q)$ είναι:

$$p = \frac{6 - q}{3} = 2 - \frac{1}{3}q$$

Οι $q = f(p)$ και $p = g(q)$ αποτελούν αντίστροφες συναρτήσεις.

Λογαριθμικές συναρτήσεις, οι οποίες εξετάζονται παρακάτω, αποτελούν παραδείγματα αντίστροφων συναρτήσεων των εκθετικών συναρτήσεων.

3.12 Λογαριθμικές συναρτήσεις (Logarithmic functions)

Η λογαριθμική συνάρτηση αποτελεί την αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης. Έτσι, ο λογάριθμος του x, είναι η δύναμη στην

οποία μια βάση, a, πρέπει να υψωθεί για να δώσει τον αριθμό, x, $x = a^y$. Μαθηματικά εκφρασμένο γράφεται ως:

$$y = \log_a x, \quad \text{για } a > 0 \text{ και } a \neq 1$$

Διαβάζεται, ο λογάριθμος του x με βάση το a είναι ο y. Γενικότερα,

$$y = \log_a f(x)$$

Παραδείγματα:

1. $\log_5 25$ είναι 2. Ο λογάριθμος του 25 με βάση 5 είναι 2, δεδομένου ότι το 5 θα πρέπει να υψωθεί στη δύναμη του 2 για να παράξει το 25. Δηλαδή $\log_5 25 = 2$

2. Ο λογάριθμος του 100 με βάση 10 είναι 2, δεδομένου ότι η βάση 10 θα πρέπει να υψωθεί στη δύναμη του 2 για να παράξει 100. Δηλαδή, $\log_{10} 100 = 2$

Ο Πίνακας 3.4 παρουσιάζει μερικά παραδείγματα λογαριθμικών συναρτήσεων και των αντίστροφων τους, εκθετικών συναρτήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4: ***Πίνακας εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων***

Εκθετική	Λογαριθμική	Εκθετική	Λογαριθμική
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$	$10^{-1} = 0{,}1$	$\log_{10} 0{,}1 = -1$
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$	$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$	$36^{1/2} = 6$	$\log_{36} 6 = 1/2$

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες βάσεις των λογαρίθμων είναι το 10 και το e (=2,7183). Στην πρώτη περίπτωση οι λογάριθμοι είναι γνωστοί ***ως κοινοί λογάριθμοι (common logarithms)***, στη δεύτερη ως ***φυσικοί (natural) λογάριθμοι***. Σε συντομογραφία αυτοί οι λογάριθμοι είναι οι $\log_{10} x$ ή απλά logx, και $\log_e x$ ή απλά lnx, αντίστοιχα.

Απλές ***αριθμομηχανές (calculators)***, όπως επίσης και λογισμικά Η/Υ όπως το ***Excel***, μπορούν να υπολογίσουν λογαριθμικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα κοινοί logs, φυσικοί logs και logs σε οποιαδήποτε βάση, a, μπορούν να εκτιμηθούν στο ***Excel*** μέσω των ακόλουθων συναρτήσεων, αντίστοιχα: ***=log10() or =log(), =ln(), =log(number, base)***. Έτσι, στα κελιά b18 έως b20 στο παράρτημα του κεφαλαίου, εφαρμό-

ζονται οι παραπάνω συναρτήσεις και εκτιμώνται αντίστοιχα, οι $= \log(5) = 0{,}69897$, $= \ln(5) = 1{,}609438$, $= \log(5{,}5) = 1$

Λογαριθμικοί πίνακες και αριθμομηχανές δίνουν συνήθως μόνο τους λογαρίθμους με βάση 10 ή e. Όταν ο λογάριθμος έχει βάση διαφορετική από το 10 ή το e, απαιτείται να γίνει μετατροπή της βάσης πριν να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή του. Έτσι η βάση του $\log_a x$ μπορεί να αλλάξει από a σε e, ως εξής:

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Παραδείγματα:

1. $\log_5 x = \ln x / \ln 5$
2. $\log_a e = 1/\log_e a$, καθώς $\log_e e = 1$

3.12.1 Ιδιότητες των λογαρίθμων

Οι παρακάτω ***ιδιότητες των λογαρίθμων*** είναι χρήσιμες, κατά τη λύση εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων.

Ιδιότητα	**Παράδειγμα**
$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_{10}(10 \cdot 1000)$ $= \log_{10}10 + \log_{10}1000 = 1 + 3 = 4$
$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$	$\log_{10}(10000/10)$ $= \log_{10}10000 - \log_{10}10 = 4 - 1 = 3$
$\log_a x^n = n\log_a x$	$\log_{10}100^2 = 2\log_{10}100 = 2 \times 2 = 4$
$\log_a a = 1$	$\log_{10}10 = 1$, όπου $10^1 = 10$
$\log_a 1 = 0$	$\log_{10}1 = 0$, όπου $10^0 = 1$
$a^{\log_a x} = x$	$10^{\log_{10}100} = 10^2 = 100$, όπου $\log_{10}100 = 2$
$\log_a(a^x) = x$	$\log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5$
$\log_a(x \pm y) \neq \log_a x \pm \log_a y$	

3.12.2 Ασκήσεις εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

1. Να αναλυθούν οι ακόλουθες εκφράσεις:

i. $\ln\left(\frac{1}{e^{2x}}\right) = \ln 1 - \ln e^{2x} = 0 - 2x(\ln e) = -2x(1) = -2x$

ii. $\ln(x^5\sqrt{y}) = \ln(x^5 y^{1/2}) = \ln x^5 + \ln y^{1/2} = 5(\ln x) + 1/2(\ln y)$

iii. $\ln\left(\sqrt{\frac{x^7}{y^4}}\right) = \ln\frac{\sqrt{x^7}}{\sqrt{y^4}} = \ln(x^{7/2}/y^{4/2}) = \ln x^{7/2} - \ln y^{4/2}$
$= \frac{7}{2}(\ln x) - \frac{4}{2}(\ln y) = \frac{1}{2}(7\ln x - 4\ln y)$

2. Να λυθούν οι ακόλουθες εξισώσεις:

i. $\ln x^2 + \ln x = 9 \Rightarrow 2(\ln x) + \ln x = 9 \Rightarrow 3(\ln x) = 9$
$\Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$ και χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή προκύπτει ότι $x = 20{,}086$.

ii. $e^{-1,5(x+2)} = 1 \Rightarrow \ln e^{-1,5(x+2)} = \ln 1 \Rightarrow -1,5(x+2)(\ln e) = 0$
$\Rightarrow -1,5(x+2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

iii. $\log 10^{2x} = \log 4 \Rightarrow 2x\log 10 = \log 4 \Rightarrow 2x = \log 4$
$\Rightarrow x = 0{,}60201/2 \Rightarrow x = 0{,}301$.

iv. $\ln x^5 + 2\ln x = 4 \Rightarrow 7\ln x = 4 \Rightarrow \ln x = 4/7 \Rightarrow x = e^{4/7} \Rightarrow x = 1,77$

3. Η διαχρονική αξία ενός εργοστασιακού μηχανήματος:

Σε προηγούμενο παράδειγμα ορίσαμε ότι η αξία ενός μηχανήματος (V) μεταβάλλεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $V = 100.000e^{-0,08t}$, όπου t είναι ο χρόνος. Γενικότερα $V = V_0e^{-0,08t}$, όπου V_0 είναι η τιμή αγοράς του μηχανήματος, ενώ V είναι η τρέχουσα τιμή του. Πόσα χρόνια θα πρέπει να περάσουν προκειμένου η αξία του να μειωθεί στο μισό;

Απάντηση:

Η αξία ενός μηχανήματος θα μειωθεί στο μισό όταν $V/V_0 = 0{,}5$. Έτσι λύνουμε την εξίσωση $0,5 = e^{-0,08t}$ ως προς t. Λαμβάνοντας τους λογάριθμους και των δύο πλευρών της εξίσωσης προκύπτει $\ln(0{,}5) = -0{,}08t$. Δηλαδή, $t = -0{,}693/(-0{,}08) = 8{,}66$ χρόνια.

3.12.3 Ιδιότητες και γραφική απεικόνιση λογαριθμικών συναρτήσεων

• Εξ ορισμού, ο log του x με βάση a ($\log_a x$), είναι η δύναμη y, στην οποία θα πρέπει να υψωθεί το a για να δώσει το x. Δηλαδή, $x = a^y$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς y προκύπτει $y = \log_a x$. Δηλαδή, $y = \log_a x$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = a^x$.

• Γραφικά, περιστρέφουμε τους άξονες κατά 90° αντίστροφα των δεικτών του ρολογιού και αναστρέφουμε το διάγραμμα της $y = a^x$ για να αποκτήσουμε το διάγραμμα του $\log_a x$. Επομένως τα διαγράμματα των λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων αποτελούν το ένα το αντίστροφο του άλλου, σε σχέση με τη γραμμή των 45° που περνάει από την αρχή των αξόνων.

• Το πεδίο ορισμού των λογαριθμικών συναρτήσεων ορίζεται ως το σύνολο των θετικών αριθμών x (οι λογάριθμοι των αρνητικών αριθμών δεν υφίστανται), ενώ το πεδίο τιμών (οι τιμές του y) είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα των x στο σημείο 1, δηλαδή $\log_a 1 = 0$

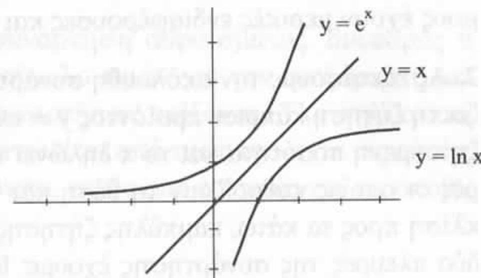
• Όταν: $a > 1$, τότε: για $\forall\, x > 1$, $y > 0$, ενώ για $\forall\, x \in (0, 1)$, $y < 0$, με τον αρνητικό άξονα των y να είναι ασυμπτωτικός στην γραφική παράσταση.

• Όταν: $0 < a < 1$, τότε: για $\forall\, x > 1$, $y < 0$, και για $\forall\, x \in (0, 1)$, $y > 0$. Σε αυτή την περίπτωση ο θετικός άξονας των y είναι ασυμπτωτικός άξονας, και η συνάρτηση μειώνεται από τις μεγάλες θετικές τιμές, μέσω του μηδέν, σε αρνητικές τιμές όταν το x ξεπεράσει το 1

Στο Γράφημα 3.13 συγκρίνονται οι εκθετικές και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση e. Έτσι, καθώς ο lnx είναι η αντίστροφη συνάρτηση του $y = e^x$, η γραφική παράσταση της μιας συνάρτησης είναι η αντίστροφη εικόνα της άλλης, όπου η γραμμή των 45°, $y = x$, αποτελεί τον άξονα συμμετρίας.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.13: ***Πίνακας και γραφική απεικόνιση των αντίστροφων συναρτήσεων $y = exp(x)$ και $y = ln(x)$***

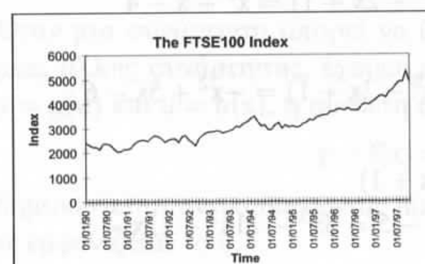
x	y = exp(x)	x	y = lnx
−2	0.1353	0.135	−2
−1	0.3679	0.368	−1
0	1	1	0
1	2.7183	2.718	1
2	7.3891	7.389	2

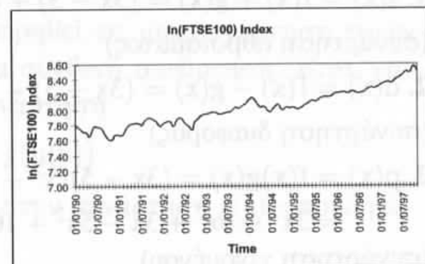


Παραδείγματα:

1. Μία χρήσιμη ιδιότητα των λογαρίθμων είναι ότι, όταν παίρνουμε το λογάριθμο μιας μεταβλητής που παίρνει μεγάλες τιμές αλλάζει η κλίμακα τιμών, με αποτέλεσμα οι τιμές του λογάριθμου της μεταβλητής να κινούνται σε μικρότερο διάστημα. Για παράδειγμα το Γράφημα 3.14 παρουσιάζει τη χρονολογική σειρά του FTSE100. Όπως φαίνεται στο γράφημα η σειρά παίρνει σχετικά υψηλές τιμές δηλαδή μεταξύ του 2000 και 5000. Λαμβάνοντας τους λογάριθμους του FTSE100 δημιουργείται μία κλίμακα τιμών μικρότερη και πιο εύχρηστη, η οποία κυμαίνεται μόνο μεταξύ του 7,6 και 8,6. Οι ιδιότητες της σειράς δεν χάνονται. Το μόνο που αλλάζει είναι η κλίμακα των τιμών της συνάρτησης λόγω του λογαριθμικού μετασχηματισμού της.

ΓΡΑΦΗΜΑ 3.14: ***Σχηματική απεικόνιση των χρονοσειρών FTSE100 και ln(FTSE100)***





Τέτοιοι λογαριθμικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται ευρέως στην εμπειρική έρευνα προκειμένου να αλλαχθεί η κλίμακα των μεταβλητών, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις οι οποίες εμπεριέχουν λογαρίθμους έχουν μερικές ενδιαφέρουσες και εύχρηστες ιδιότητες.

2. Ας εξετάσουμε την ακόλουθη συνάρτηση υπερβολής, η οποία εκφράζει τη ζήτηση κάποιου προϊόντος $y = cx^{-a} = c/x^a$, όπου το y δηλώνει τη ζητούμενη ποσότητα και το x δηλώνει την τιμή. Τα c και a είναι σταθερές οι οποίες καθορίζουν τη θέση και το σχήμα της μη γραμμικής, με κλίση προς τα κάτω, καμπύλης ζήτησης. Τώρα, λογαριθμίζοντας και τις δύο πλευρές της συνάρτησης έχουμε: $\ln y = \ln(cx^{-a}) = \ln c - a\ln x$. Συμβολίζοντας $Y^* = \ln y$, $A = \ln c$ και $X^* = \ln x$, τότε μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε $Y^* = A - aX^*$. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός των μεταβλητών άλλαξε τη μη γραμμική καμπύλη ζήτησης, με μεταβλητές y και x, σε γραμμική συνάρτηση με μεταβλητές Y^* και X^*. Η μελέτη της δεύτερης αυτής συνάρτησης παρέχει τις ίδιες πληροφορίες με την πρώτη. Ωστόσο, είναι πιο εύκολο να εκτιμηθούν οι γραμμικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας κάποια δεδομένα και να αξιολογηθούν οι ιδιότητες τους, απ' ότι οι μη γραμμικές συναρτήσεις.

3.13 Συνδυασμοί συναρτήσεων (Combinations of functions)

Συναρτήσεις μπορούν να συνδυαστούν αλγεβρικά προκειμένου να σχηματίσουν μια επακόλουθη συνάρτηση. Για παράδειγμα εάν:

$$f(x) = 3x - 5 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1$$

αυτές οι συναρτήσεις μπορούν να συνδυαστούν για να σχηματίσουν μια νέα συνάρτηση. Τα ακόλουθα παραδείγματα είναι αθροίσματα, διαφορές, γινόμενα και πηλίκα συναρτήσεων.

1. $s(x) = f(x) + g(x) = (3x - 5) + (x^2 - 2x + 1) = x^2 + x - 4$
(συνάρτηση αθροίσματος)

2. $d(x) = f(x) - g(x) = (3x - 5) - (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 5x - 6$
(συνάρτηση διαφοράς)

3. $p(x) = f(x)g(x) = (3x - 5)(x^2 - 2x + 1)$
$= 3x^3 - 6x^2 + 3x - 5x^2 + 10x - 5 = 3x^3 - 11x^2 + 13x - 5$
(συνάρτηση γινομένου)

4. $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(3x - 5)}{(x^2 - 2x + 1)}$
(συνάρτηση πηλίκου)

Το πεδίο ορισμού για μια συνάρτηση αθροίσματος, διαφοράς ή γινομένου αποτελείται από ένα σύνολο τιμών για την ανεξάρτητη μεταβλητή στο οποίο και οι δύο συναρτήσεις ορίζονται. Για πηλίκα συναρτήσεων το πεδίο ορισμού αποτελείται από τιμές του x για τις οποίες οι δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται, εκτός από τις τιμές για τις οποίες προκύπτει ότι $g(x) = 0$

Παραδείγματα:

1. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους μιας επιχείρησης δίδονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες εξισώσεις: $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$, όπου x συμβολίζει την ποσότητα ζήτησης και παραγωγής του προϊόντος που παράγει η επιχείρηση. Η συνάρτηση κέρδους, την οποία συμβολίζουμε ως Π(x), είναι ένας συνδυασμός των παραπάνω συναρτήσεων, δεδομένου ότι το κέρδος ισούται με το συνολικό έσοδο μείον το συνολικό κόστος. Έτσι:

$$\pi(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 2x - (3x^2 + 4x - 1)$$
$$= -4x^2 - 6x + 1$$

2. Ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση για έναν τύπο αυτοκινήτου (q), επηρεάζεται από την τιμή του αυτοκινήτου (p), και περιγράφεται από την ακόλουθη γραμμική συνάρτηση $q = 100 - 5p$. Η συνάρτηση εσόδων (r(p)) παράγεται ως το γινόμενο δύο συναρτήσεων.

$$r(p) \equiv p\,q(p) = p(100 - 5p) = 100p - 5p^2$$

3.14 Σύνθετες συναρτήσεις (Composite functions)

Όταν μια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση τιμών μιας άλλης συνάρτησης, έχουμε μια σύνθετη συνάρτηση. Έτσι, εάν $y = g(u)$ και $u = h(x)$, η σύνθετη συνάρτηση:

$$y = f(x) = g(h(x))$$

δημιουργείται αντικαθιστώντας h(x) στην συνάρτηση g(u), οπουδήποτε εμφανίζεται το u.

Παραδείγματα:

1. Εάν: $y = \ln u$ και $u = h(x) = x - 1$ τότε $g(h(x)) = f(x) = y = \ln(x-1)$

2. Εάν: $y = g(u) = 2u^2$ και $u = h(x) = x^2 - 2x$, να καθοριστεί η $g(h(x))$

$$g(h(x)) = 2(x^2 - 2x)^2 = 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2$$

3. Η συνάρτηση $y = g(x) = 3x + 20$ δείχνει ότι το ημερομίσθιο (y) ενός πωλητή, εξαρτάται από το αριθμό των μονάδων που θα πουλήσει κάθε μέρα (x). Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα που πωλείται ημερησίως από κάποιο πωλητή καθορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης $h(p) = 10 - 2p$. Προκειμένου να βρεθεί ο ημερήσιος μισθός του πωλητή ως συνάρτηση της τιμής του πωληθέντος προϊόντος, δηλαδή η $g(h(p))$, αντικαθιστάται το x στη $g(x)$, με τη σχέση που δίδεται από την $h(p)$. Δηλαδή:

$$g(h(p)) = 3(10 - 2p) + 20 = 30 - 6p + 20 = 50 - 6p$$

3.15 Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση της μορφής $F(y, x) = 0$ ονομάζεται πεπλεγμένη επειδή όλες οι μεταβλητές που την ορίζουν είναι στην ίδια μεριά της εξίσωσης. Δεν γίνεται διάκριση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, όπως στην $y = f(x)$, όπου η y είναι εξαρτημένη από την x. Για παράδειγμα, οι ακόλουθες εξισώσεις αποτελούν συναρτήσεις πεπλεγμένης μορφής:

$$F(x, y) = x + 3y - 2 = 0$$

$$F(x, y) = -y^3 + 3x^2 + 1 = 0$$

Μια συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$ μπορεί να μετατραπεί σε πεπλεγμένη μεταφέροντας όλους τους όρους της στην ίδια πλευρά της εξίσωσης. Το αντίστροφο δεν είναι πάντα εύκολο ή εφικτό.

Παράδειγμα:

$$y = f(x) : y = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow F(y, x) = 0 : y - 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

3.16 Βαθμός ομογένειας μιας συνάρτησης (παραγωγής) Degree of homogeneity of a (production) function

Μια συνάρτηση της μορφής $z = f(x, y)$ λέγεται ότι έχει βαθμό ομογένειας n εάν για κάθε πραγματικό αριθμό κ

$$f(\kappa x, \kappa y) = \kappa^n f(x, y)$$

Δηλαδή η δύναμη του κ καθορίζει το βαθμό ομογένειας της συνάρτησης.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $z = x^{0,4}y^{0,3}$ έχει βαθμό ομογένειας 0,7 αφού

$$f(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^{0,4}(\kappa y)^{0,3} = \kappa^{0,4+0,3}x^{0,4}y^{0,3} = \kappa^{0,7}x^{0,4}y^{0,3}$$

2. Η συνάρτηση $z = \frac{4x}{2y}$ έχει βαθμό ομογένειας 0 αφού:

$$f(\kappa x, \kappa y) = \frac{4(\kappa x)}{3(\kappa y)} = \frac{\kappa}{\kappa}\left(\frac{4x}{3y}\right) = 1\left(\frac{4x}{3y}\right), \text{ καθώς } \frac{\kappa}{\kappa} = \kappa^0 = 1$$

3. Η συνάρτηση $z = 16x + 18y$ έχει βαθμό ομογένειας 1 αφού

$$f(\kappa x, \kappa y) = 16\kappa x + 18\kappa y = \kappa(16x + 18y)$$

4. Η συνάρτηση $z = x^2 + 6xy + 7y^2$ έχει βαθμό ομογένειας 2 αφού

$$f(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^2 + 6(\kappa x)(\kappa y) + 7(\kappa y)^2 = \kappa^2(x^2 + 6xy + 7y^2)$$

Οι συναρτήσεις των παραδειγμάτων 1 και 2 λέγεται ότι έχουν φθίνουσες οικονομίες μεγέθους/κλίμακας (decreasing returns to scale) καθώς ο βαθμός ομογένειας της συνάρτησης είναι μικρότερος από 1. Αυτό σημαίνει ότι εάν x και y συμβολίζουν τους συντελεστές παραγωγής ενώ z συμβολίζει την ποσότητα παραγωγής, όταν οι συντελεστές παραγωγής αυξηθούν κατά ένα ποσοστό κ η ποσότητα που παράγεται αυξάνεται κατά ένα ποσοστό χαμηλότερο του κ.

Όταν η ποσότητα παραγωγής αυξάνεται κατά ποσοστό ίσο με την αύξηση στους συντελεστές παραγωγής, όπως στο παράδειγμα 3 όπου $n = 1$, λέγεται ότι υπάρχουν σταθερές οικονομίες κλίμακος.

Τέλος, όταν η ποσότητα παραγωγής αυξάνεται κατά ένα ποσοστό μεγαλύτερο από το κ υπάρχουν αύξουσες οικονομίες κλίμακας στην παραγωγή. Το παράδειγμα 4 παριστάνει μια τέτοια συνάρτηση παραγωγής με αύξουσες οικονομίες κλίμακας αφού $n = 2 > 1$.

3.17 Ισοϋψείς καμπύλες

Έστω f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Οι καμπύλες που καταγράφονται από τις εξισώσεις $f(x, y) = κ$, όπου κ είναι μια σταθερά, λέγονται ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης f. Δηλαδή δείχνει πού η γραφική παράσταση έχει ύψος κ.

Παραδείγματα:

1. Οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης $f(x, y) = 5 + x - 3y$ περιγράφονται από το γενικό τύπο:

$$5 + x - 3y = κ \quad ή \quad x - 3y + (5 - κ) = 0$$

Για τις τιμές $κ = -2,\ 0,\ 4$ οι ισοϋψείς είναι:

$κ = -2: \ x - 3y + 7 = 0$
$κ = 0 \ : \ x - 3y + 5 = 0$
$κ = 4 \ : \ x - 3y + 1 = 0$

Επομένως οι ισοϋψείς είναι μια οικογένεια καμπυλών (ευθειών) με κλίση $\frac{1}{3}$. Είναι παράλληλες μεταξύ τους και το ύψος τους διαφέρει ανάλογα με την τιμή της σταθεράς κ.

2. Οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης $f(x, y) = 4 + 4x^2 + 3y$ περιγράφονται από το γενικό τύπο:

$$4 + 4x^2 + 3y = κ \quad ή \quad 3y + 4x^2 + (4 - κ) = 0$$

Είναι μια ομάδα συναρτήσεων δευτέρου βαθμού, με ακριβώς το ίδιο σχήμα, όμως η θέση (το «ύψος») τους διαφέρει ανάλογα με την τιμή του κ.

Για τις τιμές $κ = -5,\ 0,\ 10$ οι ισοϋψείς είναι:

$κ = -5: \ 3y + 4x^2 + 9 = 0$
$κ = 0 \ : \ 3y + 4x^2 + 4 = 0$
$κ = 10 \ : \ 3y + 4x^2 - 6 = 0$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Μερικές μαθηματικές και χρηματοοικονομικές συναρτήσεις στο Excel

Microsoft Excel - Maths 2

B2 = =ROUND(A2,2)

	A	B	C	D	E	F
1	Μερικές Συναρτήσεις του Excel, Μαθηματικές και Χρηματοοικονομικές					
2	4.64321	4.64	=round(a2,2)		Στρογγυλοποίηση Αριθμών	
3		4	=int(a2)		Ακέραιο μέρος αριθμού	
4	-6	6	=abs(a4)		Απόλυτη τιμή	
5		2.1548109	=sqrt(a2)		Τετραγωνική ρίζα	
6		#NUM!	=sqrt(a4)			
7		36	=power(a4,2)		Δύναμη αριθμού	
8		36	=a4^2		Το αντίστοιχο του παραπάνω σε εξίσωση	
9	27	3	=power(a9,1/3)		3η ρίζα του 27	
10		25.64321	=sum(a2,a4,a9)		Τελεστής άθροισης	
11		13.28321	=sum(a2:b4)			
12	3	20.0855369	=EXP(a12)		Εκθετική δύναμη	
13	3	6	=FACT(A13)		Παραγοντικό	
14		£121.00	= FV(0.1,2,0,-100,0)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 1 φορά το έτος, επιτόκιο 10%	
15		£121.55	= FV(0.1/2,2*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 2 φορές το έτος, επιτόκιο 10%	
16		£121.84	= FV(0.1/4,4*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός 4 φορές το έτος, επιτόκιο 10%	
17		£122.14	= FV(0.1/365,365*2,0,-100)		Μελλοντική αξία ποσού 100, σε 2 έτη, ανατοκισμός ημερησίως, επιτόκιο 10%	
18	5	0.69897	=log(a18)		Κανονικός λογάριθμος, βάση 10	
19		1.60943791	=ln(a18)		Φυσικός λογάριθμος, βάση e	
20		1	=log(a18,5)		Λογάριθμος με βάση το 5	
21						
22						
23		Παράδειγμα διπλής άθροισης				
24	Υπολογισμός συνολικού κόστους γεωργικής επιχείρησης στους τελευταίους 4 μήνες					
25		Μήνας 1	Μήνας 2	Μήνας 3	Μήνας 4	Σύνολο
26	Γη	50	55	54	52	**211**
27	Κεφάλαιο	250	300	360	200	**1110**
28	Εργατικά	900	850	800	1000	**3550**
29	Σύνολο	**1200**	**1205**	**1214**	**1252**	**4871**
30						*=sum(h7:k7)*
31						

Πρόοδοι / Παραδείγματα συναρτήσεων Excel / Ανάλυση Νεκρού Σημείου / Μη Γραμμική Ανάλυση Ν. Σημείο

Ready

Ασκήσεις για λύση

1) Έστω οι συναρτήσεις:

- $y = f(x) = x + 1$
- $y = f(x) = x^2 - 1$

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τα πεδία τιμών τους, δεδομένου ότι $x \in [-4, 10)$.

2) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας γραμμής που διέρχεται από τα σημεία (2,3), (6,5).

3) Τα κεφαλαιουχικά αγαθά μια επιχείρησης, όπως μηχανήματα, κτήρια, κλπ, έχουν μια συγκεκριμένη διάρκεια ζωής. Η φυσική διάρκεια ζωής συνήθως είναι μεγαλύτερη από τη λογιστική. Η τελευ-

ταία αναφέρεται στη διάρκεια απόσβεσης (σταδιακή μείωση) της αξίας του μηχανήματος που υφίσταται κατά τη χρήση του. Μια μέθοδος υπολογισμού της απόσβεσης είναι η ευθεία μέθοδος. Μηχάνημα κοστίζει σήμερα $V = 100.000$ ευρώ, με λογιστική αξία ανά έτος υπολογιζόμενη με την ευθεία μέθοδο σε $t = 5$ έτη.

a) Ποια μαθηματική συνάρτηση περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη της λογιστικής αξίας του μηχανήματος;

b) Να δειχτεί σε πίνακα το ποσό απόσβεσης και η λογιστική αξία του μηχανήματος ανά έτος και σε γράφημα να κατασκευαστεί η τελευταία.

c) Έστω ότι η υπολειμματική αξία του μηχανήματος είναι 10.000 ευρώ, η οποία ισοδυναμεί με την αξία διάλυσης του μετάλλου. Να προστεθούν δύο στήλες στον παραπάνω πίνακα όπου να φαίνονται οι αποσβέσεις και η λογιστική αξία του μηχανήματος ανά έτος.

d) Ποια μαθηματική εξίσωση περιγράφει τώρα τη διαχρονική εξέλιξη της λογιστικής αξίας του μηχανήματος;

4) Το οικονομικό έτος 2006 στην Ελλάδα, η φορολογική κλίμακα μισθωτών και συνταξιούχων ορίζεται όπως στον ακόλουθο πίνακα.

Κλιμάκιο Εισοδήματος, Α/Α	Κλιμάκιο Εισοδήματος	Συνολικό Εισόδημα	Φορολογικός Συντελεστής Κλιμακίου
1	11000	11000	0
2	2000	13000	0.15
3	10000	23000	0.3
4	Υπερβάλλον	> 23000	0.4

a) Ποια μαθηματική εξίσωση ή σύνολο εξισώσεων προσδιορίζει τους φόρους (T) που αναλογούν σε μισθωτό, δεδομένου του ύψους του φορολογητέου εισοδήματός του (I);

b) Χρησιμοποιώντας την απάντηση στο σκέλος α) της άσκησης, να προσδιοριστούν οι φόροι για τέσσερις μισθωτούς με εισοδήματα €10.000, €12.000, €20.000 και €100.000, αντίστοιχα.

c) Σε φύλλο εργασίας του Excel, να δημιουργηθεί πίνακας και γράφημα στο οποίο να εμφανίζονται ανά 1.000 € (στο διάστημα εισοδημάτων 1.000 € – 30.000 €) φορολογητέου εισοδήματος ο αναλογούν φόρος και να υπολογιστεί ο φόρος κάθε κλιμακίου.

d) Το αφορολόγητο ποσό του πρώτου κλιμακίου αυξάνεται κατά 2.000 € εάν ο μισθωτός έχει 2 παιδιά και κατά 10.000 € για 3 παιδιά. Το ποσό με το οποίο προσαυξάνεται το αφορολόγητο ποσό του πρώτου κλιμακίου μειώνει το ποσό του δεύτερου κλιμακίου και εάν αυτό δεν επαρκεί το ποσό του τρίτου κλιμακίου. Να τροποποιηθεί η παραπάνω εξίσωση υπολογισμού του φόρου του αντίστοιχα και να υπολογιστεί η συνολική υποχρέωση φορολογούμενου με εισόδημα 30.000 € σε περίπτωση που έχει 2 παιδιά και 3 παιδιά. Ποιό το ποσό της φορολογικής εξοικονόμησης που προκύπτει από το τρίτο παιδί;

e) Το ποσό του φόρου που προκύπτει από την εξίσωση του σκέλους α) της άσκησης, μειώνεται κατά 20% για έξοδα νοσοκομειακής περίθαλψης, μεταξύ άλλων. Αν το ποσό των μειώσεων είναι μεγαλύτερο του φόρου ο οποίος προκύπτει με βάση τη φορολογική κλίμακα η διαφορά δεν επιστρέφεται. Για 2 άτεκνους μισθωτούς με εισόδημα 30.000 € έκαστος και έξοδα νοσοκομειακής περίθαλψης 2.000 € και 10.000 €, ποιό το ποσό της φορολογικής εξοικονόμησης και ποιά η φορολογική υποχρέωσή τους;

f) Πως διαμορφώνονται οι φόροι για 2 άτεκνους μισθωτούς με εισόδημα 12.000 € και 20.000 € και έξοδα νοσοκομειακής περίθαλψης 2.000 € έκαστος.

5) Να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης $y = x^2 - 10x + 4$.

6) Μια επιδημία εξαπλώνεται σε κάποιο κράτος ως κυβική συνάρτηση του χρόνου. Έστω ο αριθμός των ατόμων που προσβάλλονται από την επιδημία y και ο χρόνος σε ημέρες t. Οι επιδημιολόγοι υπολογίζουν ότι η συνάρτηση που περιγράφει την εξέλιξη της επιδημίας είναι της μορφής $y = 300t^3 - 20t^2$. Πόσοι άνθρωποι έχουν προσβληθεί 10 ημέρες από την έναρξη της επιδημίας;

7) Η αξία ενός μηχανήματος παραγωγής μειώνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε έτη), σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση: $V = 300.000(2,5)^{-0,1t}$.

a) Ποια η αξία του μηχανήματος σε 5 έτη;
b) Ποια η αξία του μηχανήματος όταν αγοράστηκε;

8) Μια βιοτεχνία παιχνιδιών παράγει ένα είδος με κόστος 1.000 ευρώ το κομμάτι. Η διεύθυνση υπολογίζει ότι αν χρεώσει το παιχνίδι X ευρώ θα πουλήσει σε ένα μήνα (7.000 – X) παιχνίδια.
a) Να εκφρασθεί το μηνιαίο κέρδος της βιοτεχνίας ως συνάρτηση της τιμής.
b) Να περιγραφεί γραφικά η συνάρτηση.
c) Με τη βοήθεια του γραφήματος να υπολογισθεί η τιμή που δίνει το μέγιστο κέρδος.

9) Το συνολικό κόστος μιας επιχείρησης είναι 550 όταν η παραγωγή είναι 100 και το σταθερό κόστος είναι 50. Εάν υποθέσουμε ότι το συνολικό κόστος είναι γραμμικό.
a) Να δημιουργηθεί το διάγραμμα του μέσου κόστους (κόστος ανά μονάδα παραγωγής ως συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής) AC.
b) Ποιες είναι οι ασύμπτωτες της συνάρτησης AC;
c) Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της AC και να διερευνηθούν οι τιμές για τις οποίες ισχύει.

10) Σε μια βιομηχανία έχει βρεθεί ότι το κόστος παραγωγής περιγράφεται γραφικά από την ακόλουθη συνάρτηση: $C(x) = 3x + (100/x)$, όπου $C(x)$ είναι το κόστος παραγωγής και x οι μονάδες παραγωγής.
a) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση κόστους.
b) Να συζητηθεί η οικονομική έννοια του παραπάνω γραφήματος.
c) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το κόστος.

11) Η αποδοτικότητα ενός υπαλλήλου που δουλεύει για t εβδομάδες δίνεται από την εξίσωση: $x(t) = 50 - Ae^{-kt}$. Στην αρχή ο υπάλληλος παρήγε 10 μονάδες την ημέρα. Κατά την πρώτη εβδομάδα στην δουλειά ο υπάλληλος μπορούσε να παράγει 20 μονάδες την ημέρα. Πόσες μονάδες παρήγε ο υπάλληλος κατά την πέμπτη εβδομάδα;

12) Έστω η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση είναι $Q + P - 20 = 0$ (Q = ποσότητα, P = τιμή), ενώ η

συνάρτηση του συνολικό κόστους παραγωγής είναι $TC - 48 - 4Q = 0$. Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής συνεπές με τα ακόλουθα επίπεδα κερδών Π = 0, 12 και –20 (ζημιά).

13) Υπολογίζεται ότι μια τεχνολογική καινοτομία διαδίδεται στην οικονομία σύμφωνα με την εξίσωση: $N(t) = \dfrac{20}{3 + 2e^{-0,05t}}$ όπου N αντιπροσωπεύει τον αριθμό των παραγωγών που υιοθετούν την καινοτομία.
a) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση.
b) Πόσοι παραγωγοί έχουν υιοθετήσει ήδη την καινοτομία;
c) Πόσοι θα την έχουν υιοθετήσει σε 5 χρόνια;
d) Ποιός ο αριθμός των επιχειρήσεων που θα υιοθετήσουν την καινοτομία στο μέλλον;

4 Συστήματα Εξισώσεων
(Systems of Simultaneous Equations)

4.1 Εισαγωγή

Ένα σύστημα εξισώσεων είναι ένα σύνολο (περισσότερες από μια) εξισώσεων, οι οποίες περιγράφουν περισσότερες από μία σχέση μεταξύ μεταβλητών. Κατά συνέπεια, απαιτούνται περισσότερες από μια εξισώσεις για την περιγραφή του προβλήματος. Ένα σύστημα m εξισώσεων και n μεταβλητών λέγεται ότι έχει ***διαστάσεις (dimensions)*** m × n.

Παράδειγμα:

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις προσφοράς και ζήτησης για κάποιο προϊόν στην αγορά, π.χ. για αυτοκίνητα. Απαιτούνται δύο εξισώσεις για την περιγραφή της αγοράς αυτοκινήτων. Μια εξίσωση η οποία περιγράφει τις συνθήκες ζήτησης, όπου η ζητούμενη ποσότητα είναι αρνητική συνάρτηση της τιμής, και μια εξίσωση προσφοράς όπου η προσφερόμενη ποσότητα είναι θετική συνάρτηση της τιμής. Αυτές αποτελούν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 μεταβλητές. Εν συντομία, οι διαστάσεις του είναι (2 × 2)

Η λύση σε ένα σύστημα εξισώσεων συνίσταται στο να βρεθούν τιμές των μεταβλητών τέτοιες, ώστε να ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις ταυτόχρονα.

Παράδειγμα:

Στο οικονομικό παράδειγμα περιγραφής της αγοράς του τύπου αυτοκινήτου, ας θεωρήσουμε ότι οι εξισώσεις ζήτησης και προσφοράς για αυτοκίνητα είναι:

$P_d = 100 - 5Q$, όπου P_d είναι η τιμή, σε χιλιάδες ευρώ, στην οποία ζητούνται τα αυτοκίνητα και Q είναι η αντίστοιχη ποσότητα, σε εκατοντάδες αυτοκίνητα.

$P_s = 10 + 4Q$, όπου P_s είναι η τιμή στην οποία προσφέρονται τα αυτοκίνητα, ξανά σε χιλιάδες ευρώ, και Q είναι η αντίστοιχη ποσότητα, ξανά σε εκατοντάδες αυτοκίνητα.

Να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

Σημειωτέον ότι στην οικονομική θεωρία η ζητούμενη και η προσφερόμενη ποσότητα εξαρτάται από τις τιμές, υποδηλώνοντας ότι η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το Q και όχι το P σε κάθε περίπτωση. Οι σχέσεις προσφοράς και ζήτησης που είδαμε στο παράδειγμα είναι στην αντίστροφή τους μορφή, χωρίς αυτό να έχει επίδραση στη λύση του συστήματος. Ο λόγος που παρουσιάσαμε τις εξισώσεις σ' αυτήν τη μορφή είναι διότι στην οικονομική επιστήμη έχει επικρατήσει η συνήθεια να χρησιμοποιούνται οι τιμές στον κάθετο άξονα και οι ποσότητες στον οριζόντιο άξονα.

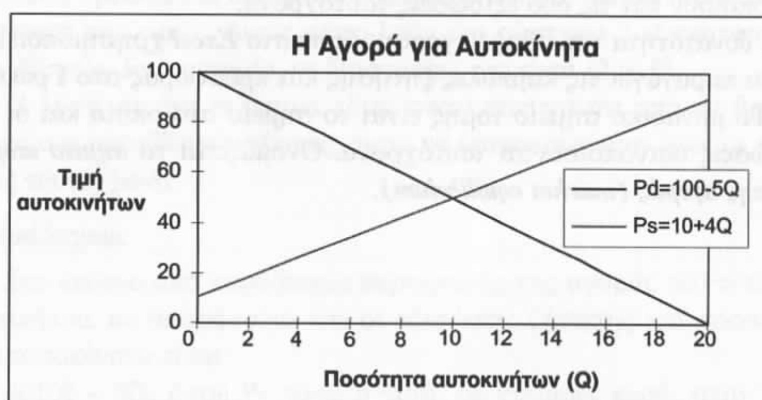
4.2 Γραφική λύση (Graphical solution)

Γραφικά, η πρώτη εξίσωση είναι ευθεία γραμμή με κλίση προς τα κάτω στους P, Q άξονες, με συντελεστή κλίσης −5 και σταθερά 100. Η εξίσωση προσφοράς είναι επίσης ευθεία, αλλά με κλίση προς τα πάνω, με συντελεστή κλίσης +4 και σταθερά 10. Το μοναδικό σημείο στο οποίο οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται αποτελεί τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων, δεδομένου ότι αυτό το σημείο είναι κοινό και στις δύο εξισώσεις. Συνεπώς, οι τιμές των μεταβλητών P και Q στο σημείο αυτό ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα.

Η δυνατότητα του οδηγού γραφημάτων στο ***Excel*** χρησιμοποιείται, για να παράγει τις καμπύλες ζήτησης και προσφοράς στο Γράφημα 4.1. Το μοναδικό σημείο τομής είναι το σημείο στο οποίο και οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Ονομάζεται το ***σημείο ισορροπίας της αγοράς (market equilibrium)***.

ΓΡΑΦΗΜΑ 4.1: ***Σύστημα εξισώσεων προσφοράς και ζήτησης για έναν τύπο αυτοκινήτου, σε μορφή πίνακα και διαγράμματος***

Q	Pd = 100 – 5Q	Ps = 10 + 4Q
0	100	10
2	90	18
4	80	26
6	70	34
8	60	42
10	50	50
12	40	58
14	30	66
16	20	74
18	10	82
20	0	90



4.3 Λύση σε μορφή πίνακα (Table form solution)

Η λύση μπορεί επίσης να βρεθεί σε ***μορφή πίνακα (table form)*** φτιάχνοντας ένα κατάλογο από τις τιμές ζήτησης και προσφοράς για τα διάφορα επίπεδα ποσοτήτων που ανταλλάσσονται στην αγορά. Ο πίνακας που βλέπουμε στο Γράφημα 4.1 παράγεται στο Excel, όπου φαίνεται ότι οι τιμές ζήτησης και προσφοράς είναι ίσες όταν $P = 50$ και $Q = 10$. Το σημείο αυτό αποτελεί τη λύση ισορροπίας στην αγορά.

4.4 Μαθηματική λύση (Mathematical solution)

Η λύση που προκύπτει από τον σχηματισμό ενός πίνακα ή μιας γραφικής παράστασης για ένα σύστημα εξισώσεων μπορεί να μην είναι πάντα προφανής. Πράγματι, απαιτείται αρκετή προσπάθεια για να ταξινομηθούν οι τιμές των εξισώσεων σε πίνακες ή σε γραφικές παραστάσεις, προκειμένου να βρεθεί η τιμή που αντιστοιχεί στη λύση ισορροπίας. Σε κάποιες περιπτώσεις η λύση μπορεί να επιτευχθεί μόνο κατά προσέγγιση. Ωστόσο λύνοντας μαθηματικά το σύστημα των εξισώσεων αποφεύγονται τέτοιου είδους προβλήματα, καθιστώντας ικανή την ακριβή λύση(σεις) του συστήματος. Θα εξετάσουμε την προσέγγιση αυτή παρακάτω.

4.4.1 Η Μέθοδος της απαλοιφής (The method of elimination)

Ένας τρόπος επίτευξης μαθηματικής λύσης σε συστήματα εξισώσεων είναι με τη ***μέθοδο της απαλοιφής***. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται στην πρόσθεση ή την αφαίρεση μιας εξίσωσης με άλλη ή στον πολλαπλασιασμό μιας εξίσωσης με άλλη, έτσι ώστε να απαλειφθεί μια μεταβλητή από το σύστημα. Σε ένα σύστημα δυο εξισώσεων, η εξίσωση που συνάγεται θα είναι συνάρτηση της άλλης μεταβλητής. Η τελευταία αυτή εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς την εναπομείνασα μεταβλητή, η λύση της οποίας θα αντικατασταθεί στη συνέχεια σε μία από τις αρχικές εξισώσεις, προκειμένου να βρεθεί η λύση για την άλλη μεταβλητή.

Παράδειγμα:

Στο παραπάνω παράδειγμα, όπου για να υπάρχει ισορροπία θα πρέπει να ισχύει η σχέση $P_d = P_s = P$, μπορούμε να γράψουμε:

$$P = 100 - 5Q \quad (1)$$

$$P = 10 + 4Q \quad (2)$$

• Αφαιρούμε την (2) από την (1) για να απαλείψουμε τη μεταβλητή P:

$$0 = 90 - 9Q$$

• Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς Q προκύπτει: $Q = 10$
• Τοποθετώντας την τιμή αυτή είτε στην (1) είτε στη (2) βρίσκουμε:

$$P = 50$$

• Έτσι το σημείο (Q, P) = (10, 50) είναι η λύση του συστήματος εξισώσεων ζήτησης-προσφοράς. Αυτό αποτελεί το σημείο ισορροπίας στην αγορά.

4.4.2 Η μέθοδος της αντικατάστασης (The method of substitution)

Εναλλακτική μαθηματική μέθοδος λύσης του συστήματος των δύο εξισώσεων αποτελεί η ***μέθοδος της αντικατάστασης***. Η μέθοδος αυτή λειτουργεί ως εξής:

Λύνουμε μία από τις εξισώσεις, έστω την πρώτη, ως προς τη μια μεταβλητή, έστω ως συνάρτηση της δεύτερης μεταβλητής. Αντικαθιστούμε τη λύση στη δεύτερη εξίσωση. Η εξίσωση που προκύπτει θα είναι συνάρτηση της πρώτης μεταβλητής, έτσι λύνουμε την εξίσωση, για να βρούμε την τιμή αυτής της μεταβλητής. Αυτή η τιμή μπορεί να τοποθετηθεί στην αρχική εξίσωση, για να βρεθεί η τιμή της πρώτης μεταβλητής.

Παράδειγμα:

Ας μελετήσουμε το ίδιο σύστημα εξισώσεων ζήτησης και προσφοράς για τον τύπο του αυτοκινήτου, που εξετάστηκε προηγουμένως.
• Στην εξίσωση (1) η μεταβλητή P γράφεται σε όρους της μεταβλητής Q. Στην περίπτωση αυτή δε χρειάζεται να γίνει κάποια μετατροπή, αφού η P είναι ήδη εκφρασμένη ως συνάρτηση της Q.
• Αντικαθιστούμε αυτήν τη λύση για την P στην εξίσωση (2), προκειμένου να απαλειφθεί η P, και έτσι παραμένει η μία εξίσωση με μόνο μια άγνωστη μεταβλητή, την Q. Δηλαδή, $100 - 5Q = 10 + 4Q$, η οποία παράγει $90 = 9Q$. Επομένως: $Q = 10$
• Αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή στην εξίσωση (1) για να δώσει:

$$P = 100 - 5(10) = 50$$

• Έτσι το σημείο (Q, P) = (10, 50) αποτελεί τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

4.5 Κάποια περαιτέρω παραδείγματα

4.5.1 Ένα αριθμητικό παράδειγμα

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$-3x + 2y = 5 \quad (1)$$

$$4x + 3y = -18 \quad (2)$$

4.5.1.1 Λύση με αντικατάσταση (Solution by substitution)

• Λύνουμε την (1) ως συνάρτηση του x:

$$-3x + 2y = 5 \Leftrightarrow -3x = 5 - 2y \Leftrightarrow x = (2y - 5)/3 \quad (3)$$

• Αντικαθιστούμε την (3) στη (2):

$$4(2y - 5)/3 + 3y = -18 \Leftrightarrow (8/3)y - (20/3) + 3y = -18$$

$$\Leftrightarrow (8/3)y + 3y = +(20/3) - 18$$

$$\Leftrightarrow ((8 + 9)/3)y = +(20 - 54)/3$$

$$\Leftrightarrow (17/3)y = -34/3 \Leftrightarrow 17y = -34 \Leftrightarrow y = -2$$

• Αντικαθιστούμε την τιμή $y = -2$ είτε στη εξίσωση (1) είτε στην (2):

$$4x + 3y = -18 \Leftrightarrow 4x + 3(-2) = -18 \Leftrightarrow 4x - 6 = -18$$

$$\Leftrightarrow 4x = -12 \Leftrightarrow x = -3$$

• Επομένως η λύση του συστήματος είναι: $x = -3$, $y = -2$

4.5.1.2 Λύση με απαλοιφή (Solution by elimination)

• Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με το συντελεστή της x στην (2) και αντιστρόφως:

$$4(-3x+2y) = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow -12x + 8y = 20 \quad (3)$$

$$-3(4x+3y) = (-3)(-18) \Leftrightarrow -12x - 9y = 54 \quad (4)$$

• (4) − (3):

$$(-12x+8y) - (-12x-9y) = 20 - 54$$

$$\Leftrightarrow -12x + 8y + 12x + 9y = -34 \Leftrightarrow 8y + 9y = -34$$

$$\Leftrightarrow 17y = -34 \Leftrightarrow y = -2$$

• Αντικαθιστούμε $y = -2$, είτε στην (1) είτε στην (2), για να βρούμε το x:

$$-3x + 2(-2) = 5 \Leftrightarrow -3x - 4 = 5 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$$

4.5.2 Η εξίσωση μιας ευθείας η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία

Η εξίσωση μιας ευθείας, η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία μπορεί να βρεθεί ως λύση του συστήματος δύο εξισώσεων.

Παράδειγμα:

Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας γραμμής η οποία διέρχεται από τα σημεία (2,4) και (3,6);

Η γενική εξίσωση της ευθείας είναι $y = ax + c$. Αντικαθιστούμε αυτά τα δύο σημεία στη γενική εξίσωση της ευθείας και βρίσκουμε τις εξισώσεις όλων των ευθειών που περνούν από κάθε σημείο:

Για (2, 4): $4 = 2a + c$ (1)

Για (3, 6): $6 = 3a + c$ (2)

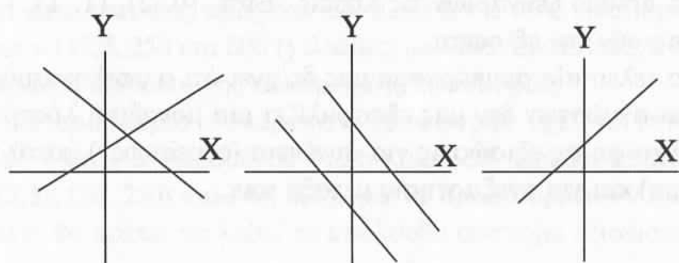
Η μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται και από τα δύο σημεία θα πρέπει να ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα. Το παραπάνω αποτελεί ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους a και c. Έτσι λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς a και c, για να βρούμε το συντελεστή κλίσης, a, και τη σταθερά, c, αυτής της ευθείας:

• Αφαιρούμε την (1) από τη (2): $2 = a$.
• Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην (1), και προκύπτει $c = 0$
• Έτσι, η ζητούμενη εξίσωση της γραμμής είναι $y = 2x$

4.6 Σύνολο πιθανών λύσεων για συστήματα εξισώσεων (2 × 2)

Το Διάγραμμα 4.1 απεικονίζει τις πιθανές λύσεις ενός γενικού (2 x 2) συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Είναι πιθανόν να έχουμε:

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1: ***Γραφική αναπαράσταση πιθανών λύσεων σε σύστημα δύο εξισώσεων***



1. ***μία λύση***, όταν οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο,
2. ***καμία λύση***, στην περίπτωση που οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους και το σύστημα ονομάζεται ***αδύνατο (inconsistent)***,
3. ***άπειρες λύσεις***, όταν οι δύο ευθείες συμπίπτουν (είναι ταυτόσημες). Δηλαδή, όταν η μία είναι πάνω στην άλλη.

Στην περίπτωση (1) οι συντελεστές κλίσεις των δύο ευθειών είναι διαφορετικοί. Στην περίπτωση (2) οι συντελεστές κλίσης είναι ίδιοι, αλλά οι σταθερές των ευθειών διαφέρουν. Στην περίπτωση (3) τόσο οι σταθερές όσο και οι συντελεστές κλίσης είναι ίσες για τις δύο ευθείες.

Μαθηματικά, εάν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας απαλοιφής:

1. προσθέτοντας τις εξισώσεις (ή πολλαπλάσια αυτών) καταλήξουμε σε μια νέα εξίσωση με μια μεταβλητή, τότε υπάρχει ***μοναδική λύση*** στο σύστημα εξισώσεων. Έχουμε ήδη εξετάσει τρία τέτοια παραδείγματα.
2. προσθέτοντας τις εξισώσεις καταλήξουμε σε μια ψευδή σχέση όπως $10 = 0$, το σύστημα είναι ***αδύνατο*** και ***δεν έχει λύση***. Για παράδειγμα, το σύστημα των εξισώσεων $x + y = 1$ και $x + y = 5$ είναι αδύνατο, επειδή οι x και y δεν μπορούν να ικανοποιήσουν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα.

3. προσθέτοντας τις εξισώσεις καταλήξουμε στην ταυτότητα $0 = 0$, οι αρχικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες (ταυτόσημες) και το σύστημα έχει ***άπειρες λύσεις***. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $x + y = 2$ και $2x + 2y = 4$ δεν είναι ανεξάρτητες, επειδή η δεύτερη εξίσωση αποτελεί πολλαπλάσιο της πρώτης. Η μια εξίσωση είναι περιττή και μπορεί να αφαιρεθεί από το σύστημα, έτσι ώστε να παραμείνει μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Έτσι, για παράδειγμα, αφαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση παραμένει η $y = 2 - x$, η οποία δεν δίνει ένα μοναδικό ζευγάρι των (x, y) αλλά ένα άπειρο αριθμό ζευγαριών ως λύσεις. Έτσι, (0, 2), (1, 1), (2, 0), κ.α. ικανοποιούν την εξίσωση.

Αυτό το τελευταίο συμπέρασμα μας δείχνει ότι ο υπολογισμός εξισώσεων και αγνώστων δεν μας εξασφαλίζει μια μοναδική λύση. Πρέπει να ελέγχουμε τις εξισώσεις για συνέπεια (consistency) (κατά πόσο έχουν νόημα) και για ανεξαρτησία μεταξύ τους.

4.7 Λύσεις σε συστήματα εξισώσεων με διαστάσεις μεγαλύτερες από (2 × 2)

Σε συστήματα εξισώσεων (3 × 3), η διαδικασία της απαλοιφής λειτουργεί ως εξής:

- Μειώνουμε το (3 × 3) σύστημα σε ένα (2 × 2) σύστημα απαλείφοντας μια από τις τρεις μεταβλητές. Αυτό γίνεται με την πρόσθεση πολλαπλάσιου μιας εξίσωσης σε οποιαδήποτε από τις δυο άλλες εξισώσεις, με σκοπό να απαλείψουμε μια από τις τρεις μεταβλητές. Έτσι θα καταλήξουμε σε μία εξίσωση με δύο μεταβλητές. Ομοίως, διαλέγουμε ένα άλλο ζευγάρι εξισώσεων, προκειμένου να απαλείψουμε την ίδια μεταβλητή όπως πριν, καταλήγοντας σε μια άλλη εξίσωση με δύο μεταβλητές.
- Λύνουμε το (2 × 2) σύστημα με τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως.
- Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές αυτών των μεταβλητών σε μια από τις αρχικές εξισώσεις, για να βρούμε την τιμή της τρίτης μεταβλητής.

4.8 Ένα (3 × 3) σύστημα εξισώσεων: Καθορισμός της συνάρτησης προσφοράς δευτέρου βαθμού για κάποιο προϊόν

Οι αναλυτές αγοράς κάποιου προϊόντος έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η καμπύλη προσφοράς του προϊόντος είναι περίπου δευτεροβάθμια. Οι προμηθευτές ρωτήθηκαν τι ποσότητες είναι διατεθειμένοι να προσφέρουν σε διαφορετικές αγοραίες τιμές και αυτοί απάντησαν ότι στις αγοραίες τιμές των 25 €, 30 € και 40 € είναι πρόθυμοι να παράγουν 112,5, 250 και 600 (χιλιάδες) μονάδες προϊόντος, αντίστοιχα. Ποια είναι η εξίσωση της συνάρτησης προσφοράς;

Η δευτεροβάθμια συνάρτηση προσφοράς έχει το γενικό τύπο $q_s = ap^2 + bp + c$. Δεδομένου ότι η καμπύλη περνάει από τα σημεία (25, 112,5), (30, 250) και (40, 600), για να προσδιοριστούν οι σταθερές a, b και c, θα πρέπει να λυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$112,5 = 625a + 25b + c \quad (1)$$

$$250 = 900a + 30b + c \quad (2)$$

$$600 = 1600a + 40b + c \quad (3)$$

$$(2) - (1): \quad 137,5 = 275a + 5b \quad (4)$$

$$(3) - (2): \quad 350 = 700a + 10b \quad (5)$$

$$(5) - 2(4): \quad 75 = 150a$$

Επομένως, $a = 0,5$

Αντικαθιστούμε την τιμή του a(= 0,5) σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις (4) ή (5) και λύνουμε για να βρεθεί $b = 0$. Τέλος, αντικαθιστούμε $a = 0,5$, $b = 0$ σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις (1), (2) ή (3) και λύνουμε, οπότε βρίσκουμε $c = -200$. Έτσι, η συνάρτηση προσφοράς είναι: $q_s = 0,5p^2 - 200$

4.9 Γενικά (m × n) συστήματα

Σε γενικά (m × n) συστήματα, εάν $m < n$ (ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος απ' ότι ο αριθμός των μεταβλητών), είτε δεν υπάρχει λύση είτε θα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων στο σύστημα (δηλαδή το σύστημα θα είναι αόριστο).

Για να υπάρχει ***μια μοναδική λύση***, θα πρέπει $m \geq n$, δηλαδή ο αριθμός των εξισώσεων θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών. Στην τελευταία αυτή περίπτωση είναι επίσης δυνατόν να μην υπάρχει καμία λύση ή να υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Επίσης, ένα σύστημα εξισώσεων, ονομάζεται ***συμβιβαστό*** όταν υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο σύστημα. Σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα των εξισώσεων ονομάζεται ***μη συμβιβαστό (inconsistent)***.

Για μεγάλα (m × n) συστήματα εξισώσεων συχνά δεν είναι εύκολο να καθοριστεί κατά πόσον το σύστημα είναι αδύνατο και κατά πόσον οι εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (δηλαδή κατά πόσον καμία εξίσωση στο σύστημα δεν αποτελεί πολλαπλάσιο μιας άλλης εξίσωσης του συστήματος)[1] προκειμένου να έχουμε λύση. Αυτό μπορεί να αποκαλυφθεί μόνο λύνοντας το σύστημα. Προκειμένου να καθορίσουμε την ύπαρξη λύσης στο σύστημα εξισώσεων χωρίς (πριν) να το λύσουμε, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές ***της άλγεβρας των πινάκων (matrix algebra)***. Αυτές μελετούνται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

Η μέθοδος της απαλοιφής ή οποιαδήποτε άλλη μέθοδος λύσης συστημάτων εξισώσεων γίνεται περίπλοκη, όταν τα συστήματα έχουν διαστάσεις μεγαλύτερες από (3 × 3). Επιπλέον, εάν ένα σύστημα δεν έχει λύση, αυτό δεν μπορεί να διαπιστωθεί πριν λυθεί το σύστημα. Είναι πιο εύκολο τότε να χρησιμοποιήσουμε άλγεβρα των πινάκων, πρώτον για να καθορίσουμε το είδος λύσης, εάν υπάρχει, και δεύτερον για να λύσουμε προβλήματα τέτοιου μεγέθους. Στην πράξη λύσεις συστημάτων εξισώσεων που προκύπτουν με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών (όπως και η αποθήκευση δεδομένων) βασίζονται στην άλγεβρα των πινάκων. Αυτή εξετάζεται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

[1] Χρησιμοποιώντας «τεχνική» ορολογία, σε ένα σύστημα εξισώσεων, οι εξισώσεις είναι ανεξάρτητες όταν ουδεμία εξίσωση του συστήματος δεν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό άλλων εξισώσεων του συστήματος.

4.10 Εφαρμογές

4.10.1 Σημείο ισορροπίας σε αγορά με μη γραμμικές συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης

Ας εξετάσουμε τις δευτεροβάθμιες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης για το ίδιο προϊόν, που είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα. Σε κατάσταση ισορροπίας απαιτείται η ζητούμενη και η προσφερόμενη ποσότητα να είναι ίσες. Γράφοντας τις τρεις εξισώσεις μαζί προκύπτει το ακόλουθο (3 × 2) σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, το οποίο θα πρέπει να λυθεί προκειμένου να καθοριστεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

Προσφορά: $q_s = 0{,}5p^2 - 200, \ p \geq 20$

Ζήτηση: $q_d = p^2 - 100p + 2500, \ 0 \leq p \leq 50$

Ισορροπία στην αγορά: $q_d = q_s = q$

Όπως είδαμε προηγουμένως, όταν ο αριθμός των εξισώσεων (3) στο σύστημα είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγνώστων μεταβλητών (2), είναι πιθανόν να έχουμε μια μοναδική λύση. Ας λύσουμε το σύστημα. Η συνθήκη ισορροπίας στην αγορά μας επιτρέπει να εξισώσουμε τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης για να εξαλείψουμε τα q. Έτσι προκύπτει

$$0{,}5p^2 - 100p + 2700 = 0$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι:

$$p_1 = 32{,}177 \quad \text{και} \quad p_2 = 167{,}823$$

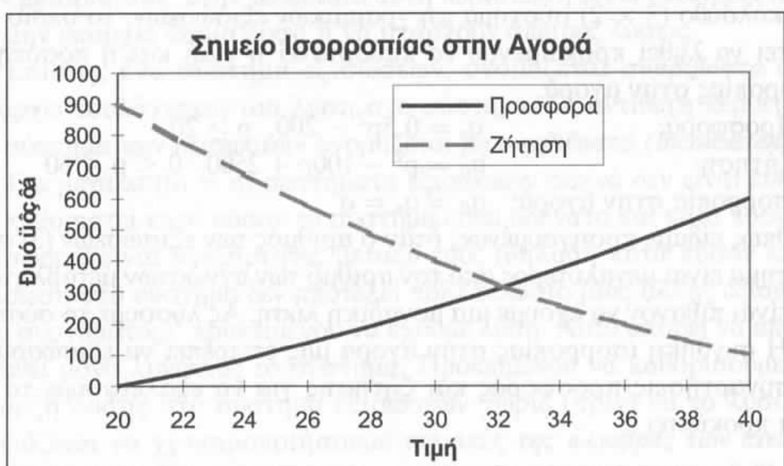
Δεδομένου ότι η τιμή $p = 167{,}823$ βρίσκεται έξω από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ζήτησης, αυτή η λύση απορρίπτεται και η τιμή ισορροπίας είναι 32,177. Η αντίστοιχη ποσότητα ισορροπίας είναι 317,67 χιλιάδες μονάδες. Αυτή προκύπτει αντικαθιστώντας 32,177, όπου p, είτε στη συνάρτηση προσφοράς είτε στη συνάρτηση ζήτησης του συστήματος.

Σημειώνεται ότι υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις στο σύστημα. Η δεύτερη λύση $p = 167{,}823$ απορρίπτεται εξαιτίας των περιορισμών που έχουν τεθεί στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων και προέρχονται από την οικονομική φύση του προβλήματος.

Στο Διάγραμμα 4.2 φαίνεται η γραφική λύση του προβλήματος. Οι

καμπύλες ζήτησης και προσφοράς σχεδιάζονται στο πρώτο τεταρτημόριο, όπου τιμές και ποσότητες λαμβάνουν θετικές τιμές, με αποτέλεσμα η δεύτερη λύση του συστήματος να μην εμφανίζεται στο διάγραμμα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.2: ***Σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων προσφοράς και ζήτησης***



4.10.2 Σημείο ισορροπίας για περισσότερες από μια αγορές

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει παραδείγματα συναρτήσεων ζήτησης για προϊόντα, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την τιμή του προϊόντος. Για παράδειγμα, η ζητούμενη ποσότητα για τριαντάφυλλα, q_{d1}, εξαρτάται από την τιμή τους, p_1. Εάν όμως στην ίδια αγορά είναι διαθέσιμα γαρύφαλλα, αυτά αποτελούν ανταγωνιστικό προϊόν για τα τριαντάφυλλα, καθώς αποτελούν εναλλακτική λύση για τον αγοραστή λουλουδιών. Έτσι η ζήτηση για τριαντάφυλλα επηρεάζεται επίσης από την τιμή των γαρύφαλλων, p_2. Ομοίως η ζήτηση για γαρύφαλλα, q_{d2}, θα πρέπει να επηρεάζεται από την τιμή τους, p_2, καθώς επίσης και από την τιμή των τριαντάφυλλων. Οι ακόλουθες εξισώσεις ζήτησης εκφράζουν μαθηματικά τις δύο αυτές σχέσεις.

Ζήτηση για τριαντάφυλλα: $q_{d1} = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2$

Ζήτηση για γαρύφαλλα: $q_{d2} = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2$

Υποθέτουμε ότι οι αγρότες-παραγωγοί φυτεύουν τόσο γαρύφαλλα όσο και τριαντάφυλλα. Ως αποτέλεσμα, οι συναρτήσεις προσφοράς τους εξαρτώνται και από τις δύο τιμές. Δηλαδή λαμβάνονται υπόψη και οι δύο τιμές στην απόφαση παραγωγής λουλουδιών. Έτσι,

Προσφορά για τριαντάφυλλα: $q_{s1} = c_0 + c_1p_1 + c_2p_2$

Προσφορά για γαρύφαλλα: $q_{s2} = d_0 + d_1p_1 + d_2p_2$

Συνθήκες ισορροπίας στις δύο αγορές:

Αγορά για τριαντάφυλλα: $q_{d1} = q_{s1}$ ή $q_{d1} - q_{s1} = 0$

Αγορά για γαρύφαλλα: $q_{d2} = q_{s2}$ ή $q_{d2} - q_{s2} = 0$

Οι παραπάνω έξι εξισώσεις αποτελούν ένα σύνολο, το οποίο θα πρέπει να λυθεί ως σύστημα προκειμένου να καθοριστούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας στις δύο αγορές. Έτσι, αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς στις αντίστοιχες εξισώσεις, που εκφράζουν τις συνθήκες ισορροπίας στην αγορά, και με αναγωγή ομοίων όρων, το παραπάνω σύστημα μειώνεται στο ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$(a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)p_1 + (a_2 - c_2)p_2 = 0$$

$$(b_0 - d_0) + (b_1 - d_1)p_1 + (b_2 - d_2)p_2 = 0$$

Απλοποιώντας λαμβάνουμε:

$$\alpha_0 + \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 = 0$$

$$\beta_0 + \beta_1p_1 + \beta_2p_2 = 0$$

όπου: $\alpha_0 = (a_0 - c_0)$, $\alpha_1 = (a_1 - c_1)$, $\alpha_2 = (a_2 - c_2)$, $\beta_0 = (b_0 - d_0)$, $\beta_1 = (b_1 - d_1)$ και $\beta_2 = (b_2 - d_2)$.

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς p_1 προκύπτει $p_1 = -(\alpha_0 + \alpha_2p_2)/\alpha_1$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στη δεύτερη εξίσωση και λύνοντας ως προς p_2 παράγεται η ακόλουθη λύση για την τιμή ισορροπίας p_2:

$$p_2 = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

Τοποθετώντας αυτήν την τιμή στη λύση για p_1 προκύπτει ότι:

$$p_1 = \frac{\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

Παρατηρήσεις:

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να επιτευχθεί λύση. Για παράδειγμα, όταν οι παρονομαστές των παραπάνω εξισώσεων-λύσεων είναι 0, δηλαδή όταν $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, τα κλάσματα δεν ορίζονται. Επιπλέον, προκειμένου να προκύψουν θετικές τιμές για τις τιμές ισορροπίας, ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κάθε κλάσματος θα πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο.
- Οι παραπάνω λύσεις δεν δίνονται ως συναρτήσεις των σταθερών των αρχικών συναρτήσεων ζήτησης και προσφοράς. Δηλαδή, δεν εκφράζονται ως συναρτήσεις των a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_0, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2. Έτσι, οι σταθερές αυτές θα πρέπει να αντικατασταθούν στους παραπάνω τύπους-λύσεις για να μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των p_1 και p_2. Θα παρουσιάσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα παρακάτω.
- Τέλος, αφού βρεθούν οι τιμές p_1 και p_2, θα τοποθετηθούν στις αρχικές συναρτήσεις, για να βρεθούν οι προσφερόμενες ποσότητες στις τιμές ισορροπίας.

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γενικευθεί για n προϊόντα στην οικονομία. Κάθε συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης θα εξαρτάται από n σύνολα τιμών. Το όλο σύστημα θα περιλαμβάνει n εξισώσεις ισορροπίας, n εξισώσεις ζήτησης και n εξισώσεις προσφοράς. Δηλαδή, θα είναι ένα 3n σύστημα εξισώσεων. Ένα τέτοιο πλαίσιο ανάλυσης προτάθηκε από τον Leon Walras και είναι γνωστό στην οικονομική θεωρία ως ***Γενική Ισορροπία κατά Walras (Walrasian General Equilibrium)***.[2] Για περισσότερα από δύο προϊόντα είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε άλγεβρα των πινάκων, για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Επιπλέον, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, η χρήση της άλγεβρας των πινάκων μπορεί να καθορίσει εκ των προτέρων (πριν λυθεί το σύστημα) κατά πόσον υπάρχει λύση στο σύστημα.

[2] Όταν εξετάζονται όλες οι αγορές της οικονομίας και όχι ένα μέρος αυτών, λειτουργούμε σε πλαίσιο ***γενικής ισορροπίας (general equilibrium)***. Όταν εξετάζονται συγκεκριμένες αγορές ή μέρος αγορών στην οικονομία τότε έχουμε ***μερική ισορροπία (general equilibrium)***.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα παράδειγμα, όπου οι σταθερές στις παραπάνω εξισώσεις παίρνουν αριθμητικές τιμές.

Παράδειγμα:

Υποθέτουμε ότι στην τοπική αγορά η ζήτηση για τριαντάφυλλα και γαρύφαλλα είναι συνάρτηση των τιμών τους. Υποθέτουμε, επίσης, ότι οι αγρότες εξειδικεύονται στην καλλιέργεια είτε γαρύφαλλων είτε τριαντάφυλλων. Ως αποτέλεσμα, οι συναρτήσεις προσφοράς εξαρτώνται από την τιμή μόνο των λουλουδιών που καλλιεργούν. Οι ακόλουθες εξισώσεις περιγράφουν τις σχετικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς:

Ζήτηση για τριαντάφυλλα: $q_1^d = 10 - 5p_1 + 3p_2$

Προσφορά για τριαντάφυλλα: $q_1^s = 3 + 6p_1$

Ζήτηση για γαρύφαλλα: $q_2^d = 8 + 2p_1 - 6p_2$

Προσφορά για γαρύφαλλα: $q_2^s = 4 + 5p_2$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις που περιγράφουν τις συνθήκες ισορροπίας στην αγορά, δηλαδή στις $q_1^d = q_1^s$ και $q_2^d = q_2^s$, έχουμε:

$$10 - 5p_1 + 3p_2 = 3 + 6p_1$$

$$8 + 2p_1 - 6p_2 = 4 + 5p_2$$

Τοποθετώντας τους όμοιους όρους μαζί έχουμε:

$$7 - 11p_1 + 3p_2 = 0 \quad (1)$$

$$4 + 2p_1 - 11p_2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \times 2 + (2) \times 11: \quad 58 - 115p_2 = 0$$

Επομένως, $p_2 = 0{,}504$. Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή είτε στην (1) είτε στη (2) και λύνοντας προκύπτει ότι $p_1 = 0{,}774$. Αντικαθιστώντας αυτές τις λύσεις στις αντίστοιχες εξισώσεις προσφοράς προκύπτουν οι ποσότητες ισορροπίας στην αγορά. Δηλαδή, $q_1 = 7{,}64$ και $q_2 = 6{,}52$

4.10.3 Ανάλυση νεκρού σημείου (Break-even analysis)

Τις επιχειρήσεις τις ενδιαφέρει να γνωρίζουν εκείνο το σημείο παραγωγής στο οποίο καλύπτονται τα κόστη τους. Ονομάζεται ***νεκρό σημείο (break even point)***. Στο σημείο αυτό τα συνολικά έσοδα που λαμβάνει η επιχείρηση από την πώληση των προϊόντων ή των υπηρεσιών της στην αγορά είναι ίσα με τα συνολικά κόστη παραγωγής. Ισοδύναμα, είναι το σημείο στο οποίο το επίπεδο των κερδών είναι μηδέν. Το νεκρό σημείο παραγωγής μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας μαθηματική ανάλυση. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Το σταθερό κόστος για μια επιχείρηση η οποία αποκτά ένα αεροπλάνο, προκειμένου να το θέσει σε λειτουργία, είναι 800 χιλιάδες ευρώ. Αυτό περιλαμβάνει το κόστος αγοράς, μεσιτικά και δικηγορικά έξοδα, έξοδα ασφάλισης, κλπ. Από προηγούμενη εμπειρία, θέτοντας σε λειτουργία παρόμοια αεροπλάνα, η αεροπορική εταιρεία έχει υπολογίσει ότι τα λειτουργικά κόστη (συμπεριλαμβάνοντας τέλη αεροδρομίων, επισκευές, καύσιμα, κλπ) είναι 100 € ανά μίλι. Η εταιρεία αναμένει ότι τα έσοδά της από τη λειτουργία του αεροπλάνου θα είναι 120 € ανά μίλι. Πόσα μίλια θα πρέπει να διανύσει το αεροπλάνο προκειμένου η επιχείρηση να βρεθεί στο νεκρό σημείο;

Απάντηση:

Ας συμβολίσουμε με x τα αεροπορικά μίλια. Οι συναρτήσεις κόστους και εσόδων για την απόκτηση και λειτουργία του αεροπλάνου είναι αντίστοιχα:

Κόστος $C(x) = 800.000 + 100x$

Έσοδο $R(x) = 120x$

Νεκρό σημείο $C(x) = R(x)$

Αυτό αποτελεί ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους το οποίο όταν λυθεί θα προσδιορίσει την τιμή του x και τις αντίστοιχες τιμές των $C(x)$ και $R(x)$. Έτσι,

$$800.000 + 100x = 120x$$

$$800.000 = 20x$$

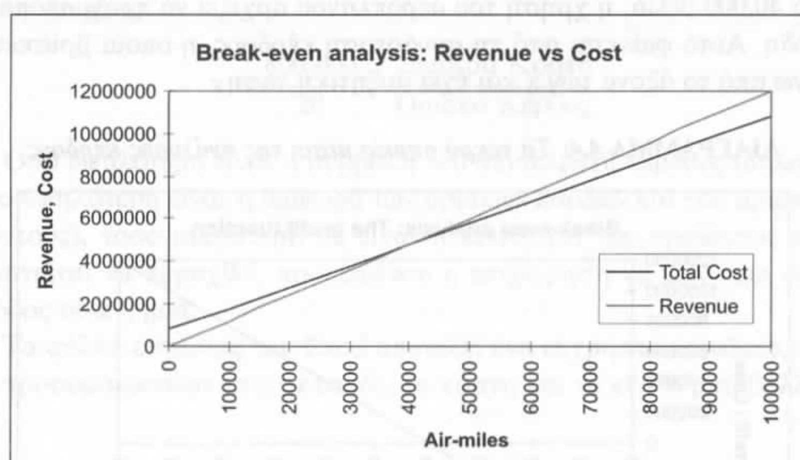
$$x = \frac{800000}{20} = 40.000 \text{ μίλια}$$

Επομένως, το νεκρό σημείο είναι 40.000 μίλια

Στο σημείο αυτό $C(x = 40.000) = R(x = 40.000) = 4.800.000$ €

Το Διάγραμμα 4.3, το οποίο έχει δημιουργηθεί στο ***Excel,*** παρουσιάζει τη γραφική λύση του προβλήματος. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, όταν τα μίλια που έχει διανύσει το αεροπλάνο είναι λιγότερα από 40.000, η συνάρτηση κόστους βρίσκεται πάνω από τη συνάρτηση εσόδων, υποδηλώνοντας ότι η επιχείρηση πραγματοποιεί ζημιές. Παρόλα αυτά, τα έσοδα αυξάνονται γρηγορότερα απ' ότι το κόστος, όπως φαίνεται και από την πιο απότομη κλίση της συνάρτησης των εσόδων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο συντελεστής κλίσης της συνάρτησης των εσόδων (120) είναι υψηλότερος απ' ότι ο συντελεστής κλίσης της συνάρτησης κόστους (100). Οι δύο γραμμές συναντιούνται στο νεκρό σημείο, και πέραν του σημείου αυτού η συνάρτηση εσόδων βρίσκεται πάντα πάνω από την συνάρτηση κόστους. Έτσι, όταν τα μίλια που διανύει το αεροπλάνο είναι πάνω από 40.000, η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των εσόδων και του κόστους είναι θετική.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.3: ***Ανάλυση νεκρού σημείου για την αεροπορική εταιρεία***



Εξετάζοντας το πρόβλημα υπό αυτό το πρίσμα, διαφαίνεται ένας εναλλακτικός τρόπος καθορισμού του νεκρού σημείου. Αρχικά δημιουργούμε τη συνάρτηση κερδών (profit function), αφαιρώντας τη συ-

νάρτηση κόστους από τη συνάρτηση εσόδων, και στη συνέχεια βρίσκουμε την τιμή του x για την οποία τα κέρδη είναι μηδέν. Έτσι,

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = 120x - (800.000 + 100x) = -800.000 + 20x$$

Στο νεκρό σημείο: $\Pi(x) = 0 = -800.000 + 20x$

Έτσι, ποσότητα νεκρού σημείου: $x = \frac{800000}{20} = 40.000$ μίλια

Τα έσοδα της αεροπορικής εταιρείας στο νεκρό σημείο υπολογίζονται μέσω της $R(x) = 120x$. Επομένως,

$$R(40.000) = 120 \times 40.000 = 4.800.000$$

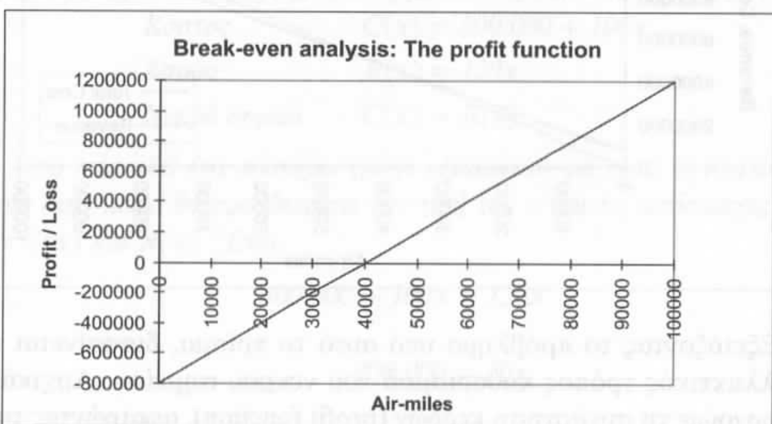
Το κόστος της εταιρείας στο νεκρό σημείο είναι

$$C(x) = 800.000 + 100 \times 40.000 = 4.800.000$$

Βλέπουμε ότι $R(40.000) = C(40.000) = 4.800.000$

Το Διάγραμμα 4.4, που έχει δημιουργηθεί στο ***Excel***, παρουσιάζει τη συνάρτηση κέρδους να είναι αρνητική και να βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα, όταν $x < 40.000$ μίλια. Επομένως σε αυτό το τμήμα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης πραγματοποιούνται ζημιές. Όταν $x = 40.000$, η συνάρτηση κέρδους τέμνει τον άξονα των x υποδηλώνοντας ότι τα κέρδη είναι 0. Όταν διανύονται περισσότερα από 40.000 μίλια, η χρήση του αεροπλάνου αρχίζει να πραγματοποιεί κέρδη. Αυτό φαίνεται από τη συνάρτηση κέρδους, η οποία βρίσκεται πάνω από το άξονα των x και έχει αυξητική τάση.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.4: ***Το νεκρό σημείο μέσω της ανάλυσης κέρδους***



Ο συντελεστής κλίσης της συνάρτησης κέρδους είναι +20. Ο συντελεστής αυτός του x δείχνει ***τη συμβολή στα κέρδη (contribution to profits)*** για κάθε αεροπορικό μίλι που διανύεται. Εκφράζει τη διαφορά μεταξύ των συντελεστών κλίσης των συναρτήσεων των εσόδων και του κόστους. Όταν ο συντελεστής αυτός είναι θετικός θα υπάρχει κάποιο σημείο στο οποίο η επιχείρηση δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά, δεδομένου ότι κάθε μίλι που διανύεται συμβάλει περισσότερο στα έσοδα από ότι στο κόστος. Δηλαδή, σύμφωνα με την οικονομική θεωρία, το ***οριακό έσοδο (marginal revenue)***[3] είναι υψηλότερο από το ***οριακό κόστος (marginal cost)***[4]. Ο συντελεστής κέρδους μπορεί εναλλακτικά να ονομαστεί ***οριακό κέρδος (marginal profit)***. Εάν το οριακό κέρδος είναι αρνητικό τότε δεν συμφέρει την επιχείρηση να παράγει, δεδομένου ότι ποτέ δεν θα βρεθεί στο νεκρό σημείο ούτε και θα πραγματοποιήσει κέρδη.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής κέρδους βρίσκεται εξετάζοντας τη διαφορά μεταξύ του συντελεστή οριακών εσόδων και του συντελεστή οριακού κόστους. Τα σταθερά κόστη, δηλαδή η σταθερά στη συνάρτηση κόστους, δεν λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό. Παρόλα αυτά τα σταθερά κόστη πρέπει να λαμβάνονται υπόψη, προκειμένου να καθοριστεί το νεκρό σημείο. Σημειώνεται ποια είναι η λύση για το x:

$$x = \frac{800.000}{20} = \frac{\text{Σταθερά Κόστη}}{\text{Οριακό Κέρδος}}$$

Όσο υψηλότερη είναι η συμβολή του συντελεστή κέρδους (δηλαδή όσο υψηλότερη είναι η διαφορά των οριακών εσόδων και του οριακού κόστους), τόσο μικρότερη θα είναι η ποσότητα του προϊόντος που απαιτείται να παραχθεί, προκειμένου η επιχείρηση να μην έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

Το φύλλο εργασίας του Excel αποτελεί ένα εύχρηστο εργαλείο, για να προσομοιώσουμε πως τα έσοδα, τα κόστη και τα κέρδη μεταβάλλο-

[3] Οριακό Έσοδο για την επιχείρηση αποτελεί το επιπλέον έσοδο στην επιχείρηση από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

[4] Οριακό Κόστος για την επιχείρηση αποτελεί το επιπλέον έξοδο στην επιχείρηση κατά την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

νται για τα διαφορετικά επίπεδα του παραγόμενου προϊόντος. Πράγματι, τα Διαγράμματα 4.3 και 4.4, που παρουσιάστηκαν παραπάνω, βασίστηκαν στον Πίνακα 4.1, που δημιουργήθηκε στο Excel με τον ίδιο τρόπο τον οποίο περιγράψαμε σε προηγούμενα σημεία του βιβλίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: ***Ανάλυση νεκρού σημείου σε μορφή πίνακα στο Excel***

Break - Even Analysis			
Air-Miles	**Total Cost**	**Total Revenue**	**Profit**
0	800000	0	−800000
10000	1800000	1200000	−600000
20000	2800000	2400000	−400000
30000	3800000	3600000	−200000
40000	4800000	4800000	0
50000	5800000	6000000	200000
60000	6800000	7200000	400000
70000	7800000	8400000	600000
80000	8800000	9600000	800000
90000	9800000	10800000	1000000
100000	10800000	12000000	1200000

4.10.4 Μη γραμμική ανάλυση νεκρού σημείου (Non-linear break-even analysis)

Το συνολικό κόστος, σε εκατομμύρια ευρώ, ενός εργοστασίου κατασκευής αυτοκινήτων περιγράφεται από την ακόλουθη δευτεροβάθμια συνάρτηση $C(x) = 1{,}5x^2 + 500$, όπου x συμβολίζει χιλιάδες μονάδες αυτοκινήτων. Η συνάρτηση εσόδων της εταιρείας είναι $R(x) = 80x$. Ποιό είναι το νεκρό σημείο παραγωγής;

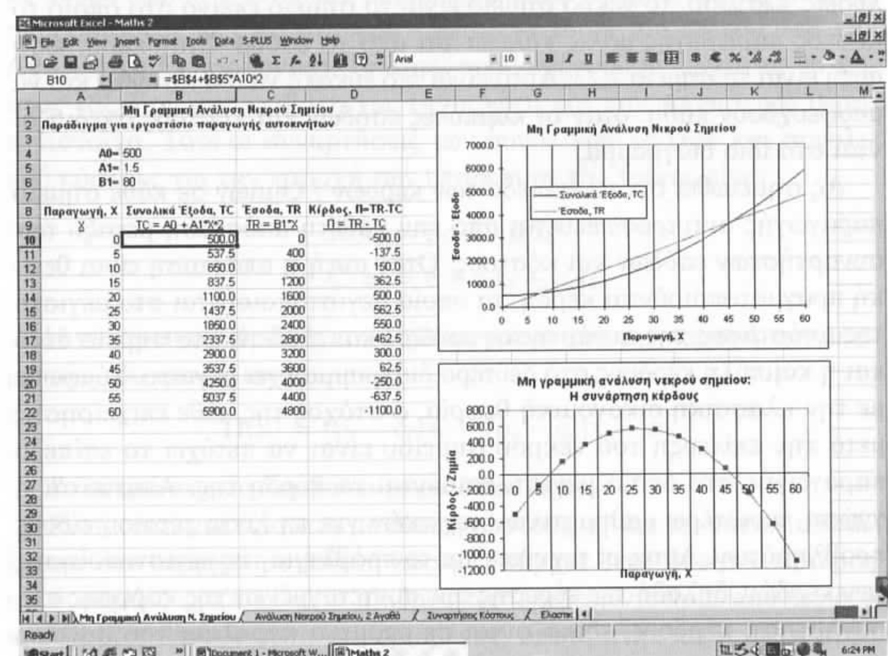
Για να βρούμε τη λύση θέτουμε $R(x) = C(x)$ και λύνουμε ως προς x. Ισοδύναμα, βρίσκουμε τη λύση της:

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = -1{,}5x^2 + 80x - 500 = 0$$

Οι ρίζες αυτής της τετραγωνικής συνάρτησης είναι 7,23 and 46,10. Αυτά είναι τα σημεία τομής της συνάρτησης εσόδων με τη συνάρτηση κόστους.

Στο Γράφημα 4.2 χρησιμοποιείται το Excel για τη γραφική απεικόνιση του προβλήματος. Στον πίνακα που έχει δημιουργηθεί παρουσιάζονται οι τιμές των συνολικών εξόδων, των συνολικών εσόδων και του κέρδους / ζημίας που προκύπτει για διαφορετικές μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Οι συναρτήσεις εσόδων και εξόδων εμφανίζονται γραφικά στο πάνω διάγραμμα, ενώ η εξέλιξη των κερδών / ζημιών εμφανίζεται στο κάτω διάγραμμα του γραφήματος. Παρατηρούμε ότι όταν ξεκινά η παραγωγή του προϊόντος η συνάρτηση εσόδων βρίσκεται κάτω από τη συνάρτηση κόστους, καταγράφοντας ζημίες. Αυτό φαίνεται και από τη συνάρτηση κέρδους στο δεύτερο διάγραμμα, η οποία λαμβάνει αρνητικές τιμές και βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Καθώς εξελίσσεται η παραγωγική διαδικασία, τα κόστη

ΓΡΑΦΗΜΑ 4.2: ***Μη γραμμική ανάλυση νεκρού σημείου στην παραγωγή***



καλύπτονται, όταν το παραγόμενο προϊόν είναι 7,23. Τα έσοδα και το κόστος στο σημείο αυτό είναι 578,4. Όταν το παραγόμενο προϊόν παίρνει τιμές μεταξύ 7,23 και 46,10, η συνάρτηση εσόδων βρίσκεται πάνω από τη συνάρτηση κόστους και η περιοχή μεταξύ των δύο καμπυλών δείχνει τα συνολικά κέρδη από την παραγωγή και τις πωλήσεις. Αυτή η ύπαρξη κέρδους φαίνεται και από τη συνάρτηση κέρδους στο αντίστοιχο διάγραμμα η οποία βρίσκεται εξ' ολοκλήρου πάνω από τον οριζόντιο άξονα σε αυτό το διάστημα παραγωγής.

Παρόλα αυτά, όπως βλέπουμε, το κόστος αυξάνεται πιο γρήγορα από τα έσοδα, καθώς έχουν εξαντληθεί πλέον οι οικονομίες κλίμακας στην παραγωγική διαδικασία. Όταν πια το παραγόμενο προϊόν ξεπεράσει τις 46,10 μονάδες, το κόστος βρίσκεται πάνω από τα έσοδα και η επιχείρηση κατασκευής αυτοκινήτων αρχίζει να πραγματοποιεί ζημιές. Η συνάρτηση κέρδους κινείται καθοδικά, κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Τα έσοδα και το κόστος στο σημείο αυτό είναι 3688,2 μονάδες.

Σε τέτοιες περιπτώσεις η γραφική ανάλυση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και διευκολύνεται από τη χρησιμοποίηση των δυνατοτήτων του Excel. Η μαθηματική λύση εμφανίζει δύο ρίζες – δύο λύσεις. Ωστόσο, το νεκρό σημείο είναι το σημείο εκείνο στο οποίο το κόστος παραγωγής μόλις καλύπτεται από τα έσοδα. Στην περίπτωση αυτή είναι το σημείο 7,23. Αυτό είναι πιο εύκολο να διαπιστωθεί και να αποφευχθούν λάθη, όταν οι καμπύλες εσόδων και κόστους σχεδιάζονται στο ίδιο διάγραμμα.

Ας σημειωθεί ότι το επίπεδο των κερδών / ζημιών σε κάθε σημείο παραγωγής αντιπροσωπεύεται από την κάθετη απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων εσόδων και κόστους. Όταν αυτή η απόσταση είναι θετική πραγματοποιούνται κέρδη, τα οποία μεγιστοποιούνται στο μέγιστο της απόστασης της συνάρτησης εσόδων και εξόδων. Στο σημείο αυτό και η καμπύλη κέρδους στο δεύτερο διάγραμμα έχει μέγιστο. Σύμφωνα με την κλασσική οικονομική θεωρία, ο στόχος της κάθε επιχείρησης μετά την επίτευξη του νεκρού σημείου είναι να πετύχει το επίπεδο παραγωγής στο οποίο μεγιστοποιούνται τα κέρδη της. Απαιτείται η γνώση περαιτέρω μαθηματικών τεχνικών για τη λύση τέτοιου είδους προβλημάτων. Αυτές οι τεχνικές και το πρόβλημα της μεγιστοποίησης των κερδών, δηλαδή της εύρεσης των συντεταγμένων της κορυφής στη συνάρτηση κέρδους, εξετάζονται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου που ασχολούνται με την παραγώγιση συναρτήσεων.

4.10.5 Ανάλυση νεκρού σημείου για επιχειρήσεις που παράγουν περισσότερα του ενός προϊόντων (Multi-product break-even analysis)

Στην πράξη οι επιχειρήσεις παράγουν περισσότερα από ένα είδος προϊόντος. Ακόμα κι αν δεν είναι εντελώς διαφορετικά, τα διαφοροποιούν έτσι, ώστε να λαμβάνονται υπόψη ως διαφορετικά από τον καταναλωτή.

Για παράδειγμα, στο ταξίδι με τρένο από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη, η ίδια διαδρομή προσφέρεται σε διαφορετικούς επιβάτες από τον διαχειριστή (operator) της επιχείρησης τρένων. Ωστόσο, διαφοροποιώντας τις υπηρεσίες που προσφέρονται στο τρένο στους επιβάτες, για παράδειγμα της πρώτης θέσης, σε σχέση με αυτούς της τουριστικής θέσης, υπάρχει η δυνατότητα διαφορετικής τιμολόγησης των θέσεων. Ας εξετάσουμε το νεκρό σημείο της επιχείρησης. Συμβολίζουμε ως p_f, p_s, x_f και x_s τις τιμές εισιτηρίων της πρώτης και της τουριστικής θέσης, καθώς επίσης και τον αριθμό των επιβατών που ταξιδεύουν, αντίστοιχα. Επίσης, υποθέτουμε ότι το κόστος προσφοράς της ίδιας διαδρομής είναι ελαφρώς πιο ακριβό στα βαγόνια της πρώτης θέσης, ας πούμε επειδή ο επιπλέον καμαρότος είναι συνεχώς διαθέσιμος. Ας συμβολίσουμε με c το σταθερό κόστος ταξιδιού του τρένου από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη. Επίσης, συμβολίζουμε με c_f και c_s το κόστος ταξιδιού ανά επιβάτη για την πρώτη και την τουριστική θέση, αντίστοιχα. Τότε οι συναρτήσεις των συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους για την παροχή των υπηρεσιών του τρένου είναι:

$$R(x) = p_f x_f + p_s x_s$$
$$C(x) = c + c_f x_f + c_s x_s$$

Η συνάρτηση κέρδους που δημιουργείται από την παροχή των υπηρεσιών του τρένου είναι:

$$\Pi(x) = (p_f - c_f)x_f + (p_s - c_s)x_s - c$$

Το νεκρό σημείο λαμβάνει χώρα όταν $\Pi(x) = 0$

Αυτή είναι μια εξίσωση με δύο αγνώστους, x_f και x_s, και ως αποτέλεσμα δεν υπάρχει μοναδική λύση. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός συνδυασμών, εκτός κι αν ο αριθμός των επιβατών σε μια από τις δύο κατηγορίες θέσεων είναι καθορισμένος, οπότε στην περίπτωση αυτή παράγεται μια μοναδική λύση.

Η καθαρή συμβολή στα κέρδη από κάθε κατηγορία θέσεων επιβατών προκύπτει από δύο πηγές και είναι $(p_f - c_f)$ για επιβάτες πρώτης θέσης και $(p_s - c_s)$ για επιβάτες τουριστικής θέσης.

Το φύλλο εργασίας του ***Excel*** στο Γράφημα 4.3 απεικονίζει πώς το λογισμικό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί η ανάλυση του νεκρού σημείου στην περίπτωση δύο προϊόντων, όπως στο παράδειγμα του τρένου. Το σταθερό κόστος για την πραγματοποίηση του ταξιδιού από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη είναι 3.000 ευρώ. Η τιμή αυτή τοποθετείται στο κελί c5. Το μεταβλητό κόστος ανά επιβάτη τουριστικής θέσης είναι 20 € και βρίσκεται στο κελί b5. Το κόστος ανά επιβάτη πρώτης θέσης είναι 25 € και βρίσκεται στο κελί a5. Το εισιτήριο της πρώτης θέσης είναι 60 € και βρίσκεται στο κελί d5, και το εισιτήριο της τουριστικής θέσης είναι 30 € και βρίσκεται στο κελί e5.

ΓΡΑΦΗΜΑ 4.3: ***Ανάλυση νεκρού σημείου για δύο κατηγορίες επιβατών τρένου***

C10 = =$C$5+$A$5*$A$10+$B$5*B10

	A	B	C	D	E	F
1	Ανάλυση νεκρού σημείου για δύο κατηγορίες επιβατών τρένου					
2						
3	*Κόστος - F*	*Κόστος - S*	*Σταθερό κόστος*	*Τιμή εισιτηρίου - F*	*Τιμή εισιτηρίου - S*	
4	*cf*	*cs*	*c*	*pf*	*ps*	
5	*25*	*20*	*3000*	*60*	*30*	
6						
7	Πιθανές λύσεις, για 40 επιβάτες πρώτης κατηγορίας					
8	Επιβάτες - F	Επιβάτες - S	Κόστος, TC	Έσοδα, TR	Κέρδος, Π = TR - TC	Επιβάτες - Σύνολο
9	xf	xs	TC=c+cf*xf+cs*xs	TR=pf*xf+ps*xs	Π=(pf-cf)*xf+(ps-cs)*xs-c	xf+xs
10	40	120	6400	6000	-400	160
11		130	6600	6300	-300	170
12		140	6800	6600	-200	180
13		150	7000	6900	-100	190
14		160	7200	7200	0	200
15		170	7400	7500	100	210
16						
17	Πιθανές λύσεις, για 50 επιβάτες πρώτης κατηγορίας					
18	Επιβάτες - F	Επιβάτες - S	Κόστος, TC	Έσοδα, TR	Κέρδος, Π = TR - TC	Επιβάτες - Σύνολο
19	xf	xs	TC=c+cf*xf+cs*xs	TR=pf*xf+ps*xs	Π=(pf-cf)*xf+(ps-cs)*xs-c	xf+xs
20	50	110	6450	6300	-150	160
21		115	6550	6450	-100	165
22		120	6650	6600	-50	170
23		125	6750	6750	0	175
24		130	6850	6900	50	180
25		135	6950	7050	100	185

Προκειμένου να παραχθεί μια μοναδική λύση στο πρόβλημα του νεκρού σημείου, ο αριθμός των επιβατών της πρώτης θέσης τοποθετείται στο κελί a10 και διατηρείται σταθερό. Ο πιθανός αριθμός των επιβατών της τουριστικής θέσης τοποθετείται στα κελιά b10:b15.

Στο κελί c10 υπολογίζεται το συνολικό κόστος της μεταφοράς των 40 και 120 επιβατών της πρώτης και της τουριστικής θέσης, χρησιμοποιώντας τον τύπο που βρίσκεται στην περιοχή αναφοράς του φύλλου εργασίας. Όπως φαίνεται, ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι = ***c5 + a5*a10 + b5*b10***. Το σταθερό κόστος και το μεταβλητό κόστος των επιβατών της πρώτης και της τουριστικής θέσης εισάγονται ως «απόλυτες» διευθύνσεις, δηλαδή τα κόστη αυτά δεν επιτρέπεται να αλλάξουν από κελί σε κελί, όταν ο τύπος αντιγράφεται προς τα κάτω στη στήλη. Η διεύθυνση του κελιού για τον αριθμό των επιβατών της δεύτερης θέσης είναι «σχετική», δηλαδή επιτρέπεται να αλλάζει όταν αντιγράφεται προς τα κάτω στη στήλη από το κελί c11 έως το c15, λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβολές του επιπέδου του «αποτελέσματος».

Στο κελί d10 υπολογίζονται τα συνολικά έσοδα από τη μεταφορά των 40 και 120 επιβατών της πρώτης και της τουριστικής θέσης. Ο τύπος που χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή είναι = ***d5*a10 + e5*b10***. Ο τύπος αυτός προσθέτει τα έσοδα από τους επιβάτες της πρώτης θέσης με τα έσοδα από τους επιβάτες της τουριστικής θέσης. Μόνο η διεύθυνση του κελιού, για τον αριθμό των επιβατών της δεύτερης θέσης, που εισέρχεται στον τύπο είναι «σχετική».

Η στήλη E υπολογίζει το επίπεδο των κερδών, τα οποία προσδιορίζονται από τη διαφορά μεταξύ των εσόδων και του κόστους. Τέλος, η στήλη F δείχνει το συνολικό αριθμό των επιβατών της πρώτης και της δεύτερης θέσης κατά τη διαδρομή.

Είναι φανερό ότι, σύμφωνα με τα δεδομένα της σειράς 5 του φύλλου εργασίας που αφορά το σταθερό κόστος, το ανά μονάδα μεταβλητό κόστος και τα έσοδα, καθώς επίσης και τα δεδομένα του κελιού a10, που αφορούν τον αριθμό των επιβατών της πρώτης θέσης, το νεκρό σημείο κατά τη λειτουργία του τρένου επιτυγχάνεται όταν ταξιδεύουν 40 επιβάτες στην πρώτη θέση και 160 επιβάτες στην τουριστική θέση. Στην περίπτωση αυτή τα έσοδα και το κόστος είναι 7.200 € με αποτέλεσμα το κέρδος να είναι 0.

Το τελευταίο μέρος του φύλλου εργασίας του Excel πραγματοποιεί την ίδια ανάλυση όταν μία από τις παραμέτρους του προβλήματος μεταβάλλεται. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι μεταφέρονται 50 αντί για 40 επιβάτες πρώτης θέσης. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται μόνο 125 εισιτήρια τουριστικής θέσης, για να μην πραγματοποιεί η επιχείρηση ούτε κέρδη ούτε ζημίες. Αυτό συμβαίνει επειδή η συμβολή των εισιτηρίων της πρώτης θέσης στα κέρδη είναι 35 €, συγκρινόμενη με τη συμβολή των εισιτηρίων τουριστικής θέσης που είναι μόνο 10 €. Με άλλα λόγια, τα εισιτήρια της πρώτης θέσης συγκρινόμενα με τα εισιτήρια της τουριστικής θέσης, συμβάλλουν με ένα δείκτη 3,5 προς 1 στα κέρδη. Τα έσοδα είναι ίσα με το κόστος σε αυτήν την περίπτωση και είναι 6750 €.

Το πλεονέκτημα της δημιουργίας του φύλλου εργασίας του Excel κατ' αυτόν τον τρόπο είναι ότι μπορεί να πραγματοποιηθεί ***ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis)***. Δηλαδή, είναι δυνατόν να μεταβληθεί το σταθερό κόστος στο κελί c5 ή/και το αντίτιμο του εισιτηρίου της τουριστικής θέσης (ή τα δεδομένα σε οποιεσδήποτε από τις «σταθερές» διευθύνσεις στη γραμμή 5, η οποία περιλαμβάνει παραμέτρους του υποδείγματος) και να παρατηρήσουμε πως το συνολικό κόστος, τα συνολικά έσοδα και τα κέρδη μεταβάλλονται. Αυτές οι μεταβολές θα υπολογιστούν αυτόματα στο φύλλο εργασίας. Αυτό είναι πολύ βολικό στην πράξη, δεδομένου ότι οι διάφορες παράμετροι των επιχειρήσεων μεταβάλλονται υπό πραγματικές συνθήκες, και έτσι επιτρέπουν να δημιουργηθεί ένας αριθμός από εναλλακτικά σενάρια και να παρατηρηθεί η επίδραση αυτών των μεταβολών στις ταμειακές ροές τους. Το Excel υπολογίζει πολύ γρήγορα τα αποτελέσματα και διευκολύνει τη γρήγορη λήψη αποφάσεων

Ωστόσο, σημειώνεται ότι, σε αντίθεση με την παραπάνω περίπτωση, το νεκρό σημείο δεν είναι πάντα εμφανές σε έναν πίνακα του φύλλου εργασίας. Όμως, η μαθηματική ανάλυση του προβλήματος θα δείξει την ακριβή λύση. Για παράδειγμα, στο παραπάνω πρόβλημα:

$$R(x) = 60x_f + 30x_s$$

$$C(x) = 3000 + 25x_f + 20x_s$$

Υπολογίζεται ότι η συνάρτηση κέρδους που προκύπτει από την παροχή των υπηρεσιών του τρένου είναι:

$$\Pi(x) = 35x_f + 10x_s - 3000$$

Το νεκρό σημείο επιτυγχάνεται όταν $\Pi(x) = 0$. Ωστόσο, σ' αυτήν την εξίσωση, η οποία περιλαμβάνει δύο αγνώστους, είτε η x_f ή η x_s θα πρέπει να διατηρηθεί σταθερή για την εξεύρεση μιας μοναδικής λύσης. Έτσι, όταν $x_f = 40$, για παράδειγμα, $1400 + 10x_s - 3000 = 0$. Συνεπώς, $x_s = 1600/10 = 160$, η οποία είναι και η λύση που βλέπουμε στο φύλλο εργασίας του Excel που παρουσιάζεται στο Γράφημα 4.3. Δηλαδή το νεκρό σημείο επιτυγχάνεται όταν μεταφέρουμε 40 επιβάτες της πρώτης θέσης, με μεταφορά 160 επιβατών της δεύτερης θέσης.

Ασκήσεις για λύση

1) Μια συνάρτηση τετραγωνικής μορφής διέρχεται μέσω των εξής τριών σημείων (2, 182), (4, 168), (10, 150). Να βρεθεί η μαθηματική έκφραση της συνάρτησης.

2) Σε μια κλειστή οικονομία, χωρίς δημόσιο τομέα ισχύουν τα εξής:

Κατανάλωση $C = 100 + 0{,}8Y$.

Επενδύσεις $I = 1200 - 30r$.

Y αντιπροσωπεύει το εισόδημα, και r το επιτόκιο.

Η ζήτηση χρήματος για συναλλαγές είναι $M_{d1} = 0{,}25Y$ και η ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπικούς σκοπούς είναι $M_{d2} = 1375 - 25r$.

Τέλος η προσφορά χρήματος είναι $M_S = 2500$.

Να βρεθούν οι τιμές ισορροπίας για το εισόδημα Y και το επιτόκιο r.

Παρατηρήσεις: Το εθνικό εισόδημα της οικονομίας πρέπει να ισούται με τη δαπάνη της, δηλ. το άθροισμα κατανάλωσης και επενδύσεων (ισορροπία αγοράς προϊόντος). Από την άλλη πλευρά η προσφορά χρήματος πρέπει να ισούται με το άθροισμα της ζήτησης χρήματος για συναλλαγές και για κερδοσκοπικούς σκοπούς (ισορροπία αγοράς χρήματος).

3) Έστω οι ακόλουθες μη γραμμικές εξισώσεις προσφοράς και ζήτησης. Να προσδιορισθούν οι οικονομικά αποδεκτές τιμές και ποσότητες ισορροπίας σε κάθε περίπτωση:

a) $Q_s = -2 + P^2$, $Q_d = 14 - 3P^2$ **b)** $Q_S = -6 + 3P^2$, $Q_d = 15 - 2P$

4) Έστω οι συνηθισμένες εξισώσεις ζήτησης και προσφοράς μιας αγοράς:

$$Q_D = a - bP$$
$$Q_S = -c + dP$$
$$Q_D = Q_S$$

a) Έστω ότι η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία ίση με t μονάδες την οποία αφαιρεί από την τιμή που χρεώνουν οι παραγωγοί (P – t). Να βρεθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας πριν και μετά την φορολογία.

b) Αν θεωρηθεί ότι η κυβέρνηση αποσπά την φορολογία από τους καταναλωτές (P + t), θα είχαμε διαφορετικά επίπεδα ισορροπίας;

5) Αν οι παράμετροι b_1 και b_2, της ευθείας παλινδρόμησης $Y_i = b_1 + b_2X_i$, μέσω των σημείων $\{(X_i, Y_i),\ i = 1, 2, ..., n\}$, ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = nb_1 + b_2 \sum_{i}^{n} X_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + b_2 \sum^{n} (X_i)^2$$

να εξαχθούν οι τύποι υπολογισμού των τιμών των παραμέτρων αυτών.

6) Έστω οι ακόλουθες αλληλοεξαρτώμενες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς τριών προϊόντων

$$Q_{D1} = 45 - 2P_1 + 2P_2 - 2P_3$$
$$Q_{D2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 2P_3$$
$$Q_{D3} = 30 - P_1 + 2P_2 - P_3$$
$$Q_{S1} = -5 + 2P_1$$
$$Q_{S2} = -4 + 2P_2$$
$$Q_{S3} = -5 + P_3$$

Να υπολογιστούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας του κάθε προϊόντος στην αγορά.

7) Έστω τρεις ανταγωνιστικοί τύποι αυτοκινήτων της ίδιας κατηγορίας, με τις ακόλουθες εξισώσεις προσφοράς και ζήτησης:

Ζήτηση για π1: $q_{d1} = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$ (1)

π2: $q_{d2} = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3$ (2)

π3: $q_{d3} = c_0 + c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$ (3)

Προσφορά για π1: $q_{s1} = d_0 + d_1p_1 + d_2p_2 + d_3p_3$ (4)

π2: $q_{s2} = e_0 + e_1p_1 + e_2p_2 + e_3p_3$ (5)

π3: $q_{s3} = h_0 + h_1p_1 + h_2p_2 + h_3p_3$ (6)

Να δειχτούν οι συνθήκες ισορροπίας κατά Walras, στην αγορά των τριών τύπων αυτοκινήτων και να υπολογιστούν οι τιμές ισορροπίας στην αγορά.

5 Πίνακες / Γραμμική Άλγεβρα (Matrix / Linear Algebra)

5.1 Εισαγωγή

Ένας εύκολος τρόπος συνοψισμού ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων είναι η αναπαράστασή τους σε μορφή πίνακα.

Παραδείγματα:

1. Οι πίνακες που δείχνουν τις ώρες αναχώρησης των λεωφορείων ή των τραίνων ή τις ώρες των πανεπιστημιακών διαλέξεων παρέχουν τέτοια παραδείγματα συνοπτικής ταξινόμησης δεδομένων.

2. Τα αποτελέσματα τεσσάρων φοιτητών σε τρία διαγωνίσματα κατά τη διάρκεια του φθινοπωρινού εξαμήνου μπορούν να παρουσιαστούν στον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{array}{cc} & \text{Εξέταση} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Φοιτητής} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 77 & 79 & 84 \\ 90 & 96 & 98 \\ 67 & 72 & 75 \\ 62 & 79 & 96 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ο πίνακας περιέχει το σύνολο των βαθμών των τριών εξετάσεων για κάθε ένα από τους τέσσερις φοιτητές. Το σχήμα του είναι ορθογώνιο, έχει τέσσερις γραμμές (μία για κάθε φοιτητή) και τρεις στήλες (μία για κάθε εξέταση). Κάθε γραμμή περιέχει τρεις βαθμούς οι οποίοι αντιστοιχούν στις τρεις εξετάσεις του κάθε φοιτητή. Έτσι, τα περιεχόμενα της δεύτερης γραμμής του πίνακα αντιστοιχούν στους βαθμούς που αποκόμισε ο φοιτητής με αύξοντα αριθμό 2, στην κάθε μία από τις τρεις εξετάσεις. Δηλαδή, 90 στην εξέταση με αύξοντα αριθμό 1, 96 στην εξέταση 2 και 98 στην εξέταση 3. Κάθε στήλη του πίνακα περιέχει τους τέσσερις βαθμούς που αντιστοιχούν στην κάθε εξέταση για κάθε φοιτητή. Έτσι, τα περιεχόμενα της τρίτης στήλης περιέχουν τα

αποτελέσματα όλων των φοιτητών στην εξέταση με αύξοντα αριθμό 3. Δηλαδή, ο φοιτητής με αύξοντα αριθμό 1 αποκόμισε το βαθμό 84 στην εξέταση 3, ο φοιτητής με αύξοντα αριθμό 2 αποκόμισε το βαθμό 98 στην ίδια εξέταση, κλπ.

Μια τέτοιου είδους ορθογώνια ταξινόμηση δεδομένων σε στήλες και γραμμές ονομάζεται ***πίνακας ή μήτρα (matrix)***. Αποτελεί έναν εύκολο και εύχρηστο τρόπο παρουσίασης των δεδομένων. Ένας πίνακας, λοιπόν, δεν είναι ένας αριθμός αλλά μια ταξινόμηση αριθμών - δεδομένων. Η γενική μορφή ενός πίνακα εκφράζεται ως:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Τα ***ονόματα των πινάκων*** δηλώνονται με κεφαλαία γράμματα και δείκτες, όπως A_{mn}, όπου οι δείκτες m και n δηλώνουν ότι υπάρχουν m γραμμές και n στήλες στον πίνακα, γνωστές ως ***διαστάσεις (dimensions or order)*** του πίνακα A.

Παράδειγμα:

Οι διαστάσεις του πίνακα των βαθμών των εξετάσεων των φοιτητών είναι 4 επί 3, και συμβολίζονται ως (4×3). Δηλαδή, ο πίνακας έχει 4 γραμμές και 3 στήλες.

Τα δεδομένα του κάθε κελιού του πίνακα ονομάζονται ***στοιχεία (elements)*** του πίνακα και συμβολίζονται με μικρά γράμματα και δείκτες, a_{ij}, όπου οι δείκτες ορίζονται ως $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$. Οι δείκτες ενός στοιχείου δείχνουν τη θέση του στοιχείου στον πίνακα. Έτσι, το στοιχείο a_{12} βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

Παράδειγμα:

Το στοιχείο 3,1 στον πίνακα των αποτελεσμάτων των εξετάσεων δηλώνει ότι ο τρίτος φοιτητής απέκτησε το βαθμό 67 στην πρώτη εξέταση.

Συμπερασματικά, η χρήση πινάκων παρέχει έναν εύχρηστο τρόπο ταξινόμησης πληροφοριών σε γραμμές και στήλες. Συχνά, περίπλοκα προβλήματα περιγράφονται μέσω πινάκων, καθώς η χρήση των κανόνων της άλγεβρας των πινάκων καθιστά τη λύση αυτών των προβλη-

μάτων ευκολότερη, σε σχέση με άλλες μεθόδους. Παραδείγματα περιπτώσεων όπου η χρήση πινάκων είναι εύχρηστη είναι τα εξής:

- στον προσδιορισμό πιθανών λύσεων για ένα σύστημα εξισώσεων πριν αυτό επιλυθεί. Δηλαδή, στον καθορισμό της ύπαρξης μιας λύσης, πολλαπλών λύσεων ή καμίας λύσης, πριν καν μπούμε στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.
- στην επίλυση ***συστημάτων εξισώσεων –systems of simultaneous equations–*** (ιδιαίτερα χρήσιμη σε συστήματα υψηλών διαστάσεων).
- στην ***πρόβλεψη πινάκων εμπορικών συναλλαγών (forecasting trade matrices)*** στη διεθνή οικονομία.
- στην κατασκευή ***πινάκων εισόδου-εξόδου (input-output matrices)***, οι οποίοι περιγράφουν παραγωγικές διαδικασίες. Επίσης, στη μακροοικονομική ανάλυση τύπου εισόδου-εξόδου, όπως αναπτύχθηκε από τον ***Leontief***.
- στην υπολογιστική ταξινόμηση και επεξεργασία πληροφοριών / δεδομένων. Για παράδειγμα, η ταξινόμηση πληροφοριών στο φύλλο εργασίας του Excel, σε γραμμές και στήλες, αποτελεί παράδειγμα «αποτελεσματικής» ταξινόμησης των δεδομένων στον υπολογιστή υπό μορφή πίνακα.
- στους υπολογισμούς που αφορούν την ***ανάλυση πολυμεταβλητής παλινδρόμησης (multiple regression analysis)***.
- σε άλλες εφαρμογές.

Ένα μειονέκτημα της άλγεβρας (γραμμικής) των πινάκων είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Παρόλα αυτά, δεδομένου ότι πολλά μη γραμμικά προβλήματα στην οικονομία μπορούν να προσεγγιστούν μέσω γραμμικών σχέσεων ή μπορούν να μετατραπούν σε γραμμικές σχέσεις μετασχηματίζοντας κάποιες μεταβλητές, η άλγεβρα των πινάκων αποτελεί ισχυρό όπλο στα χέρια του αναλυτή για την επίλυση προβλημάτων.

5.2 Ειδικές μορφές πινάκων (Special matrices) – Ορισμοί

Τα Διανύσματα (Vectors) είναι πίνακες οι οποίοι έχουν μία μόνο γραμμή ή μία μόνο στήλη. Για το διαχωρισμό τους από τους πίνακες μπορούν αυτά να δηλωθούν με μικρά γράμματα, τα οποία είναι υπογραμμισμένα.

Ένα ***διάνυσμα γραμμή (row vector) ή πίνακας γραμμή*** είναι ένας πίνακας με μία μόνο γραμμή. Οι διαστάσεις του είναι (1 x n).

Παραδείγματα:

1. $\underline{b} = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$

2. Οι βαθμοί των εξετάσεων του δεύτερου φοιτητή μπορούν να θεωρηθούν ως ένα (1 × 3) διάνυσμα γραμμή

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 90 & 96 & 98 \end{pmatrix}$$

Ένα ***διάνυσμα στήλη (column vector) ή πίνακας στήλη*** είναι ένας πίνακας με μία μόνο στήλη. Οι διαστάσεις του είναι (m x 1).

Παραδείγματα:

1. $$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{m1} \end{pmatrix}$$

2. Οι βαθμοί των τεσσάρων φοιτητών στην 3η εξέταση μπορούν να παρουσιαστούν στο ακόλουθο διάνυσμα στήλη διαστάσεων (4 × 1),

$$\begin{pmatrix} 84 \\ 98 \\ 75 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Ένας πίνακας είναι ***τετραγωνικός (square)*** όταν ο αριθμός των γραμμών είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών.

Παράδειγμα:

Οι ακόλουθοι πίνακες αποτελούν παραδείγματα τετραγωνικών πινάκων, διαστάσεων (3 × 3) και (2 × 2), αντίστοιχα.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Για έναν τετραγωνικό πίνακα (n × n), ***κύρια διαγώνιος (main ή primary diagonal)*** του είναι εκείνη η οποία αποτελείται από τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$

Παράδειγμα:

Στον (2×2) πίνακα του παραπάνω παραπάνω παραδείγματος, κύρια διαγώνιός του είναι εκείνη που περιλαμβάνει τα στοιχεία 2, 7

Ένας πίνακας ονομάζεται ***μηδενικός (zero matrix)***, όταν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν. Ο μηδενικός πίνακας είναι ισοδύναμος με τον αριθμό 0 στο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Ο πίνακας αυτός δεν είναι απαραίτητα τετραγωνικός.

Παράδειγμα:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός καμμιά φορά συμβολίζεται ως $0_{2\times 3}$

Ένας ***διαγώνιος πίνακας (diagonal matrix)*** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας όλα τα στοιχεία του οποίου είναι μηδέν, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του.

Παράδειγμα:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ο ταυτοτικός (identity) ή μοναδιαίος (unit) πίνακας I, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας όπου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι 0. Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι αυτός είναι ένας διαγώνιος πίνακας, όπου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι 1. Δηλαδή, $I_{n\times n} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \end{cases}$

Παράδειγμα:

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα των πραγματικών αριθμών, όταν ο αριθμός 1 πολλαπλασιάζεται με οποιοδήποτε αριθμό x, τότε ο τελευταίος αυτός αριθμός δεν μεταβάλλεται. Έτσι, $1\,x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Στη γραμμική άλγεβρα, ο πίνακας που αντιστοιχεί στον αριθμό 1 ονομάζεται ταυτοτικός πίνακας και συμβολίζεται στη γενική του μορφή ως I ή I_n

Μία ιδιότητα των ταυτοτικών πινάκων είναι ότι, εάν πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα A με τον ταυτοτικό πίνακα I, τότε το αποτέλεσμα που προκύπτει ισούται με τον πίνακα A. Έτσι, $I_n \cdot A_{n\times 1} = A_{n\times 1}$. Θα επανέλθουμε στην ιδιότητα αυτή αργότερα, όταν θα ασχοληθούμε με τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Σ' ένα ***συμμετρικό πίνακα (symmetric matrix)*** τα στοιχεία είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο αποτελούν εικόνα των στοιχείων κάτω από την κύρια διαγώνιο. Επομένως, ένας συμμετρικός πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας έτσι ώστε, $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j$, όπου $i \neq j$

Παράδειγμα:

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & -8 \\ -4 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται ***άνω (κάτω) τριγωνικός (upper (lower) triangular)*** όταν όλα τα στοιχεία του κάτω (πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Παραδείγματα:

1. Ο ακόλουθος πίνακας είναι ***άνω τριγωνικός (upper triangular)***:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Ο ακόλουθος πίνακας είναι ***κάτω τριγωνικός (lower triangular)***:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Έστω A πίνακας διαστάσεων (m x n). O (m x n) πίνακας −A, με στοιχεία αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων του A ονομάζεται ***αντίθετος του A.***

Παράδειγμα:

Ο αντίθετος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}$ είναι:

$$-A = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -13 \\ -8 & -8 & -6 \\ -11 & -14 & -12 \end{pmatrix}$$

Ο ***ανάστροφος (transpose), A′ ή A^T***, του πίνακα A είναι ένας πίνακας του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A.

Παραδείγματα:

1. Εάν: $A_{4\times3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{pmatrix}$, τότε

$$A'_{3\times4} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \end{pmatrix}$$

2. Εάν: $A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, τότε $A'_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της αναστροφής, το διάνυσμα στήλη $\begin{pmatrix} 86 \\ 100 \\ 68 \\ 99 \end{pmatrix}$, μπορεί να γραφεί ως το ακόλουθο διάνυσμα γραμμή

$(86 \quad 100 \quad 68 \quad 99)'$

5.3 Ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων (Properties of transpose matrices)

• Για ένα συμμετρικό πίνακα, A = A′. Επομένως, ο ανάστροφος, A′, του συμμετρικού πίνακα A, είναι ισοδύναμος με τον αρχικό πίνακα, A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A'$$

• (A′)′ = A. Αυτό σημαίνει ότι, αναστροφή του ανάστροφου πίνακα δίνει τον αρχικό πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ και } (A')' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = A$$

• (A + B)′ = A′ + B′. Δηλαδή, ο ανάστροφος του αθροίσματος δύο πινάκων είναι ισοδύναμος με το άθροισμα των ανάστροφων.[1]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{απ' όπου } A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

και $B' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$(A+B)' = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A' + B' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι πράγματι (A + B)′ = A′ + B′

• (AB)′ = B′A′

Παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε τους ίδιους πίνακες A και B όπως στο τελευταίο παράδειγμα, δηλαδή τον $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ και τον $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$:[2]

1. Η πρόσθεση πινάκων θα πρέπει να μελετηθεί πριν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα.
2. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων θα πρέπει να μελετηθεί πριν εξετάσουμε αυτό το παράδειγμα.

$$(AB)' = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 18 & 52 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 14 & 52 \end{pmatrix}$$

$$B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 14 & 52 \end{pmatrix}$$

• Το άθροισμα ενός τετραγωνικού πίνακα με τον ανάστροφό του δίνει ένα συμμετρικό πίνακα.

Παραδείγματα:

1. Εάν $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, τότε $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$,

και $A + A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

2. Ορίζοντας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

και $A + A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό ανάστροφων πινάκων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τον ανάστροφο του πίνακα (3 × 2) στο παράδειγμα 2 που μόλις εξετάστηκε. Αρχικά εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα που πρόκειται να αναστραφεί στα κελιά b2 έως c4 του φύλλου εργασίας του ***Excel***, όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Στη συνέχεια επιλέγουμε και μαυρίζουμε μία (2 x 3) περιοχή, ας πούμε την e2:g3, η οποία θα περιέχει τον ανάστροφο πίνακα και εισάγουμε το σήμα ίσον «=» στο κελί e2. Επιλέγουμε το εικονίδιο του *οδηγού συναρτήσεων function-wizard* (ή Insert, Function) και από την ομάδα επιλογών *Lookup & Reference* τη συνάρτηση *transpose(array)*[3]. Το Excel μας προτρέπει να εισαγάγουμε την περιοχή που περιέχει τον πίνακα που πρόκειται να αναστραφεί, οπότε πληκτρολογούμε b2:c4, και στη συνέχεια πατάμε ταυτόχρονα *Ctrl, Shift* και Enter, προκειμένου να ολοκληρωθεί η λειτουργία. Εναλλακτικά, μαυρίζουμε την περιοχή e2:g3, εισάγουμε τον τύπο = *transpose(b2:c4)* στο κελί e2 και πατάμε ταυτόχρονα *Ctrl, Shift* και *Enter*. Το Excel θα τοποθετήσει άγκιστρα, { }, γύρω από την ανεστραμμένη συνάρτηση, το οποίο υποδεικνύει ότι η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως πίνακας (array)[4] και θα τοποθετήσει τον ανάστροφο του αρχικού πίνακα στα κελιά e2 έως g3

3. Οι τύποι πινάκων (Array formulas) εμπεριέχουν πολλαπλούς τύπους σε μια εντολή, με την έννοια ότι δημιουργούν περισσότερα από ένα αποτελέσματα σε διάφορα κελιά του φύλλου εργασίας ταυτόχρονα. Για ενεργοποίηση, οι τύποι πινάκων εισάγονται ταυτόχρονα σε μια προκαθορισμένη περιοχή του φύλλου εργασίας.

Το ***ίχνος (trace)*** ενός (τετραγωνικού) πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του πίνακα.

Παράδειγμα:

Εάν $A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 10 \\ 10 & 23 & 25 & 29 \\ 2 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

τότε: $\text{Trace}(A) \equiv \text{Tr}(A) = (3 + 9 + 25 + 1) = 38$

5.4 Η ορίζουσα ενός πίνακα (The determinant of a matrix)

Η ***ορίζουσα (determinant)*** ενός τετραγωνικού πίνακα, A, η οποία συμβολίζεται ως |A| ή γενικότερα ως D, είναι ένας αριθμός. Αυτός ο αριθμός περιέχει αρκετές πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες του πίνακα.[5]

4. Τα άγκιστρα εισάγονται αυτόματα από το Excel περί των τύπων πινάκων (Array formulas). Εάν εισαχθούν τα άγκιστρα από εμάς, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να διαβαστεί από το Excel ως κείμενο, με αποτέλεσμα να μην εκτελεστεί η εντολή που εμπεριέχεται στον τύπο.
5. Η ορίζουσα προσδιορίζεται μόνο για έναν τετραγωνικό πίνακα.

5.4.1 Η ορίζουσα ενός (2×2) πίνακα

Παραδείγματα:

1. Εάν A είναι ένας (2×2) πίνακας με στοιχεία (a_{ij}), δηλαδή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \text{ τότε η ορίζουσα του A είναι:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

2. Εάν $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

τότε: $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (2 \times 6) - (1 \times 3) = 12 - 3 = 9$$

Η ***ελάσσων ορίζουσα ενός στοιχείου (minor of an element)*** ενός τετραγωνικού πίνακα αποτελείται από την ορίζουσα εκείνων των στοιχείων, τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη μ' αυτό το στοιχείο.

Παραδείγματα:

1. Σ' έναν πίνακα $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου α_{11} είναι: $\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

Η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου α_{23} είναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31}, \text{ και τα λοιπά.}$$

2. Στον πίνακα $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου α_{11} είναι $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Πρωτεύουσες ή κύριες ελάσσονες (principal minors) ορίζουσες ενός πίνακα ονομάζονται εκείνες οι ελάσσονες οι οποίες βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα. Δηλαδή, για πίνακα $A_{n\times n}$ οι πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες είναι οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων α_{11}, $\alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$.

Το ***αλγεβρικό συμπλήρωμα ενός στοιχείου (cofactor of an element)*** a_{ij} κάποιου πίνακα, αποτελείται από τη θετική ή την αρνητική ελάσσονα ορίζουσα αυτού του στοιχείου. Έτσι, για το στοιχείο a_{ij}, το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου ισούται με την ορίζουσα των στοιχείων τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη μ' αυτό το στοιχείο. Το πρόσημο του αλγεβρικού συμπληρώματος καθορίζεται από τον όρο $(-1)^{i+j}$. Συγκεκριμένα, αν $i+j$ είναι ζυγός (even) αριθμός το πρόσημο είναι θετικό, αν το $i+j$ είναι περιττός (odd) αριθμός το πρόσημο είναι αρνητικό.

Έτσι, αν ξεκινήσουμε από το στοιχείο 1,1 του τετραγωνικού πίνακα και προχωρήσουμε, ας πούμε, κατά μήκος της πρώτης γραμμής, τα αλγεβρικά συμπληρώματα αλλάζουν πρόσημα, ξεκινώντας από $+$. Δηλαδή γίνονται $+, -, +, -, +, \ldots$ Το ίδιο ισχύει αν προχωρήσουμε κατά μήκος της πρώτης στήλης του πίνακα, αντί της πρώτης γραμμής.

Παραδείγματα:

1. Στον πίνακα $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{11} είναι:

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{23} είναι:

$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, \text{ κ.λπ.}$$

2. Στον πίνακα $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{11} είναι:

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)2 = 2$$

Το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{12} στον ίδιο πίνακα είναι:

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

Κάθε στοιχείο του πίνακα έχει ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα. Το σύνολο των αλγεβρικών συμπληρωμάτων ενός πίνακα ονομάζεται ***πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων (cofactor matrix)***.

Παραδείγματα:

1. Ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων (C) ενός πίνακα

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

είναι:

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2. Ο πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων (C) του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ είναι:}$$

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

Ο ***προσαρτημένος ή συζυγής πίνακας (adjoint matrix)*** (A^+ ή Adj(A)) του A είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (C).

Παράδειγμα:

$$\text{Adj}(A) \equiv A^+ = C' = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 13 & -3 & -14 \\ -4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Ο προσαρτημένος πίνακας, ενός πίνακα A, χρησιμοποιείται για την εύρεση του αντίστροφου του πίνακα A, το οποίο είναι αναγκαίο για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων. Θα εξετάσουμε αυτά τα θέματα παρακάτω.

5.4.2 Η ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα υψηλότερων διαστάσεων από (2 × 2)

Για έναν ***(3 × 3) πίνακα μόνο,*** η ορίζουσα μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

- Επεκτείνουμε τον πίνακα προς τα δεξιά τοποθετώντας τις πρώτες δύο στήλες του αρχικού πίνακα στα δεξιά της τρίτης στήλης του πίνακα. Αυτό θα δημιουργήσει ένα νέο (3 × 5) πίνακα.
- Εντοπίζουμε τα στοιχεία των τριών ***βασικών (primary) διαγωνίων*** (P_1, P_2, P_3) και εκείνα των τριών ***δευτερευουσών (secondary) διαγωνίων*** (S_1, S_2, S_3).
- Πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους τα στοιχεία της κάθε βασικής και της κάθε δευτερεύουσας διαγωνίου.
- Η ορίζουσα ισούται με το άθροισμα των γινομένων των τριών βασικών διαγωνίων μείον το άθροισμα των γινομένων των τριών δευτερευουσών διαγωνίων.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}$$

S_1 S_2 S_3

P_1 P_2 P_3

Έτσι,

$$|A| = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$$

Παράδειγμα:

Η ορίζουσα του $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Πρώτα επεκτείνουμε τον A ως ακολούθως:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

Έπειτα υπολογίζουμε την ορίζουσα του A ως εξής:

$$A = [3(2)(1) + 1(4)(3) + 2(-1)(-2)] - [3(2)(2) + (-2)4(3) + 1(-1)(1)]$$

$$= [6 + 12 + 4] - [12 - 24 - 1] = 22 + 13 = 35$$

Ο ***γενικός κανόνας*** για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα διαστάσεων υψηλότερων του (2×2) είναι:

- Επιλέγουμε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του πίνακα,
- πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο σ' αυτήν τη γραμμή ή τη στήλη με το αντίστοιχο ***αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor)*** και
- προσθέτουμε όλους αυτούς τους όρους για τον υπολογισμό της ορίζουσας.

Ο κανόνας είναι επίσης γνωστός ως ***το ανάπτυγμα του Laplace***. Το ανάπτυγμα αποτελεί τη διαδικασία υπολογισμού της ορίζουσας ενός γενικού $(n \times n)$ πίνακα, μέσω των οριζουσών χαμηλοτέρων διαστάσεων.

Παραδείγματα:

1. Η ορίζουσα του (3×3) πίνακα $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + (-a_{12})\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Αυτό αποτελεί το ανάπτυγμα του ***Laplace*** κατά μήκος της πρώτης γραμμής του πίνακα. Ο τρόπος αυτός επιτρέπει τον υπολογισμό της

ορίζουσας ενός (3×3) πίνακα μέσω της εκτίμησης των οριζουσών διαστάσεων μέχρι (2×2)

2. Η ορίζουσα του πίνακα $A_{3\times3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2) - 2(-6) + 4(-6) = -10$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν μέσω της «επέκτασης», κατά μήκος της πρώτης γραμμής του πίνακα. Η ίδια διαδικασία ισχύει, επεκτείνοντας κατά μήκος οποιασδήποτε άλλης γραμμής ή στήλης του πίνακα. Στην πράξη η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη για τον προσδιορισμό της τιμής της ορίζουσας, καθώς μπορεί να καταστήσει τους υπολογισμούς ευκολότερους, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν 0 ως στοιχεία στον πίνακα. Όπως βλέπουμε παρακάτω, στο προηγούμενο παράδειγμα, η επέκταση κατά μήκος της τελευταίας σειράς του πίνακα δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ευκολότερα:

$$|A| = 6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 0 - 0 + 2 \times (-5) = -10$$

3. Οι ορίζουσες των πινάκων υψηλότερων διαστάσεων υπολογίζονται κατά τον ίδιο τρόπο. Φυσικά, όσο μεγαλύτερες είναι οι διαστάσεις του πίνακα, τόσο πιο περίπλοκοι γίνονται οι υπολογισμοί. Το ανάπτυγμα του Laplace μας επιτρέπει τον υπολογισμό των οριζουσών για πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων, σε όρους οριζουσών διαστάσεων (2×2). Έτσι, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε έναν (4×4) πίνακα, A, τότε:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+\,a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Κάθε παράγοντας της παραπάνω παράστασης μπορεί να γραφεί σε όρους οριζουσών των (2 × 2) πινάκων, όπως στα παραδείγματα 1 και 2 που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

5.4.3 Χρήσιμοι ορισμοί

Οι ακόλουθοι ορισμοί είναι σημαντικοί προκειμένου να βρεθούν τα ελάχιστα και τα μέγιστα πολυμεταβλητών συναρτήσεων, θέματα τα οποία καλύπτονται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

Ο πίνακας A είναι ***θετικά ορισμένος (positive definite)***, εάν και μόνον εάν (if and only if) όλες οι διαδοχικές ***πρωτεύουσες ή κύριες ελάσσονες (principal minors)*** του πίνακα είναι θετικές. Δηλαδή, για έναν (n × n) πίνακα A:

$$\alpha_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad |A| > 0$$

Ο πίνακας A είναι θετικά ***ημί-ορισμένος (positive semi-definite)***, όταν τουλάχιστον μία από τις παραπάνω κύριες ελάσσονες είναι 0.

Ο πίνακας A είναι ***αρνητικά ορισμένος (negative definite)***, εάν και μόνο εάν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες του πίνακα εναλλάσσουν πρόσημα, ξεκινώντας με αρνητικό πρόσημο. Δηλαδή, για ένα (n x n) πίνακα A:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots$$

όπου, $\text{πρόσημο}(|A|) = \text{πρόσημο}\left[(-1)^n\right]$

Ο πίνακας A είναι αρνητικά ***ημί-ορισμένος (semi-definite)***, όταν τουλάχιστον μία από τις παραπάνω κύριες ελάσσονες είναι 0

5.4.4 Ιδιότητες των οριζουσών

• Εάν όλα τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης ενός πίνακα είναι μηδέν (0) τότε η ορίζουσα είναι μηδέν, $D = 0$

• Εάν οποιεσδήποτε δύο γραμμές ή στήλες ενός πίνακα εναλλαχτούν, το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει. Δηλαδή, $|B| = -|A|$

Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $|A|$, όπου $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, είναι $|A| = -10$. Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, ο οποίος είναι ο πίνακας A με την πρώτη και τρίτη στήλη να εναλλάσσονται μεταξύ τους. Η ορίζουσα του B είναι:

$$|B| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 0 + 6 \times 0 = 10,$$

η οποία ισούται με $-|A|$

• Ας συμβολίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα A ως $|A|$ και ας υποθέσουμε ότι όλα τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης του πίνακα πολλαπλασιάζονται με μία σταθερά λ, δίνοντας τον πίνακα B. Τότε ισχύει, $|B| = \lambda|A|$

Παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε ότι $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας B προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή του A με 2. Δηλαδή, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε

$$|B| = 6\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 0 - 0 + 2 \times (-10) = -20,$$

το οποίο είναι $2|A| = 2(-10) = -20$

• Εάν όλα τα στοιχεία ενός πίνακα $A_{n\times n}$ πολλαπλασιαστούν με μια σταθερά λ τότε ισχύει $|\lambda A_{n\times n}| = \lambda^n |A_{n\times n}|$

Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι για τον

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -10$$

Ας θεωρήσουμε ότι $\lambda = 2$, τότε

$$\lambda A = B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 12\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 12 \times 0 - 0 + 4x(-20) = -80$$

Όμως, $|2A_{3\times3}| = 2^3|A_{3\times3}| = 8(-10) = -80 = |B|$

• Εάν ένα πολλαπλάσιο μίας γραμμής (στήλης) προστεθεί σε μία άλλη γραμμή (στήλη), η τιμή της ορίζουσας παραμένει αμετάβλητη.

Παράδειγμα:

Ας θεωρήσουμε ότι $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Αφαιρώντας 2 φορές τη δεύτερη στήλη του πίνακα A από την τρίτη παράγεται ο πίνακας

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Τώρα, είναι εύκολο να επεκταθούμε κατά μήκος της τρίτης στήλης προκειμένου να βρούμε την ορίζουσα του B:

$$|B| = 0 - 0 + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 = |A|$$

• Ένας πίνακας, ο οποίος έχει δύο γραμμές ή δύο στήλες ίδιες, έχει ορίζουσα ίση με το μηδέν (0). Αυτό προκύπτει από τις παραπάνω ιδιότητες, δεδομένου ότι εάν η δεύτερη γραμμή (στήλη), η οποία, ας πούμε, είναι ισοδύναμη με την πρώτη, αφαιρεθεί από την πρώτη, θα δημιουργηθεί μία γραμμή (στήλη) ίση με μηδέν. Ωστόσο, η ορίζουσα ενός πίνακα, ο οποίος έχει μία γραμμή ή στήλη με όλα τα στοιχεία μηδέν, θα είναι μηδέν.

Παραδείγματα:

1. Ας υποθέσουμε ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $|A| = 0$

2. Ας υποθέσουμε ότι $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $|A| = 0$

• Εάν μία οποιαδήποτε γραμμή (στήλη) ενός πίνακα αποτελεί πολλαπλάσιο –είναι ***γραμμικός συνδυασμός (linear combination)***– μιας άλλης γραμμής (στήλης) του πίνακα, η ορίζουσα του πίνακα ισούται με μηδέν.[6]

Παράδειγμα:

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$ η δεύτερη στήλη ισούται με 2 φορές την πρώτη στήλη. Συνεπώς,

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= (12 - 24) - 2(6 - 12) + 4(36 - 36) = 0$$

Ένας πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο διανυσμάτων γραμμών ή στηλών. Ως αποτέλεσμα, η παραπάνω ιδιότητα των οριζουσών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί κατά πόσον ένα σύνολο διανυσμάτων είναι ***ανεξάρτητο (independent)***. Εάν η ορίζουσα ενός πίνακα δεν ισούται με μηδέν, τότε τα διανύσματα των γραμμών και των στηλών που περιλαμβάνει ο πίνακας είναι ανεξάρτητα. Καμία γραμμή (στήλη) δεν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των άλλων γραμμών (στηλών) του πίνακα.

• Η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του ανάστροφου του: $|A| = |A'|$.

---

6. Ένα διάνυσμα γραμμή, $\underline{x} = (X_1 \ldots X_n)$, λέγεται ότι αποτελεί ***γραμμικό συνδυασμό (linear combination)*** κάποιου άλλου διανύσματος γραμμή, $\underline{y} = (Y_1 \ldots Y_n)$, εάν υπάρχει κάποια μη μηδενική σταθερά (scalar), $\lambda(\neq 0)$, η οποία όταν πολλαπλασιάσει τα στοιχεία του διανύσματος $\underline{x}$ δίνει τα στοιχεία του $\underline{y}$. Δηλαδή, $\underline{x} = \lambda\underline{y}$. Σ' αυτήν την περίπτωση λέγεται ότι τα διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{y}$ είναι ***εξαρτημένα (dependent)*** μεταξύ τους. Για παράδειγμα, τα διανύσματα σειρές (2 6) και (1 3) είναι γραμμικά εξαρτημένα, καθώς τα στοιχεία του πρώτου διανύσματος μπορεί να υπολογιστούν, πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία του δεύτερου διανύσματος με τη μη-μηδενική σταθερά 2.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα: Οι γραμμές του Α είναι ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν $|A| \neq 0$. Δηλαδή εάν και μόνο εάν $|A'| \neq 0$, το οποίο απαιτεί ανεξαρτησία των γραμμών του Α'. Ωστόσο οι γραμμές του Α' είναι οι στήλες του Α. Συνεπώς, ανεξαρτησία των γραμμών του Α συνεπάγεται ανεξαρτησία των στηλών του Α'.

• Η ορίζουσα ενός τριγωνικού (n x n) πίνακα Α ισούται με το γινόμενο της κύριας διαγωνίου του Α.

Παράδειγμα:

Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ισούται με:

$$|A| = 1 \times 6 \times 2 = 12$$

Οι παραπάνω ιδιότητες μπορεί να καταστούν χρήσιμες κατά τον υπολογισμό της τιμής της ορίζουσας. Για παράδειγμα, το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιούνται μπορεί να μειωθεί εάν όλα τα στοιχεία σε μία γραμμή ή στήλη έχουν ένα κοινό παράγοντα. Επίσης, πρόσθεση (αφαίρεση) των πολλαπλάσιων μίας γραμμής (στήλης) σε μία άλλη μπορεί να έχει παρόμοια αποτελέσματα. Εάν μέσω αυτών των πράξεων μπορούν να δημιουργηθούν γραμμές (στήλες) με 0, τότε οι υπολογισμοί απλοποιούνται εξαιρετικά.

Παράδειγμα:

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, πολλαπλασιάζουμε την 3η στήλη με -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην 1η στήλη. Αυτό παράγει $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. $|B| = |A|$, ωστόσο η ορίζουσα είναι σχετικά πιο εύκολο να υπολογιστεί κατά μήκος της 1ης στήλης του Β, σε σύγκριση με την εκτίμηση της ορίζουσας μέσω του πίνακα Α.

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν οι ορίζουσες τετραγωνικών πινάκων οποιονδήποτε διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τον (3 × 3) πίνακα Α του προηγούμενου παραδείγματος. Τα δεδομένα του πίνακα εισάγονται στα κελιά *b6:d8*, όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου, και η ορίζουσα εκτιμάται στο κελί *f6*. Ας πάμε στο κελί *f6*, και ας επιλέξουμε την ομάδα *Math&Trig* στον οδηγό συναρτήσεων (*function-wizard*) του Excel. Επιλέγουμε την *mdeterm*, η οποία απαιτεί τον προσδιορισμό της περιοχής που βρίσκεται ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου ζητείται η ορίζουσα. Προσδιορίζουμε την περιοχή *b6:d8* και επιλέγουμε *OK* για τον υπολογισμό της ορίζουσας. Εναλλακτικά, στο κελί f6 εισάγουμε τον τύπο = *mdeterm(b6:d8)* και πατάμε *enter*. Αυτό θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, -23, στο κελί f6

• Έστω ο πίνακας Γ ο οποίος είναι το γινόμενο των πινάκων Α και Β, δηλαδή $\Gamma = A \times B$. Τότε $|\Gamma| = |A \times B| = |A| \times |B|$. Δηλαδή, εάν ήδη έχουν υπολογιστεί οι ορίζουσες των Α και Β, η ορίζουσα του Γ μπορεί να υπολογιστεί ως το γινόμενο των οριζουσών των Α και Β.

5.5 Πράξεις πινάκων (matrix operations)

5.5.1 Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων

Κατά την ***πρόσθεση (addition)*** και ***αφαίρεση (subtraction)*** πινάκων, οι πίνακες που προστίθενται ή αφαιρούνται θα πρέπει να είναι ***συμβατοί (compatible)*** για πρόσθεση και αφαίρεση. Δηλαδή, θα πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Ο κανόνας της πρόσθεσης (αφαίρεσης) είναι ότι, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων προστίθενται (αφαιρούνται). Έτσι, εάν Α και Β είναι και οι δύο πίνακες διαστάσεων (m × n), τότε αυτοί μπορεί να προστεθούν/αφαιρεθούν και ο νέος πίνακας, C, που θα σχηματιστεί, έχει τις ίδιες διαστάσεις όπως οι Α και Β.

Παραδείγματα:

1. Ο παρακάτω πίνακας, Α, παρουσιάζει τον αριθμό (σε εκατοντάδες) των καφασιών που περιέχουν μήλα, μπανάνες και πορτοκάλια, (οι γραμμές του πίνακα) και τα οποία φορτώνονται στα τρία αμπάρια (οι στήλες του πίνακα) ενός πλοίου ψυγείου που βρίσκεται στο λιμάνι Α. Ο πίνακας Β δείχνει τα καφάσια που αντιστοιχούν στο κάθε ένα από τα

τρία προϊόντα και φορτώνονται σε κάθε αμπάρι του πλοίου από κάποιο άλλο λιμάνι B. Να βρεθεί το συνολικό φορτίο του κάθε εμπορεύματος, σε κάθε αμπάρι του πλοίου, μετά τη φόρτωση από το λιμάνι B. Δηλαδή, δοθέντων των

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε $C = A + B$.

$$C = A_{3\times 3} + B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Ας υποθέτουμε ότι το πλοίο ξεφορτώνει κάποια από τα εμπορεύματα σ' ένα τρίτο λιμάνι, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Πως είναι διανεμημένα τα φορτία στ' αμπάρια του πλοίου τώρα;

Σ' αυτήν την περίπτωση, απαιτείται να πραγματοποιηθεί αφαίρεση πινάκων. Σημειώνεται ότι παρόλο που κανένα καφάσι με μήλα δεν ξεφορτώθηκε από το πλοίο, όπως φαίνεται από τα 0 της πρώτης γραμμής του πίνακα D, ο πίνακας D θα πρέπει να είναι διαστάσεων (3×3) προκειμένου να καταστεί δυνατή η αφαίρεση του από τον (3×3) πίνακα C. Το φορτίο του πλοίου μετά την εκφόρτωση υπολογίζεται ως:

$$E = C - D = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 0 & 5 & 2 \\ 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

5.5.2 Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων

Έστω A, B, C τρεις πίνακες των ιδίων διαστάσεων. Οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν κατά την πρόσθεση πινάκων.

• ***Αντιμεταθετική ιδιότητα (Commutative law)***

$$A + B = B + A$$

• ***Προσεταιριστική ιδιότητα (Associative law)***

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Για την αφαίρεση πινάκων ισχύουν επίσης η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα.

Αυτό δεικνύεται εύκολα καθώς $A - B = A + (-B)$.

• Μια άλλη ιδιότητα της πράξης πινάκων είναι: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$, όπου $0_{m\times n}$ είναι ο μηδενικός πίνακας και $-A$ είναι ο αντίθετος του A.

Παράδειγμα:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -12 & -13 \\ -8 & -8 & -6 \\ -11 & -14 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση δύο ή περισσότερων πινάκων. Εισάγουμε τα δεδομένα των πινάκων σε προκαθορισμένες περιοχές του φύλλου εργασίας, ας πούμε τα δεδομένα του πίνακα A στα κελιά B10 έως D12 και τον πίνακα B στα κελιά F10 με H12, όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Για το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των δύο (3×3) πινάκων απαιτείται μια ελεύθερη περιοχή (3×3). Έτσι, πάμε, ας πούμε, στο κελί J10 του φύλλου εργασίας και εισάγουμε τον τύπο = B10 + F10, ο οποίος προσθέτει τα στοιχεία των κελιών B10 και F10 και τοποθετεί το αποτέλεσμα στο κελί J10. Αυτός ο τύπος μπορεί να αντιγραφεί στα υπόλοιπα κελιά, στην (3×3) περιοχή J10 έως L12. Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί, προκειμένου να αφαιρέσουμε δύο ή περισσότερους πίνακες, ή πίνακες υψηλότερων διαστάσεων

5.5.3 Βαθμωτός πολλαπλασιασμός (Scalar multiplication)

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα μ' έναν ***αριθμό (scalar)***, ας πούμε τον λ, πραγματοποιείται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του πίνακα μ' αυτόν τον αριθμό. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός, επειδή διαβαθμίζει (άνω ή κάτω) τον πίνακα ανάλογα με το μέγεθος (και το πρόσημο) του αριθμού.

Να σημειωθεί ότι για το βαθμωτό πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλαδή, $\lambda A = A\lambda$.

Παραδείγματα:

1. Δίνονται $\lambda = -3$ και $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός λA είναι:

$$-3A = \begin{pmatrix} 8(-3) & 9(-3) & 7(-3) \\ 3(-3) & 6(-3) & 2(-3) \\ 4(-3) & 5(-3) & 10(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -27 & -21 \\ -9 & -18 & -6 \\ -12 & -15 & -30 \end{pmatrix}$$

2. Στο πρώτο παράδειγμα του κεφαλαίου εξετάσαμε τον πίνακα των βαθμών τεσσάρων φοιτητών σε τρεις εξετάσεις. Ας υποθέσουμε ότι οι βαθμοί που αποκτήθηκαν αυτό το ακαδημαϊκό έτος είναι εξαιρετικά υψηλοί, σε σχέση με το προηγούμενο έτος, και έτσι αποφασίστηκε να μειωθούν οι βαθμοί όλων των εξετάσεων κατά 10%. Προκειμένου να υπολογιστούν οι διορθωμένοι βαθμοί πολλαπλασιάζουμε τον αρχικό πίνακα με 0,9. Έτσι,

$$0{,}9\begin{pmatrix} 77 & 79 & 84 \\ 90 & 96 & 98 \\ 67 & 72 & 75 \\ 62 & 79 & 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 71 & 76 \\ 81 & 86 & 88 \\ 60 & 65 & 68 \\ 56 & 71 & 86 \end{pmatrix}$$

5.5.4 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων και εσωτερικά γινόμενα (Vector multiplication and inner products)

Το ***εσωτερικό γινόμενο (inner product)*** ενός $(1 \times n)$ διανύσματος γραμμής $\underline{a} = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ και ενός $(n \times 1)$ διανύσματος στήλης $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, τα οποία συμβολίζονται $\underline{a} \cdot \underline{b}$, είναι ένας αριθμός:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας αριθμός και ορίζεται μόνο όταν το διάνυσμα γραμμή έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με το διάνυσμα στήλη.

Παραδείγματα:

1. Το εσωτερικό γινόμενο του $\underline{a}_{1\times5} = (3 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \quad 9)$ και του $\underline{b}_{5\times1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι:

$$\underline{a}_{1\times5} \cdot \underline{b}_{5\times1} = (3 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \quad 9)\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= [3(8) + 5(-3) + 7(-1) + 0(2) + 9(4)] = 38$$

2. Όταν τα στοιχεία ενός διανύσματος στήλης, $\underline{b}$, είναι 1, τότε το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος γραμμής, $\underline{a}$, με το διάνυσμα στήλης των 1, δίνει το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος $\underline{a}$. Δηλαδή:

$$(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

3. Μία εξίσωση, όπως η $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$, μπορεί να εκφραστεί μέσω της άλγεβρας των πινάκων ως:

$$(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως το εσωτερικό γινόμενο, $\underline{a} \cdot \underline{x} = b$.
Έτσι, η $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18$ μπορεί να γραφεί ως:

$$(2 \quad -1 \quad 5)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 18$$

Εάν χρησιμοποιηθεί ο ανάστροφος του $\underline{x}$, στο παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, αντί για τον $\underline{a}$, το αποτέλεσμα θα είναι ***το άθροισμα των τετραγώνων των x***. Δηλαδή,

$$\underline{x}' \cdot \underline{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

4. Ένας επενδυτής έχει ένα χαρτοφυλάκιο με n μετοχές με σταθμίσεις (ποσοστά των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο) που αντιπροσωπεύονται από το ακόλουθο διάνυσμα γραμμή $\underline{w}' = (w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n)$, όπου:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Προηγούμενες ποσοστιαίες αποδόσεις των μετοχών, που βρίσκονται στο χαρτοφυλάκιο, εκφράζονται από το διάνυσμα $\underline{r}' = (r_1 \quad r_2 \quad \ldots \quad r_n)$. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί από το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο, των σταθμίσεων ($\underline{w}'$), επί τις αποδόσεις ($\underline{r}$):

$$\underline{w}' \cdot \underline{r} = (w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} w_ir_i$$

Έτσι, εάν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από 4 μετοχές, με σταθμίσεις στο χαρτοφυλάκιο $\underline{w}' = (0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}1 \quad 0{,}4)$ και προηγούμενες αποδόσεις, εκφρασμένες ως ποσοστά $\underline{r}' = (10 \quad 20 \quad 15 \quad 5)$, η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\underline{w}' \cdot \underline{r} = (0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}1 \quad 0{,}4)\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}2 \times 10 + 0{,}3 \times 20 + 0{,}1 \times 15 + 0{,}4 \times 5 = 11{,}5\%$$

5. Εάν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι 0, τα διανύσματα είναι ***ορθογώνια (orthogonal)***[7]. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνια, καθώς, όπως βλέπουμε παρακάτω, το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0.

$$(1 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$$

Εάν δύο διανύσματα είναι ορθογώνια και επιπλέον το μήκος τους ισούται με τη μονάδα (unity), τότε αυτά ονομάζονται ***ορθοκανονικά (orthonormal)***. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ορθοκανονικά καθώς έχουν μήκος ίσο με τη μονάδα (όταν απεικονίζονται σ' ένα ζευγάρι αξόνων, όπου το πρώτο στοιχείο βρίσκεται στον οριζόντιο άξονα ενώ το δεύτερο στοιχείο είναι στον κάθετο άξονα) και το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

7. Ο όρος ορθογώνιο προέρχεται από τη γεωμετρία, όπου ορθογώνια διανύσματα σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους.

5.5.5 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Για τον ***πολλαπλασιασμό δύο πινάκων***, οι πίνακες προς πολλαπλασιασμό θα πρέπει να είναι ***συμβατοί για πολλαπλασιασμό (conformable for multiplication)***. Δηλαδή, οι στήλες του πρώτου ***–του κύριου (lead) πίνακα, A***, θα πρέπει να είναι ίσες με τις γραμμές του δεύτερου– του ***υστερότερου (lag) πίνακα, B***. Ο πίνακας που προκύπτει θα έχει διαστάσεις ίσες με τις γραμμές του κύριου πίνακα επί τις στήλες του υστερότερου πίνακα. Δηλαδή,

$$\underset{(n\times m)}{A} \times \underset{(m\times k)}{B} = \underset{(n\times k)}{C}$$

Στο γινόμενο A × B, ο πίνακας B λέγεται ότι ***πολλαπλασιάζει από δεξιά (postmultiplies)*** τον A, ενώ ο A ***πολλαπλασιάζει από αριστερά (premultiplies)*** τον B.

Κανόνας του πολλαπλασιασμού πινάκων: Εάν οι πίνακες A και B είναι συμβατοί για πολλαπλασιασμό, τότε κάθε διάνυσμα γραμμή στον κύριο πίνακα, A, πολλαπλασιάζεται με κάθε διάνυσμα στήλη στον υστερότερο πίνακα, B, σύμφωνα με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού διανυσμάτων (εσωτερικό γινόμενο) που περιγράφηκε παραπάνω. Το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός, c_{ij}, ο οποίος τοποθετείται στη σειρά i και στήλη j του νέου πίνακα C. Δηλαδή υπολογίζεται ως το γινόμενο της σειράς i του A, επί τη στήλη j του B. Αυτή η διαδικασία ακολουθείται για τον υπολογισμό κάθε στοιχείου του C.

Για να παρουσιάσουμε τον κανόνα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε την απλή περίπτωση του πολλαπλασιασμού των δύο (2 × 2) πινάκων A και B. Το γινόμενο τους σε γενικευμένη μορφή μπορεί να γραφεί ως:

$$A \times B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11} \;\; a_{12})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & (a_{11} \;\; a_{12})\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ (a_{21} \;\; a_{22})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & (a_{21} \;\; a_{22})\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}b_{11} + \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12} + \alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12} + \alpha_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του γινομένου AB αποτελούνται από τα εσωτερικά γινόμενα των αντίστοιχων διανυσμάτων τους.

Παραδείγματα:

1. Δεδομένων των παρακάτω πινάκων A, B και D, να βρεθούν τα γινόμενα i) A × B, ii) B × D και iii) A × D.

Απαντήσεις:

i) *Αρχικά ελέγχουμε κατά πόσον οι πίνακες A και B είναι συμβατοί για πολλαπλασιασμό. Οι διαστάσεις των πινάκων είναι (2 × 3) και (3 × 2). Καθώς οι στήλες του κυρίου πίνακα είναι ίσες με τις γραμμές του υστερότερου πίνακα οι πίνακες A και B είναι συμβατοί για πολλαπλασιασμό. Το γινόμενο των πινάκων που προκύπτει θα είναι διαστάσεων (2 × 2). Επομένως, μπορούμε να προχωρήσουμε στον πολλαπλασιασμό ως εξής,*

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(6)+6(5)+\;7(13) & 3(12)+6(10)+\;7(2) \\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18+30+\;91 & 36+60+14 \\ 72+45+143 & 144+90+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 256 \end{pmatrix}$$

ii) *Για την πράξη B × D, οι πίνακες B και D είναι συμβατοί για πολλαπλασιασμό και ο πίνακας που προκύπτει είναι διαστάσεων (3 × 3). Επομένως,*

$$B \times D = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6(1)+12(2) & 6(7)+12(4) & 6(8)+12(3) \\ 5(1)+10(2) & 5(7)+10(4) & 5(8)+10(3) \\ 13(1)+\;2(2) & 13(7)+\;2(4) & 13(8)+\;2(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+24 & 42+48 & 48+36 \\ 5+20 & 35+40 & 40+30 \\ 13+4 & 91+8 & 104+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 90 & 84 \\ 25 & 75 & 70 \\ 17 & 99 & 110 \end{pmatrix}$$

iii) *Για το γινόμενο $A \times D$, ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι διαφορετικός από τον αριθμό των γραμμών του πίνακα D. Επομένως οι πίνακες δεν είναι συμβατοί για πολλαπλασιασμό και το γινόμενο $A \times D$ δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.*

2. Υποθέτουμε ότι στο παράδειγμα των εξετάσεων των φοιτητών, οι τελικοί μέσοι όροι των βαθμών των φοιτητών κατά το φθινοπωρινό εξάμηνο υπολογίζονται, σταθμίζοντας τα αποτελέσματα των εξετάσεων, με 0,3, 0,3 και 0,4, αντίστοιχα. Συμβολίζοντας τον πίνακα των βαθμών των φοιτητών με A και τα σταθμά των εξετάσεων με το διάνυσμα $\underline{w}_1$, ο ακόλουθος πολλαπλασιασμός πινάκων υπολογίζει τον τελικό μέσο όρο για κάθε φοιτητή.

$$A \times \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 77 & 79 & 84 \\ 90 & 96 & 98 \\ 67 & 72 & 75 \\ 62 & 79 & 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}30 \\ 0{,}40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 95 \\ 72 \\ 81 \end{pmatrix}$$

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον πολλαπλασιασμό των δύο, συμβατών για πολλαπλασιασμό, πινάκων του παραδείγματος 2, ως εξής: Τοποθετούμε τα δεδομένα των πινάκων στα κελιά b14 έως d17 και f14 έως f16, όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Μαυρίζουμε την περιοχή h14 έως h17, όπου θα παρουσιαστεί το αποτέλεσμα. Σημειώνεται ότι οι διαστάσεις της περιοχής όπου θα παρουσιαστεί το αποτέλεσμα είναι (4 × 1), εφόσον ο (4 × 3) πίνακας A πολλαπλασιάζεται με τον (3 × 1) πίνακα (διάνυσμα στήλη) $\underline{w}_1$. Στο κελί h14 εισάγουμε το σύμβολο ίσον και επιλέγουμε το *mmult* στο *math & trig* μέρος του οδηγού συναρτήσεων στο φύλλο εργασίας. Δύο πίνακες (περιοχές) απαιτείται να οριστούν τώρα, ο πρώτος είναι *b14:d17*, ο δεύτερος είναι *f14:f16*. Στη συνέχεια πατάμε *Ctrl, Shift* και *Enter* μαζί για να ολοκληρωθεί η πράξη. Το αποτέλεσμα φαίνεται στα κελιά h14 με h17 και επιβεβαιώνει αυτό του παραδείγματος 2.

Εναλλακτικά, μόλις μαυρίσουμε την περιοχή h14:h17 εισάγουμε τον τύπο = *mmult(a14:c17,e14:e16)* στο κελί h14 και πατάμε *Ctrl, Shift* και *Enter* μαζί για να ολοκληρωθεί η πράξη

3. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πέντε περαιτέρω εξετάσεις για το εαρινό εξάμηνο, οι οποίες φέρουν ισοδύναμο ειδικό βάρος μεταξύ τους. Αυτό το μέρος του προγράμματος σπουδών συνεισφέρει το 60% του συνολικού βαθμού στο ακαδημαϊκό έτος, ενώ το φθινοπωρινό εξάμηνο συνεισφέρει το 40% του συνολικού βαθμού στο ακαδημαϊκό έτος. Στον παρακάτω (4 × 5) πίνακα B παρουσιάζονται οι βαθμοί που αποκόμισαν οι τέσσερις φοιτητές στις πέντε εξετάσεις του εαρινού εξαμήνου:

$$B = \begin{pmatrix} 60 & 67 & 75 & 56 & 40 \\ 65 & 49 & 56 & 70 & 38 \\ 78 & 42 & 69 & 80 & 48 \\ 56 & 58 & 67 & 62 & 55 \end{pmatrix}$$

Ο τελικός βαθμός του ακαδημαϊκού έτους, για τον κάθε φοιτητή, υπολογίζεται ως εξής:

$$0{,}4 \times A \times \underline{w}_1 + 0{,}6 \times B \times \underline{w}_2$$

$$= 0{,}4 \begin{pmatrix} 77 & 79 & 84 \\ 90 & 96 & 98 \\ 67 & 72 & 75 \\ 62 & 79 & 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}30 \\ 0{,}40 \end{pmatrix} + 0{,}6 \begin{pmatrix} 60 & 67 & 75 & 56 & 40 \\ 65 & 49 & 56 & 70 & 38 \\ 78 & 42 & 69 & 80 & 48 \\ 56 & 58 & 67 & 62 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 68 \\ 71 \\ 67 \\ 68 \end{pmatrix}$$

Επομένως, ο τελικός μέσος βαθμός του ακαδημαϊκού έτους για τους φοιτητές με αύξοντα αριθμό 1, 2, 3 και 4 είναι 68, 71, 67 και 68, αντίστοιχα.

Το ***Excel*** χρησιμοποιείται για να παρουσιάσει την παραπάνω πράξη όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Τα δεδομένα του (4 × 3) πίνακα Α βρίσκονται στα κελιά a24:c27, ο (4 × 5) πίνακας Β είναι στα κελιά e24:i27, το (3 x 1) διάνυσμα $\underline{w}_1$ βρίσκεται στα κελιά k24:k26 και το (5 x 1) διάνυσμα $\underline{w}_2$ είναι στα κελιά m24:m28. Τα αποτελέσματα των βαθμωτών πολλαπλασιασμών 0,4*A και 0,6*B φαίνονται στα κελιά a30:c33 και στα d30:h33, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών του 0,4*A με το διάνυσμα $\underline{w}_1$ και του 0,6*B με το $\underline{w}_2$ φαίνονται στα κελιά j30:j33 και k30:k33. Τέλος, το άθροισμα των δύο (4 × 1) διανυσμάτων των κελιών j30:j33 και k30:k33 υπολογίζεται στα κελιά m30:m33.

Η κατασκευή του φύλλου εργασίας για τους παραπάνω υπολογισμούς κατ' αυτόν τον τρόπο είναι βολική, καθώς εάν οποιαδήποτε από τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τελικών μέσων όρων των βαθμών αλλάξει, οι βαθμοί αυτοί προσαρμόζονται αυτόματα μέσω των τύπων που έχουν κατασκευαστεί. Για παράδειγμα, εάν οι σταθμίσεις των εξετάσεων για τον υπολογισμό του τελικού βαθμού αλλάξουν, απλά αλλάζουμε τις τιμές του διανύσματος $\underline{w}_1$ ή του $\underline{w}_2$ στα κατάλληλα κελιά, οπότε οι νέοι σταθμικοί μέσοι όροι υπολογίζονται αυτόματα από τους ήδη υπάρχοντες τύπους

4. Μετρήσεις κινδύνου που σχετίζονται με τη διακράτηση ενός ***χαρτοφυλακίου (portfolio)*** n μετοχών, σε όρους ***διακυμάνσεων (variances)*** και ***συνδιακυμάνσεων (covariances)***, μπορεί να διαταχθεί στον ακόλουθο συμμετρικό (n × n) πίνακα, X_{nn}. Στον πίνακα αυτό, τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$ αποτελούν τις διακυμάνσεις, ενώ ως στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου τοποθετούνται οι συνδιακυμάνσεις.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Εάν τα στοιχεία του ακόλουθου διανύσματος των σταθμίσεων $\underline{w}' = (w_1 \ \ w_2 \ \ \ldots \ \ w_n)$ παρουσιάζουν το ποσοστό που έχει επενδυθεί στην κάθε μετοχή που περιλαμβάνεται στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή, τότε ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί μέσω της άλγεβρας των πινάκων ως εξής:

$$\underline{w}'X\underline{w}$$

Η αναλυτική παρουσίαση των εννοιών των διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων, οι οποίες είναι αναγκαίες για την διαμόρφωση του πίνακα X πιο πάνω, αποτελεί μέρος της στατιστικής και δεν καλύπτεται εδώ.[8] Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το ***Excel*** μπορεί να υπολογίσει τις διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών από ένα σύνολο δεδομένων. Εν συνεχεία, πράξεις πινάκων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν το συνολικό κίνδυνο της διακράτησης του χαρτοφυλακίου.

Ας δούμε τώρα το ακόλουθο απλό παράδειγμα ενός χαρτοφυλακίου 3 μετοχών με σταθμίσεις 0,4, 0,4 and 0,2 και ***πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης (variance-covariance)*** $X = \begin{pmatrix} 5 & 365 & 480 \\ 365 & 20 & 760 \\ 480 & 760 & 30 \end{pmatrix}$. Οι σταθμίσεις υποδηλώνουν ότι 40% του συνολικού ποσού που έχει επενδυθεί στο χαρτοφυλάκιο έχει τοποθετηθεί στη μετοχή X1, 40% στη μετοχή X2 και 20% στη X3. Επίσης, στην κύρια διαγώνιο του πίνακα βλέπουμε ότι η διακύμανση των τιμών περί της μέσης τιμής τους για τη μετοχή X1 είναι 5, για την X2 είναι 20 και για την X3 είναι 30. Τα υπόλοιπα νούμερα στον πίνακα αναφέρονται σε συνδιακυμάνσεις μεταξύ ζευγαριών μετοχών. Έτσι, η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών των μετοχών X1 και X2 είναι 365, η συνδιακύμανση μεταξύ των X1 και X3 είναι 480, κλπ. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

8. Εν συντομία, εάν η ***μέση τιμή (mean value)*** μιας μεταβλητής X υπολογιζόμενη από ένα δείγμα δεδομένων μεγέθους n, είναι $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, η ***διακύμανση (Variance)*** της μεταβλητής υπολογίζεται ως $V(X)) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$, ενώ η ***συνδιακύμανση (Covariance)*** μεταξύ της X και μιας άλλης μεταβλητής Y υπολογίζεται ως $C(X, Y) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})/(n-1)$.

ακολουθεί τη γενική ιδιότητα των πινάκων αυτού του είδους και είναι συμμετρικός. Τέλος, ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την άλγεβρα πινάκων ως εξής:

$$\underline{w}'X\underline{w} = (0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}2)\begin{pmatrix} 5 & 365 & 480 \\ 365 & 20 & 760 \\ 480 & 760 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = 320{,}4$$

Στο παράρτημα του κεφαλαίου, βλέπουμε πως μπορεί να υπολογιστεί ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου με χρήση του Excel. Στα κελιά A38 έως C38 εισάγονται τα δεδομένα του σταθμικού διανύσματος, $\underline{w}$, στην ανάστροφή του μορφή, $\underline{w}'$. Στα κελιά E38 έως G40 τοποθετούνται τα δεδομένα του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, VC, δηλαδή το X. Στο χώρο I38 έως I40 βλέπουμε το διάνυσμα $\underline{w}$. Τέλος, το διάνυσμα $\underline{w}'$ VC, δηλαδή το $\underline{w}'X$ και η ποσότητα $\underline{w}'$ VC$\underline{w}$, δηλαδή η $\underline{w}'X\underline{w}$, υπολογίζονται στα κελιά K38 έως M38 και O38, αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του κελιού O38 επιβεβαιώνει το παραπάνω αποτέλεσμα, $\underline{w}'X\underline{w} = 320{,}4$

5.5.6 Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων

Οι ακόλουθοι πίνακες χρησιμοποιούνται στα παρακάτω παραδείγματα, τα οποία παρουσιάζονται προς κατανόηση των ιδιοτήτων που αναφέρονται:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• Γενικά, στον πολλαπλασιασμό πινάκων ***δεν ισχύει η αντιμεταθετική (commutative) ιδιότητα***. Δηλαδή:

$$A \times B \neq B \times A$$

Παράδειγμα:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 45 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Επομένως: $A \times B \neq B \times A$.

• ***Προσεταιριστική ιδιότητα (Associative law)***: Εάν τρεις ή περισσότεροι πίνακες, π.χ. οι $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$ και $C_{k\times l}$, συμβατοί για πολλαπλασιασμό, πολλαπλασιάζονται με τη σειρά συμβατότητάς τους (in the order of conformability), τότε ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Άρα:

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

Παράδειγμα:

$$(A \times B) \times C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 75 \\ 188 & 162 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 44 & 36 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 90 & 75 \\ 188 & 162 \end{pmatrix} = (A \times B) \times C$$

• ***Επιμεριστική ιδιότητα (Distributive law)***: Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες, στον πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα. Έτσι:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Παράδειγμα:

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}2&1\\4&6\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3&7\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&5\\2&3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&12\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&28\\64&72\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}2&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&5\\2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&15\\12&34\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}22&13\\52&38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&28\\64&72\end{pmatrix}=A(B+C)$$

• ***Πολλαπλασιασμός του πίνακα A, με τον μοναδιαίο πίνακα, I,*** αφήνει τον αρχικό πίνακα αμετάβλητο. Δηλαδή:

$$A_{n\times n}I_{n\times n}=I_{n\times n}A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

Επίσης:

$$I_{n\times n}I_{n\times n}=I^2_{n\times n}=I_{n\times n}$$

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι ως εξαίρεση, στον πολλαπλασιασμό πινάκων, ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όταν ο ένας από τους πίνακες είναι ο μοναδιαίος.

Παραδείγματα:

1. $$A_{2\times2}I_{2\times2}=\begin{pmatrix}2&1\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2(1)+1(0)&2(0)+1(1)\\3(1)+6(0)&3(0)+6(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&6\end{pmatrix}=A$$

και

$$I_{2\times2}A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1(2)+0(3)&1(1)+0(6)\\0(2)+1(3)&0(1)+1(6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&6\end{pmatrix}=A$$

2. $$I_{2\times2}I_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_{2\times2}$$

5.5.7 Ο αντίστροφος ενός πίνακα (The inverse of a matrix)

Ο ***αντίστροφος*** ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ο νέος πίνακας A^{-1} με την ιδιότητα:

$$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I$$

Ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι ισοδύναμος με τον αντίστροφο ενός πραγματικού αριθμού. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας τον a με τον αντίστροφό του, $a^{-1}=1/a$, δίνει 1.

Ο υπολογισμός των αντίστροφων πινάκων απαιτείται, προκειμένου να μεταφέρουμε έναν πίνακα από τη μια πλευρά μιας εξίσωσης στην άλλη. Αυτό χρησιμοποιείται αργότερα, κατά τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων εκφρασμένες σε μορφή πινάκων.

Παραδείγματα:

1. Στην εξίσωση AB = C, για να μεταφέρουμε τον A στην άλλη πλευρά της εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε από αριστερά (premultiply) και τις δύο πλευρές με A^{-1}. Δηλαδή,

$$A^{-1}AB=A^{-1}C$$

Επομένως:

$$B=A^{-1}C$$

2. Στην εξίσωση AB = C, για να μεταφέρουμε τον B στην άλλη πλευρά της εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε από δεξιά (postmultiply) και τις δύο πλευρές με B^{-1}. Δηλαδή,

$$ABB^{-1}=CB^{-1}$$

Επομένως,

$$A=CB^{-1}$$

Έτσι, κατά τη λύση των ανωτέρω χρησιμοποιείται η ιδιότητα $A^{-1}A=I$, και $BB^{-1}=I$.

Ένας πίνακας A, του οποίου η ορίζουσα είναι 0, $|A|=0$, δεν μπορεί να αντιστραφεί. Λέγεται ότι ο πίνακας είναι ***μη-αντιστρέψιμος ή ότι είναι ιδιάζων (non invertible ή singular matrix)***. Ένας πίνακας του οποίου η ορίζουσα

είναι μη μηδενική, $|A| \neq 0$, μπορεί να αντιστραφεί. Ο πίνακας αυτός λέγεται ότι είναι ***αντιστρέψιμος ή μη-ιδιάζων (invertible ή non-singular)***.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+}$$

Όπου ο πίνακας A^{+} ***είναι ο προσαρτημένος (ή συζυγής) πίνακας (adjoint)*** του A, και η $|A|$ συμβολίζει την ορίζουσα του A.

Παραδείγματα:

1. Ο αντίστροφος του (2×2) πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

καθώς το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του A είναι $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$,

ενώ ο προσαρτημένος πίνακας του A είναι $A^{+} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

2. Ο αντίστροφος του $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Αρχικά βρίσκουμε την ορίζουσα του A για να προσδιορίσουμε κατά πόσον ο A είναι αντιστρέψιμος. Καθώς $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0) - 2(1) = -2 \neq 0$, ο A^{-1} υφίσταται. Στη συνέχεια βρίσκουμε τον προσαρτημένο πίνακα του A, $A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Τέλος,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ο παραπάνω πίνακας είναι ο αντίστροφος του A πολλαπλασιάζοντας τον με τον αρχικό πίνακα A. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι ο μοναδιαίος πίνακας I. Έτσι:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0(3) + (-2)1 & (0)(2) + (-2)(0) \\ (-1)(3) + 3(1) & (-1)2 + 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

3. Ακόμα ένας εναλλακτικός τρόπος για τον καθορισμό του αντίστροφου ενός πίνακα A, είναι να λάβουμε υπόψη την ιδιότητα $AA^{-1} = I$.

Ας εξετάσουμε ξανά τον παραπάνω πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, του οποίου η ορίζουσα είναι -2 και επομένως ο αντίστροφός του υφίσταται. Ο αντίστροφος του A έχει, επίσης, διαστάσεις (2×2), οι οποίες είναι ίδιες με εκείνες του αρχικού πίνακα. Ας ονομάσουμε τον αντίστροφο του A, $B(\equiv A^{-1})$, του οποίου τα στοιχεία είναι: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Τότε $AB = I$. Δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\begin{pmatrix} 3b_{11} + 2b_{21} & 3b_{12} + 2b_{22} \\ b_{11} + 0b_{21} & b_{12} + 0b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες είναι ίσοι, όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Δηλαδή όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$3b_{11} + 2b_{21} = 1,$$
$$1b_{11} + 0b_{21} = 0,$$
$$3b_{12} + 2b_{22} = 0,$$
$$1b_{12} + 0b_{22} = 1$$

– b_{11} και b_{21} ορίζονται λύνοντας την πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση ως σύστημα.

– b_{12} και b_{22} ορίζονται λύνοντας την τρίτη και την τέταρτη εξίσωση ως σύστημα.

Εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απαλοιφής για τη λύση του πρώτου συστήματος, ας πούμε, τότε πραγματοποιούνται μετασχηματι-

σμοί των γραμμών σε κάθε εξίσωση προκειμένου να καταλήξουμε σε μία λύση για τους συντελεστές, της μορφής:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & b_{21} \end{array}\right)$$

Ομοίως, η λύση για το δεύτερο σύστημα θα είναι:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{22} \end{array}\right)$$

Τώρα, εάν αντί να λύσουμε το κάθε σύστημα ξεχωριστά, λύσουμε και τα δύο συστήματα από κοινού, η λύση θα είναι της μορφής:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right)$$

Λύνοντας και τα δύο συστήματα μαζί, οι ίδιες πράξεις πραγματοποιούνται στις γραμμές του πίνακα μόνο μια φορά – στους (ίδιους) συντελεστές των δύο συστημάτων. Οι πρώτες και οι δεύτερες γραμμές των b's, στη δεξιά πλευρά, περιέχουν τις λύσεις για το πρώτο και το δεύτερο σύστημα, αντίστοιχα. Αυτός ο (2 × 2) πίνακας στη δεξιά πλευρά της κάθετης γραμμής είναι ο πίνακας B, ο οποίος είναι ο αντίστροφος του A.

Έτσι, προκειμένου να αντιστρέψουμε έναν (n × n) πίνακα A, προσαυξάνουμε τον πίνακα με έναν (n x n) μοναδιαίο πίνακα για να δημιουργήσουμε τον ***μερισμένο πίνακα (partitioned matrix)***. Πραγματοποιούμε πράξεις στις γραμμές (πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε κάθε γραμμή και προσθέτουμε ή αφαιρούμε πολλαπλάσια των γραμμών) του πίνακα, προκειμένου να μετατρέψουμε τον A σ' έναν (n x n) μοναδιαίο πίνακα. Ο πίνακας που προκύπτει στο δεξί τμήμα του μερισμένου πίνακα είναι ο αντίστροφος του πίνακα A.

Ας θεωρήσουμε τη λύση του παραπάνω προβλήματος:

• Προσαυξάνουμε τον παραπάνω πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ως εξής:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

• Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με 1/3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

• Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με −1 και την προσθέτουμε στη γραμμή 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

• Προσθέτουμε τη γραμμή 2 στη γραμμή 1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

• Διαιρούμε τη γραμμή 2 με το −2/3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right)$$

• Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$, που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά του προσαυξημένου πίνακα, είναι ο αντίστροφος του A.

Εάν ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος, τότε δεν είναι δυνατό να μετασχηματίσουμε την αριστερή πλευρά του σ' ένα μοναδιαίο πίνακα.

Η παραπάνω μέθοδος, γνωστή ως ***μέθοδος απαλοιφής του Gauss***, μπορεί επίσης να εφαρμόσει σε πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων.

4. Αντιστροφή του (3 x 3) πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, με τη ***μέθοδο των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (cofactor method)***.

Αρχικά, βρίσκουμε την ορίζουσα του A, προκειμένου να αποφασίσουμε κατά πόσον ο A μπορεί να αντιστραφεί.

$$|A| = 6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 0 - 0 + 2 \times (-5) = -10$$

Εφόσον $|A| = -10$, ο πίνακας μπορεί να αντιστραφεί.

Εν συνεχεία, βρίσκουμε τον προσαρτημένο πίνακα του A, A^+. Έτσι, σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων:

$$\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\6 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\6 & 0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 4\\6 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\6 & 0\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ -4 & -22 & 12 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

ο οποίος όταν αναστραφεί δίνει τον ακόλουθο προσαρτημένο πίνακα, A^+

$$A^+ = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^+ = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 & 0 \\ -0,6 & 2,2 & -1 \\ 0,6 & -1,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις:

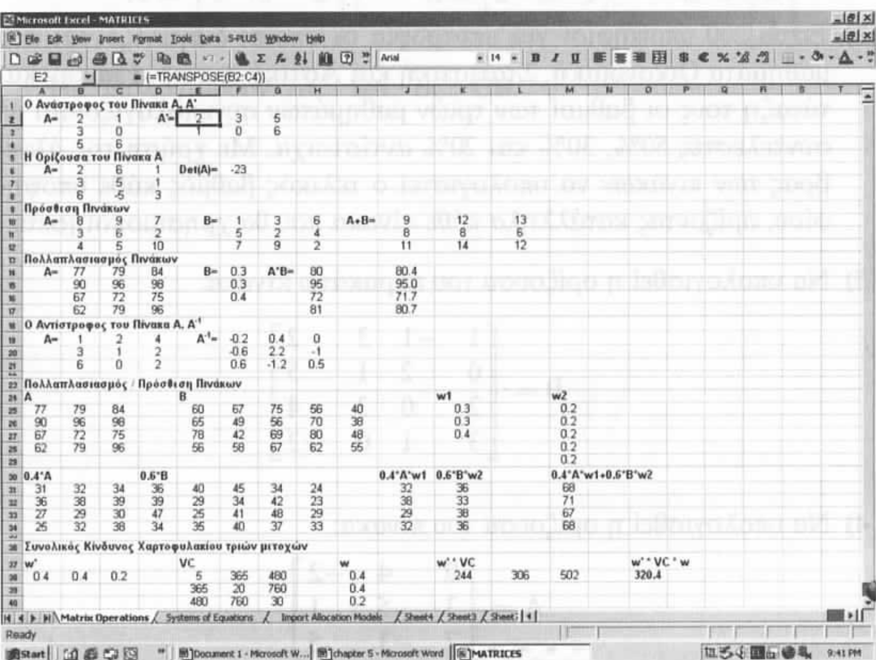
1. Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν είναι τετραγωνικός.

2. Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος (non-singular) εάν όλες οι γραμμές ή οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Δηλαδή, ο πίνακας μπορεί να αντιστραφεί εάν καμία γραμμή (ή στήλη) δεν αποτελεί γραμμικό συνδυασμό –δεν είναι πολλαπλάσιο– των υπόλοιπων γραμμών (στηλών). Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες των οριζουσών, αφού πίνακες με γραμμές ή στήλες οι οποίες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους έχουν ορίζουσα μηδέν.

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αντιστροφή πινάκων, μέσω του τύπου *minverse(array)*. Έτσι, εισάγουμε τον πίνακα A του τελευταίου παραδείγματος στα κελιά b19 με d21 του φύλλου εργασίας, όπως φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Ο αντίστροφος του A είναι, επίσης, ένας (3 × 3) πίνακας. Έτσι, μαυρίζουμε την περιοχή f19 έως h21, τοποθετούμε τον τύπο = *minverse(b19:d21)* στο κελί f19 και πατάμε *Ctrl*, *Shift* και Enter ταυτόχρονα, για να ολοκληρωθεί η πράξη. Όπως βλέπουμε, το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος επιβεβαιώνεται και με τη χρήση του Η/Υ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πράξεις πινάκων με χρήση του φύλλου εργασίας του Excel



Ασκήσεις για λύση

1) Δεδομένων των ακόλουθων πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν:

a) A + B.
b) A – B.
c) Η ορίζουσα του A, |A|.

2) Έστω 200 υποψήφιοι για υποτροφία οι οποίοι διαγωνίζονται στα μαθήματα Οικονομική, Στατιστική και Αστικό Δίκαιο. Για την κατάταξή τους οι βαθμοί των τριών μαθημάτων συνυπολογίζονται με συντελεστές 50%, 30% και 20% αντίστοιχα. Με χρήση της άλγεβρας των πινάκων να υπολογιστεί ο τελικός βαθμός κάθε υποψηφίου, ορίζοντας κατάλληλα κάθε πίνακα που θα χρησιμοποιήσετε.

3) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

5) Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

6) Έστω οι ακόλουθοι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:

a) 3A + 2B – C.
b) AB και BA, είναι AB = BA;
c) BC και CB είναι BC = CB;

7) Δίνονται οι ακόλουθοι πίνακες και διανύσματα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = [2 \;\; 5 \;\; 9], \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν: AC, BA, BC, CB.

6 Συστήματα εξισώσεων σε μορφή πίνακα και εφαρμογές τους

6.1 Συστήματα εξισώσεων σε μορφή πίνακα – Systems of simultaneous equations in matrix form

Πίνακες μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν σε συνοπτική μορφή συστήματα (συναληθευουσών) εξισώσεων, τα οποία, εν συνεχεία, μπορεί να επιλυθούν με τη χρήση πράξεων πινάκων. Το μέρος αυτό του κεφαλαίου εξετάζει τη χρήση πινάκων στην απεικόνιση συστημάτων εξισώσεων.

Παραδείγματα:

1. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους απεικονίζεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ή πιο συνοπτικά ως: $A \quad X = B$

όπου $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

2. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 4X_3 &= 5 \\ 3X_1 + X_2 + 2X_3 &= 10 \\ 6X_1 + \quad 2X_3 &= 15 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους απεικονίζεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ή περισσότερο συνοπτικά ως:

$$A \quad X = B$$

όπου: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

A είναι ο ***πίνακας συντελεστών (coefficient matrix) των αγνώστων***, X είναι το ***διάνυσμα (ή πίνακας) των αγνώστων (solution vector)*** και B είναι το ***διάνυσμα (ή πίνακας) των σταθερών όρων (vector of constant terms)***. Τέτοια συστήματα μπορούν να λυθούν με αντιστροφή πινάκων ή με χρήση του κανόνα του Cramer, όπως θα δούμε στα ακόλουθα τμήματα του κεφαλαίου.

Μία ειδική μορφή ενός συστήματος εξισώσεων λαμβάνει χώρα όταν το διάνυσμα των σταθερών όρων (B) είναι μηδέν. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύστημα ονομάζεται ***ομογενές (homogeneous)*** σύστημα εξισώσεων.[1] Όταν το διάνυσμα B δεν είναι μηδέν το σύστημα ονομάζεται ***μη ομογενές (non-homogeneous)***.

2. Η Εθνική Οικονομία ως Σύστημα Εξισώσεων

Το εθνικό εισόδημα, Y, μιας κλειστής οικονομίας μπορεί να αναλυθεί

[1] Η Ομογένεια αναφέρεται στην ιδιότητα ενός συστήματος που έχει μηδέν για όλους τους σταθερούς όρους του διανύσματος B, σύμφωνα με την οποία, εάν όλες οι μεταβλητές X_i του συστήματος πολλαπλασιαστούν με μία σταθερά το σύστημα παραμένει αναλλοίωτο.

σε 3 μέρη· στην κατανάλωση (consumption) C, στις ιδιωτικές επενδύσεις (private investments) I, και στις κυβερνητικές δαπάνες (government expenditure) G. Έτσι, $Y = C + I + G$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η κατανάλωση στην οικονομία (C) καθορίζεται από το επίπεδο των επιτοκίων (r) και το εθνικό εισόδημα (Y). Μαθηματικά, $C = ar + bY$, όπου a και b αποτελούν σταθερές. Επίσης, οι ιδιωτικές επενδύσεις στην οικονομία (I) εξαρτώνται από τα επιτόκια αγοράς (r), και το εθνικό εισόδημα (Y), και εκφράζονται μέσω της ακόλουθης συνάρτησης $I = c + dr + eY$, όπου c, d και e αποτελούν σταθερές. Είναι ευρέως αποδεκτό ότι επενδύσεις, κατανάλωση και εθνικό εισόδημα ορίζονται ενδογενώς και ταυτόχρονα σε μία οικονομία. Σε αντίθεση, κυβερνητικές δαπάνες και επιτόκια θεωρούνται εξωγενείς παράγοντες στο σύστημα και καθορίζονται από την κυβέρνηση. Πίνακες μπορεί να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να γραφεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με συνοπτικό τρόπο ως εξής:

$$Y = C + I + G$$

$$C = ar + bY$$

$$I = c + dr + eY$$

Αναδιατάσσοντας τις εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξωγενείς μεταβλητές να βρίσκονται στη δεξιά πλευρά του συστήματος και οι ενδογενείς στην αριστερή, προκύπτει:

$$\begin{aligned} Y - C - I &= G \\ -bY + C &= ar \\ -eY + I &= c + dr \end{aligned}$$

Υπό μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -e & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ C \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ ar \\ c + dr \end{pmatrix}$$

Πιο συνοπτικά

$$A \quad X = B$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -e & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} Y \\ C \\ I \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} G \\ ar \\ c + dr \end{pmatrix}$$

Για να εκτιμηθούν τα επίπεδα του εισοδήματος, κατανάλωσης και επενδύσεων στην οικονομία, δεδομένων των επιτοκίων και των κυβερνητικών δαπανών, καθώς και συγκεκριμένων τιμών για τους συντελεστές b και e, θα πρέπει να λυθεί το παραπάνω σύστημα ως προς το διάνυσμα των αγνώστων X.

6.1.1 Λύση συστημάτων εξισώσεων μέσω αντιστροφής πινάκων

Γενικά, εάν: $AX = B$ τότε: $X = A^{-1}B$

Παράδειγμα:

Ας εξετάσουμε το σύστημα εξισώσεων του παραπάνω παραδείγματος. Δηλαδή το

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα A είναι -10, και καθώς αυτή είναι μη μηδενική ο A μπορεί να αντιστραφεί. Ο αντίστροφος του A είναι $-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -5 \end{pmatrix}$.[2] Έτσι, η λύση στο παραπάνω σύστημα προκύπτει ως:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

[2] Βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο για τον υπολογισμό της ορίζουσας και του αντίστροφου του πίνακα A.

$$= -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2(5) + (-4)10 + 0(15) \\ 6(5) + (-22)10 + 10(15) \\ -6(5) + 12(10) + (-5)15 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10-40 \\ 30-220+150 \\ -30+120-75 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Επομένως, $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

Δηλαδή, $X_1 = 3$, $X_2 = 4$, $X_3 = -1{,}5$

Παρατηρήσεις

1. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για να έχει ένα μη ομογενές σύστημα εξισώσεων, $AX = B$, μία μοναδική λύση, πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες σε σχέση με τον πίνακα συντελεστών, A:

α. Πρέπει να υπάρχουν τόσες εξισώσεις όσο και άγνωστοι, καθώς ο πίνακας A πρέπει να είναι τετραγωνικός για να είναι αντιστρέψιμος.

β. Ο πίνακας A πρέπει να είναι αντιστρέψιμος, το οποίο προϋποθέτει ότι η ορίζουσά του είναι μη-μηδενική, το οποίο με τη σειρά του προϋποθέτει ότι οι γραμμές (ή στήλες) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

2. Όταν η ορίζουσα ενός πίνακα A είναι μηδέν, τότε είτε δεν υπάρχει καμία λύση είτε υπάρχουν πολλαπλές λύσεις στο σύστημα. Επιλύνοντας ένα σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντιστροφής πινάκων, δεν μας παρέχει τη δυνατότητα να διαχωρίσουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις. Χρειάζεται να εξετάσουμε τις ***συνθήκες τάξης (rank conditions)***, οι οποίες περιγράφονται αργότερα, προκειμένου να προσδιορίσουμε περαιτέρω το είδος των λύσεων.

6.1.2 Κανόνας του Cramer

Ένας εναλλακτικός, πιθανά απλούστερος, τρόπος επίλυσης συστημάτων εξισώσεων, είναι ο γνωστός κανόνας του Cramer. Σύμφωνα μ' αυτόν, οι λύσεις X προσδιορίζονται ως:

$$X_i = \frac{|\hat{A}_i|}{|A|}$$

Όπου ο $\hat{A}_i$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A, αν αντικατασταθεί η i στήλη στον A με το σταθερό διάνυσμα B της εξίσωσης $AX = B$.

Παραδείγματα:

1. Στο παραπάνω παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

όπου $|A| = -10$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 1 & 2 \\ 15 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}}{-10}$$

$$= \frac{15(4-4) + 0 + 2(5-20)}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ομοίως,

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \end{vmatrix}}{-10} = 4, \quad X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 6 & 0 & 15 \end{vmatrix}}{-10} = -\frac{3}{2}$$

Αυτή η λύση είναι ίδια μ' αυτήν που είδαμε νωρίτερα με τη μέθοδο της αντιστροφής του πίνακα A.

Το πλεονέκτημα χρήσης του κανόνα του Cramer είναι ότι δεν χρειάζεται να υπολογιστεί η λύση ολόκληρου του συστήματος, προκειμένου να βρεθεί η λύση για ένα συγκεκριμένο X_i. Η λύση γι' αυτό το X_i μπορεί να υπολογιστεί ξεχωριστά από τα υπόλοιπα. Αυτή η ιδιότητα αποτελεί και το μειονέκτημα της μεθόδου, καθώς εάν οι δια-

στάσεις του συστήματος είναι μεγάλες, έστω n, απαιτείται ο υπολογισμός n+1 οριζουσών για την εύρεση όλων των X_i.

2. Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα της εθνικής οικονομίας. Έστω ότι χρειάζεται να υπολογίσουμε τη λύση για μία μόνο από τις μεταβλητές, ας πούμε την Y. Τότε, με τη χρήση του κανόνα του Cramer αυτό γίνεται εφικτό χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν οι λύσεις για τις υπόλοιπες δύο μεταβλητές.

Έτσι, η λύση για το Y, για παράδειγμα, στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -e & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ C \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ ar \\ c+dr \end{pmatrix}$$

υπολογίζεται ως:

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} G & -1 & -1 \\ ar & 1 & 0 \\ c+dr & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -e & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Ξεχωριστές λύσεις για άλλες μεταβλητές μπορούν να υπολογιστούν παρόμοια.

6.2 Εφαρμογές

6.2.1 Παράδειγμα παραγωγής ενός ναυπηγείου

Ένα ναυπηγείο παράγει 3 είδη πλοίων, X_1, X_2 και X_3, κάθ' ένα από τα οποία περνάει από τρία στάδια κατασκευής, A, B και C. Ο αριθμός των εργατοημερών που απαιτούνται σε κάθε στάδιο για κάθε τύπο πλοίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1, μαζί με το αντίστοιχο σύνολο των διαθέσιμων εργατοημερών ανά βδομάδα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1: ***Στοιχεία Παραγωγικής Διαδικασίας Ναυπηγείου***

Στάδιο κατασκευής	Τύπος Πλοίου			Διαθέσιμες Εργατοημέρες
	X_1	X_2	X_3	
A	4	10	10	162
B	1	7	12	110
C	4	8	8	140

Τί παραγωγή μονάδων πλοίου θα εξαντλούσε το σύνολο των διαθέσιμων εργατοημερών;

Για την επίλυση του προβλήματος, τα δεδομένα του Πίνακα 6.1 εκφράζονται μέσω του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων:

$$4X_1 + 10X_2 + 10X_3 = 162$$
$$X_1 + 7X_2 + 12X_3 = 110$$
$$4X_1 + 8X_2 + 8X_3 = 140$$

Υπό μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ 1 & 7 & 12 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A\ X = B$$

$|A| = 40$, επομένως υπάρχει μια μοναδική λύση στο σύστημα. Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer αυτή υπολογίζεται ως,

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 162 & 10 & 10 \\ 110 & 7 & 12 \\ 140 & 8 & 8 \end{vmatrix}}{40} = \frac{520}{40} = 13, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 162 & 10 \\ 1 & 110 & 12 \\ 4 & 140 & 8 \end{vmatrix}}{40} = \frac{280}{40} = 7,$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 & 162 \\ 1 & 7 & 110 \\ 4 & 8 & 140 \end{vmatrix}}{40} = \frac{160}{40} = 4$$

Επομένως, 13 πλοία τύπου X_1, 7 πλοία τύπου X_2 και 4 πλοία τύπου X_3 θα εξαντλήσουν όλες τις διαθέσιμες εργατοημέρες στο ναυπηγείο.

Εναλλακτικά, λύση του συστήματος μπορεί να επιτευχθεί ως

$$X = A^{-1}B$$

που προϋποθέτει αντιστροφή του A και πολλαπλασιασμό από αριστερά του πίνακα B με τον αντίστροφο του A. Έτσι, υπολογίζεται ο αντίστροφος του A ως:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1{,}25 \\ 1 & -0{,}2 & -0{,}95 \\ -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

$$\text{και} \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1{,}25 \\ 1 & -0{,}2 & -0{,}95 \\ -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 162 \\ 110 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνολική διαθέσιμη εργασία για το A στάδιο κατασκευής μειώθηκε από 162 σε 158, πιθανόν λόγω ασθένειας. Η διαθέσιμη εργασία για τα στάδια παραγωγής B και C παρέμεινε η ίδια. Ο πίνακας A και ο αντίστροφός του, στο παραπάνω σύστημα δεν αλλάζουν, μόνο ο πίνακας B αλλάζει και η καινούργια λύση μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας 158 στη θέση του 162 στο σύστημα. Δηλαδή:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1{,}25 \\ 1 & -0{,}2 & -0{,}95 \\ -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 158 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Εάν είχε χρησιμοποιηθεί απλή άλγεβρα για την εύρεση της λύσης με τα νέα δεδομένα, το σύστημα εξισώσεων θα έπρεπε να επιλυθεί από την αρχή για την εξεύρεση της λύσης. Όμως, απλή αντικατάσταση του 158 στη θέση του 162 στο διάνυσμα των σταθερών και πολλαπλασιασμός του αντίστροφου του A με τον B, επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα, λιγότερο επίπονα. Περαιτέρω, εάν παράγονταν περισσότερα είδη πλοίων και τα στάδια κατασκευής ήταν περισσότερα, συστήματα μεγαλύτερου βαθμού θα έπρεπε να επιλυθούν, κάνοντας την επίλυση ακόμα δυσκολότερη. Παρόλα αυτά, η χρήση της άλγεβρας των πινάκων δεν προϋποθέτει την αντιστροφή του πίνακα A ξανά. Απαιτεί μόνο τον πολλαπλασιασμό του A^{-1} με το νέο πίνακα B κι αυτό καθιστά τη διαδικασία λιγότερο επίπονη, στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων.

Η χρήση του ***Excel*** επιταχύνει αυτήν τη διαδικασία, όπως φαίνεται στο φύλλο εργασίας που παρουσιάζεται στο παράρτημα του κεφαλαίου. Έστω, για παράδειγμα, ότι οι τιμές του πίνακα A εισάγονται στα κελιά a3 έως c5, ο αντίστροφος του A, A^{-1}, που υπολογίζεται από τη συνάρτηση *minverse( )*, βρίσκεται στα κελιά e3 έως g5 και οι τιμές του πίνακα B βρίσκονται στα κελιά k3 έως k5. Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων, (A^-1)*B, μέσω της συνάρτησης = *mmult(d3:f5,i3:i5)*, δίνει τη λύση στα κελιά k3 έως k5. Τώρα, αν η τιμή του κελιού i3 (στον πίνακα B) αλλάζει από 162 σε 158, το νέο διάνυσμα λύσης υπολογίζεται αυτόματα στα κελιά k3 έως k5 (δεν φαίνεται εδώ). Επομένως, δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε καν την παραπάνω διαδικασία.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα A υποδηλώνουν τις εργατοημέρες που απαιτούνται για κάθε τύπο πλοίου σε κάθε στάδιο κατασκευής. Αυτές οι τιμές εξαρτώνται από οικονομικούς και τεχνικούς παράγοντες οι οποίοι είναι διαθέσιμοι στο ναυπηγείο. Για παράδειγμα, οι ικανότητες των εργατών, η τεχνολογία που χρησιμοποιείται στην παραγωγή, η οργανωτική δομή του ναυπηγείου, η ψυχολογία των εργατών, η σχέση διοίκησης και εργαζομένων, είναι μερικοί μόνο από τους παράγοντες που προσδιορίζουν τις τιμές των στοιχείων του πίνακα A. Μ' αυτήν τη λογική, μπορούν να χαρακτηριστούν ως ***τεχνολογικοί συντελεστές (technological coefficients)***, και ο πίνακας A ως ***πίνακας τεχνολογικών συντελεστών (matrix of technological coefficients)***. Ο πίνακας αυτός μεταβάλλεται διαχρονικά με αργούς ρυθμούς.

6.2.2 Επέκταση του παραδείγματος του ναυπηγείου

Ας εξετάσουμε μια επέκταση του παραπάνω προβλήματος, σύμφωνα με την οποία ο υπεύθυνος του ναυπηγείου γνωρίζει τον αριθμό των εργατοημερών οι οποίες είναι διαθέσιμες για κάθε στάδιο κατασκευής, για τις επόμενες τρεις εβδομάδες του μήνα. Αυτές, μαζί με την πρώτη βδομάδα, παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 6.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2: ***Εργατοημέρες διαθέσιμες στο ναυπηγείο, ανά στάδιο κατασκευής***

Στάδιο Κατασκευής	Εργατοημέρες ανά βδομάδα			
	1	2	3	4
A	162	150	165	160
B	110	107	105	108
C	140	132	146	130

Προκειμένου να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων κάθε τύπου πλοίου που παράγεται ανά βδομάδα, πρέπει να επιλυθούν τέσσερα (3 × 3) συστήματα εξισώσεων, ένα για κάθε βδομάδα. Αν χρησιμοποιούσαμε την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών, θα σπαταλούσαμε πολύ χρόνο για την επίλυση αυτού του συστήματος. Όμως, η γραμμική άλγεβρα μπορεί να μας λύσει το πρόβλημα, πολύ γρήγορα, με τον πολλαπλασιασμό από δεξιά του αντίστροφου του πίνακα A (που θεωρείται ότι παραμένει σταθερός για τις τέσσερις εβδομάδες του μήνα) με τον (3 × 4) πίνακα B, ο οποίος περιέχει τις τιμές της διαθέσιμης εργασίας για τις τέσσερις εβδομάδες. Έτσι,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1{,}25 \\ 1 & -0{,}2 & -0{,}95 \\ -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 162 & 150 & 165 & 160 \\ 110 & 107 & 105 & 108 \\ 140 & 132 & 146 & 130 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 15 & 17{,}5 & 2{,}5 \\ 7 & 3{,}2 & 5{,}3 & 14{,}9 \\ 4 & 5{,}8 & 4{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Κάθε στήλη του τελικού (3 × 4) πίνακα λύσεων δείχνει το επίπεδο παραγωγής, για κάθε τύπο πλοίου, για τις εβδομάδες 1, 2, 3 και 4, αντίστοιχα.

Στο παράρτημα του κεφαλαίου, χρησιμοποιείται το φύλλο εργασίας του *Excel* για την επίλυση του προβλήματος. Ο αντίστροφος του πίνακα A, του προηγούμενου παραδείγματος, βρίσκεται στα κελιά e3 έως g5. Τα στοιχεία του νέου (3 × 4) πίνακα B εισάγονται στα κελιά a8 έως d10. Η λύση, (A^-1)*B, την οποία περιγράφει ο πίνακας (3 × 4), και εισάγεται στα κελιά f8 έως i10, προκύπτει από τη συνάρτηση *=mmult(e3:g5,a8:d10)* του Excel. Έτσι, η χρήση των τύπων συναρτήσεων των πινάκων, οι οποίοι είναι ενσωματωμένοι στο Excel, παράγει πολύ γρήγορα λύσεις σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Επιπλέον, μία σημαντική λειτουργία που προκύπτει από τη χρήση του υπολογιστή, αφορά στη δυνατότητα που παρέχει στη διοίκηση του ναυπηγείου να προσομοιώσει πολύ γρήγορα υποθετικές καταστάσεις που μπορεί να προκύψουν στο ναυπηγείο, σχετικά με μεταβολές στις διαθέσιμες εργατοημέρες και την επίδρασή τους στην τελική παραγωγή του ναυπηγείου. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα, αλλάζοντας τα στοιχεία του πίνακα B και παρατηρώντας πώς μεταβάλλεται το αποτέλεσμα στα κελιά f8 έως i10.

Μεταβολές στην παραγωγικότητα του ναυπηγείου και η επίδρασή τους στην τελική παραγωγή μπορούν επίσης να προσομοιωθούν. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με αλλαγές των τιμών των τεχνολογικών συντελεστών που βρίσκονται στον πίνακα A, στα κελιά a3 έως c5. Μία μεταβολή σε μία ή περισσότερες απ' αυτές τις τιμές θα μεταβάλλει αυτόματα τις τιμές στον αντίστροφο πίνακα, στα κελιά d3 έως f5, που με τη σειρά τους θα αλλάξουν τον πίνακα λύσης, στα κελιά f8 έως i10. Επομένως, η επίδραση που θα έχουν στην παραγωγή αποφάσεις που είναι πιθανό να αλλάξουν αυτούς τους τεχνολογικούς συντελεστές, μπορεί να αξιολογηθεί πολύ γρήγορα με τη χρήση του φύλλου εργασίας του Excel

6.2.3 Ανάλυση εισροών – εκροών (Input – output analysis)

Η ανάλυση εισροών – εκροών ή ανάλυση τύπου Leontief μιας οικονομίας, αναπτύχθηκε από τον Wasilly Leontief κατά τη δεκαετία του 1940.

Αναγνωρίζει το γεγονός ότι οι εκροές ενός κλάδου/τομέα της οικονομίας αποτελούν τις εισροές ενός άλλου κλάδου, ενώ το άθροισμα της παραγωγής όλων των κλάδων απαιτείται να ισούται με το σύνολο της παραγωγής και της κατανάλωσης στην οικονομία. Κάθε κλάδος χρησιμοποιεί μέρος της παραγωγής του για τις ανάγκες του και το υπόλοιπο χρησιμοποιείται από άλλους παραγωγικούς τομείς της οικονομίας, όπως επίσης και από τους καταναλωτές.

Για παράδειγμα, ο κλάδος της αυτοκινητοβιομηχανίας παράγει αυτοκίνητα, τα οποία χρησιμοποιούνται από την ίδια την αυτοκινητοβιομηχανία για τη μεταφορά των υπαλλήλων της, παράγει και πουλάει αυτοκίνητα για άλλους κλάδους παραγωγής, όπως ο κλάδος των μεταφορών, ο τραπεζικός κλάδος και ο τομέας ηλεκτροδότησης. Αυτό είναι γνωστό ως ***ενδιάμεση ζήτηση – intermediate demand***. Επίσης, ο κλάδος της αυτοκινητοβιομηχανίας πουλά αυτοκίνητα σε καταναλωτές για δική τους χρήση, γνωστή ως ***τελική ζήτηση – final demand***. Με τη σειρά του, ο κλάδος της αυτοκινητοβιομηχανίας χρειάζεται να αγοράσει μονάδες προϊόντων, μεταξύ άλλων, από τους τομείς της ηλεκτροδότησης, της μεταλλουργίας, τον τραπεζικό κλάδο, και να παράγει υπεραξία κατά τη διαδικασία της παραγωγής, ώστε να μετατρέψει αυτές τις εισροές σε εκροές – σε αυτοκίνητα.

Για την πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας, οι επιχειρήσεις στην εθνική οικονομία κατηγοριοποιούνται σε κλάδους, ανάλογα με το τελικό προϊόν ή την υπηρεσία που παράγουν. Το σύστημα κατηγοριοποίησης που χρησιμοποιείται διεθνώς είναι γνωστό ως ***Standard Industrial Classification system – SIC***, σε μετάφραση, Τυπικό Κλαδικό Σύστημα Κατηγοριοποίησης. Σε σύγχρονες οικονομίες, πολλές φορές, οι επιχειρήσεις διαφοροποιούν τις δραστηριότητές τους σε περισσότερους από έναν τομείς και κατά συνέπεια κατηγοριοποιούνται σε περισσότερους από έναν κλάδους.

Για να γίνει κατανοητό πώς επιλύονται τέτοιου είδους προβλήματα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μόνο δύο τομείς στην οικονομία, ο ιδιωτικός και ο δημόσιος. Ο Πίνακας 6.3 παρουσιάζει κάποια στοιχεία, τα οποία περιγράφουν την υποθετική αυτή οικονομία. Ξεκινούμε διαβάζοντας τις γραμμές. Η πρώτη γραμμή (με αριθμούς) δεικνύει ότι, από τις 490 μονάδες εκροής του ιδιωτικού τομέα, οι 240 αναλώνονται από τον ίδιο, οι 20 από το δημόσιο τομέα και οι 230 ικανοποιούν τη ζήτηση

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3: ***Πίνακας εισροών-εκροών (Input-Output) στην Οικονομία***

Εκροή Τομέα:	Εισροή Τομέα:		Τελική (Καταναλωτική) Ζήτηση	Σύνολο
	Ιδιωτικός	Δημόσιος		
Ιδιωτικός	240	20	230	**490**
Δημόσιος	120	60	20	**200**
Υπεραξία	130	120		
Σύνολο	**490**	**200**		**690**

των καταναλωτών. Όμοια, η δεύτερη γραμμή δείχνει ότι από τις 200 μονάδες συνολικής εκροής του δημόσιου τομέα, οι 120, οι 60 και οι 20 πηγαίνουν στον ιδιωτικό τομέα, στον δημόσιο τομέα και στην τελική ζήτηση, αντίστοιχα. Οι 690 μονάδες συνολικής εκροής στην οικονομία, είναι το άθροισμα των 490 μονάδων του ιδιωτικού και των 200 μονάδων εκροής του δημόσιου τομέα.

Συνεχίζουμε διαβάζοντας τις στήλες του πίνακα. Η πρώτη στήλη (με αριθμούς) δεικνύει ότι ο ιδιωτικός τομέας χρησιμοποιεί 240 μονάδες από τη δική του εκροή (παραγωγή), 120 από την εκροή του δημόσιου τομέα και μέσω της διαδικασίας παραγωγής προσθέτει υπεραξία ίση με 130 μονάδες και παράγει σύνολο 490 μονάδων. Όμοια, ο δημόσιος τομέας χρησιμοποιεί ως εισροή 20 και 60 μονάδες από τον ιδιωτικό και δημόσιο τομέα, αντίστοιχα, και τις μετατρέπει σε μία συνολική εκροή 200 μονάδων.

Τα δεδομένα των κελιών του πίνακα εξαρτώνται από τις οικονομικές συνθήκες που επικρατούν στη χώρα, καθώς περιγράφουν πώς οι εισροές μετατρέπονται σε εκροές από τον κάθε τομέα της οικονομίας. Επιπλέον, περιγράφουν πόσες απ' αυτές τις εκροές χρησιμοποιούνται στη διαδικασία παραγωγής και πόσες μένουν για κατανάλωση στην οικονομία.

Τα δεδομένα μπορούν να μετατραπούν σε αναλογίες - ποσοστά - εάν κάθε κελί του Πίνακα 6.3 διαιρεθεί με το σύνολο της στήλης στην οποία βρίσκεται. Π.χ. το 240 διαιρούμενο με το 490 δίνει 0,49, κλπ. Αυτή η διαδικασία δημιουργεί τον ακόλουθο ***πίνακα εισροών-εκροών των τεχνολογικών συντελεστών της οικονομίας (input-output matrix of technological coefficients)***.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}10 \\ 0{,}24 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

Εάν ο πίνακας των τεχνολογικών συντελεστών, A, και το συνολικό αποτέλεσμα κάθε τομέα είναι γνωστό, τότε η κατανομή των εκροών κάθε τομέα μεταξύ των κλάδων μπορεί να υπολογιστεί ως

$$AX = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}10 \\ 0{,}24 & 0{,}30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 490 \\ 200 \end{pmatrix}$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Εάν συμβολίσουμε με $D = \begin{pmatrix} 230 \\ 20 \end{pmatrix}$ το διάνυσμα της ζήτησης των καταναλωτών στην οικονομία, τότε το ***σύστημα εισροών-εκροών (input-output system)*** μπορεί να γραφεί ως:

$$AX + D = X$$

Δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}10 \\ 0{,}24 & 0{,}30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 490 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 230 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Το πρόβλημα που τέθηκε αρχικά από τον Leontief, και στη συνέχεια από τις κυβερνήσεις της μεταπολεμικής περιόδου, ήταν: Δεδομένου του πίνακα των τεχνολογικών συντελεστών και συγκεκριμένων επιπέδων καταναλωτικής ζήτησης από κάθε τομέα (η οποία θεωρείται αναγκαία για την εξασφάλιση ενός ελάχιστου επιπέδου διαβίωσης), τι εκροή (προϊόντα) πρέπει να παραχθεί ώστε να ικανοποιήσει την παραπάνω ζήτηση; Σε όρους του συστήματος εισροών-εκροών, ποιά είναι η λύση για το X, δεδομένων των A και D;

Εφόσον:

$$AX + D = X \Leftrightarrow D = (I - A)X \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1}D$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των πινάκων A και D στην τελευταία εξίσωση, βλέπουμε ότι η συνθήκη ικανοποιείται. Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}74 & 1{,}53 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 230 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο της ζήτησης για αγαθά του δημόσιου τομέα αυξάνεται από 20 σε 40. Τα νέα επίπεδα εκροών είναι τώρα:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}74 & 1{,}53 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 230 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 496 \\ 231 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι η εκροή (παραγωγή) και των δύο τομέων στην οικονομία αυξάνεται προκειμένου να ικανοποιήσει την αυξημένη ζήτηση, για τα αγαθά του δημόσιου τομέα. Αυτό συμβαίνει επειδή, οι τομείς στην οικονομία αλληλοσχετίζονται και οι παράγοντες που επηρεάζουν τον ένα τομέα διαχέονται και σ' άλλους τομείς, δημιουργώντας ένα φαύλο ή έναν ωφέλιμο κύκλο, ανάλογα με την κατεύθυνση της αρχικής μεταβολής.

Για άλλη μια φορά, το ***Excel*** αποδεικνύεται σε πολύ εύχρηστο εργαλείο για την προσομοίωση τέτοιων μεταβολών, ειδικά όταν διαχωρίζεται η οικονομία σε πολλούς τομείς. Αποτελεί απλή διαδικασία η εισαγωγή των δεδομένων των πινάκων εισροών-εκροών και ο υπολογισμός του πίνακα τεχνολογικών συντελεστών, A, όπως περιγράφτηκε παραπάνω. Μόλις επιλυθεί το σύστημα, μέσω της αντιστροφής του πίνακα (I – A) και τον πολλαπλασιασμό του τελευταίου με τον D, είναι απλή η προσομοίωση του πώς, μεταβολές στο επίπεδο της ζήτησης κάθε ξεχωριστού τομέα στην οικονομία επηρεάζουν τους άλλους τομείς. Το παράρτημα του κεφαλαίου δείχνει πώς μπορεί να κατασκευαστεί η λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Ο αρχικός πίνακας των οικονομικών στοιχείων, ανά κλάδο, είναι στα κελιά a15 έως b16. Ο (2 × 2) πίνακας των τεχνολογικών συντελεστών προκύπτει στα f15:g16 με τη διαίρεση κάθε κελιού της περιοχής a15 έως b16 με το αντίστοιχο σύνολο της στήλης που βρίσκεται. Ο (2 × 2) μοναδιαίος (unit) πίνακας, I_2, τοποθετείται στα κελιά i15:j16. Ο πίνακας (I – A) δημιουργείται στα κελιά a21:b22 και ο $(I - A)^{-1}$ στα κελιά d21:e22 με χρήση της συνάρτησης = *minverse( )*. Τα δεδομένα για την τελική ζήτηση (D) εμφα-

νίζονται, με τη μορφή του (2×1) διανύσματος, στα κελιά g21:g22. Τέλος, το διάνυσμα λύσης βρίσκεται στα κελιά i21:i22. Αυτό υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση = *mmult(d21:e22,g21:g22)*. Μεταβολές σε κάθε στοιχείο του πίνακα A ή του D υπολογίζονται αυτόματα από το Excel στα κελιά i21 έως i22

Κριτικές της ανάλυσης του Leontief περιλαμβάνουν, ότι η ανάλυση είναι στατική, με την έννοια ότι ο πίνακας των τεχνολογικών συντελεστών θεωρείται σταθερός και δε λαμβάνει υπόψιν του: 1) τις δυνατότητες αντικατάστασης, που συνήθως λαμβάνουν χώρα στην οικονομία, καθώς οι συγκριτικές τιμές μεταβάλλονται, 2) τις τεχνολογικές καινοτομίες, 3) τις μεταβολές στην παραγωγή, και άλλους παράγοντες. Ένας νέος τεχνολογικός πίνακας υπολογίζεται συνήθως κάθε λίγα χρόνια για να αντισταθμίσει την παραπάνω κριτική. Παρόλα αυτά, η απλότητα της ανάλυσης του Leontief αποτελεί το βασικό λόγο της δημοτικότητάς της, καθώς οι πίνακες εισροών-εκροών μπορούν να υπολογιστούν γρήγορα και να δώσουν μία ένδειξη της διαχρονικής εξέλιξης της οικονομίας.

6.2.4 Υποδείγματα κατανομής εισαγωγών (Import allocation models)

Τα υποδείγματα κατανομής εισαγωγών ασχολούνται με την κατανομή του συνολικού εμπορίου σ' ένα σύνολο από εμπορικές περιοχές, ας πούμε, στη διεθνή οικονομία. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n χώρες στον κόσμο που συμμετέχουν σε εμπόριο, τόσο μεταξύ τους (inter-trade) όσο και μέσα σε κάθε χώρα (intra-trade). Συνήθως η διακίνηση εμπορίου για ένα συγκεκριμένο έτος παρουσιάζεται σε πίνακες, γνωστούς ως πίνακες εισαγωγών-εξαγωγών (import-export matrices). Οργανισμοί όπως ο ΟΗΕ και ο ΟΟΣΑ δημοσιεύουν τέτοιους πίνακες. Αυτοί έχουν τη δομή του Πίνακα 6.4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.4: ***Πίνακας εισαγωγών – εξαγωγών***

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας				Σύνολο Εξαγωγών
	1	2	…	n	
1	m_{11}	m_{12}		m_{1n}	$X_1 = \sum_{j=1}^{n} m_{1j}$
2	m_{21}	m_{22}		m_{2n}	$X_2 = \sum_{j=1}^{n} m_{2j}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	m_{n1}	m_{n2}		m_{nn}	$X_n = \sum_{j=1}^{n} m_{nj}$
Σύνολο Εισαγωγών	$M_1 = \sum_{i=1}^{n} m_{i1}$	$M_2 = \sum_{i=1}^{n} m_{i2}$		$M_n = \sum_{i=1}^{n} m_{in}$	$\sum_{j=1}^{n} M_j = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Έτσι, οι είσοδοι (τα δεδομένα), m_{ij}, στο εσωτερικό του πίνακα παρουσιάζουν το διμερή όγκο ή αξία των εισαγωγών της χώρας εισαγωγέα, j, από την χώρα εξαγωγέα, i, όπου $i, j = 1, \ldots, n$. Τα δεδομένα των κελιών εκτός της κύριας διαγωνίου, δηλαδή όταν $i \neq j$, παρουσιάζουν το εμπόριο μεταξύ των χωρών (inter-trade). Τα δεδομένα στην κύρια διαγώνιο του πίνακα, δηλαδή όταν $i = j$, παρουσιάζουν το εμπόριο στο εσωτερικό κάθε χώρας (intra-trade). Αθροίζοντας τα m_{ij} κάθε στήλης, $M_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$, δηλαδή αθροίζοντας το εμπόριο ως προς τους εξαγωγείς i, παράγεται το σύνολο των εισαγωγών για κάθε χώρα εισαγωγέα j, $j = 1, \ldots, n$. Τα αθροίσματα αυτά των στηλών παρουσιάζονται στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Αθροίζοντας τα m_{ij} για κάθε γραμμή, $X_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$, δηλαδή ως προς τα j, παράγεται το σύνολο των εξαγωγών για κάθε χώρα εξαγωγέα i, $i = 1, \ldots, n$. Αυτά παριστάνονται από τα αθροίσματα των γραμμών, τα οποία παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη του πίνακα. Το σύνολο των εισαγωγών στην παγκόσμια

οικονομία πρέπει να ισούται με το σύνολο των εξαγωγών.[3] Δηλαδή, $M \equiv \sum_{j=1}^{n} M_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv X$. Έτσι, το συνολικό εμπόριο $T \equiv M \equiv X$, στην παγκόσμια οικονομία παρουσιάζεται στο κελί $(n+1), (n+1)$ του Πίνακα 6.4, δηλαδή στην κάτω δεξιά γωνία του πίνακα.

Με δεδομένο τον Πίνακα 6.4 εισαγωγών-εξαγωγών, μπορεί να δημιουργηθεί ο ***Πίνακας εμπορικών αναλογιών 6.5 (trade share matrix)***, διαιρώντας κάθε κελί του Πίνακα 6.4 με το συνολικό παγκόσμιο εμπόριο, $M \equiv X$. Δηλαδή, διαιρώντας κάθε κελί είτε με το σύνολο των εξαγωγών (X), είτε με το σύνολο των εισαγωγών (M).[4]

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.5: ***Πίνακας δεδομένων εμπορικών αναλογιών***

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας				Σύνολο Μεριδίων Εξαγωγών
	1	2	…	n	
1	W_{11}	w_{12}		w_{1n}	$WX_1 = \sum_{j=1}^{n} w_{1j}$
2	W_{21}	w_{22}		w_{2n}	$WX_2 = \sum_{j=1}^{n} w_{2j}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	w_{n1}	w_{n2}		w_{nn}	$WX_n = \sum_{j=1}^{n} w_{nj}$
Σύνολο Μεριδίων Εισαγωγών	$WM_1 = \sum_{i=1}^{n} w_{i1}$	$WM_2 = \sum_{i=1}^{n} w_{i2}$		$WM_n = \sum_{i=1}^{n} w_{in}$	$\sum_{j=1}^{n} WM_j = \sum_{i=1}^{n} WX_i = 1$

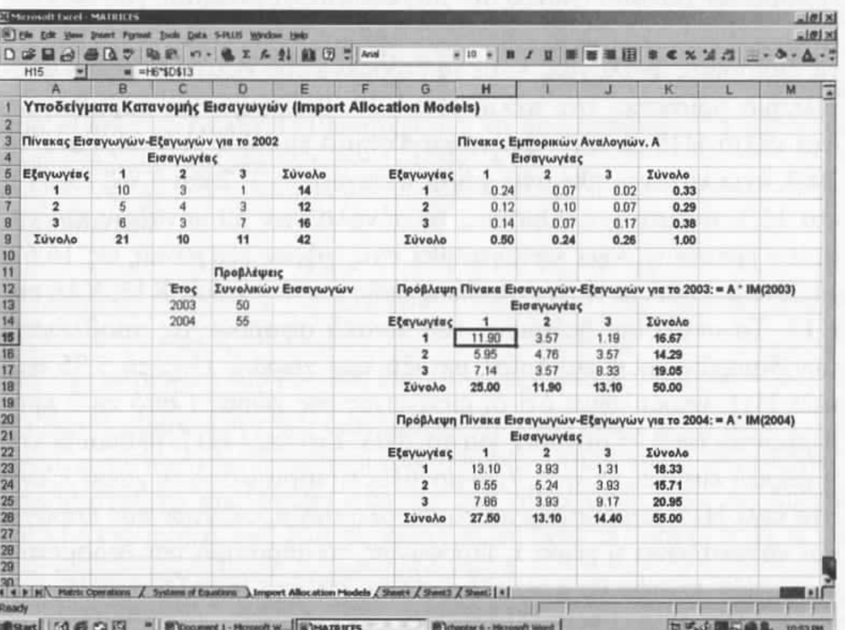
[3] Στην πράξη, μπορεί να υπάρχουν μικρές διαφορές που οφείλονται σε λογιστικά λάθη, σε διαφορετικές μεθόδους καταγραφής του εμπορίου και σε χρονικές διαφορές σε αυτές τις καταγραφές μεταξύ των χωρών που εισάγουν και εξάγουν.

[4] Ο πίνακας αυτός μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχος του πίνακα τεχνολογικών συντελεστών στο παράδειγμα εισροών-εκροών.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμπορικών αναλογιών, που φαίνεται στην κάτω δεξιά γωνία του Πίνακα 6.5, είναι 1.

Σε γενικές γραμμές, είναι πολύ πιο δύσκολο να προβλεφθούν οι διμερείς εμπορικές ροές μεταξύ των χωρών, σε σύγκριση με προβλέψεις του συνολικού παγκόσμιου εμπορίου. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας εμπορικών αναλογιών, ο οποίος δημιουργήθηκε για ένα «έτος βάσης», δεν μεταβάλλεται από έτος σε έτος. Τότε, προβλέψεις των διμερών εμπορικών ροών μπορούν να πραγματοποιηθούν, πολλαπλασιάζοντας την πρόβλεψη για το σύνολο του εμπορίου με τον πίνακα εμπορικών αναλογιών του «έτους βάσης».

ΓΡΑΦΗΜΑ 6.1: ***Προβλέψεις εισαγωγών-εξαγωγών με χρήση πινάκων***



Πίνακας Εισαγωγών-Εξαγωγών για το 2002

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας 1	2	3	Σύνολο
1	10	3	1	14
2	5	4	3	12
3	6	3	7	16
Σύνολο	21	10	11	42

Πίνακας Εμπορικών Αναλογιών, A

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας 1	2	3	Σύνολο
1	0.24	0.07	0.02	0.33
2	0.12	0.10	0.07	0.29
3	0.14	0.07	0.17	0.38
Σύνολο	0.50	0.24	0.26	1.00

Έτος	Προβλέψεις Συνολικών Εισαγωγών
2003	50
2004	55

Πρόβλεψη Πίνακα Εισαγωγών-Εξαγωγών για το 2003: = A * IM(2003)

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας 1	2	3	Σύνολο
1	11.90	3.57	1.19	16.67
2	5.95	4.76	3.57	14.29
3	7.14	3.57	8.33	19.05
Σύνολο	25.00	11.90	13.10	50.00

Πρόβλεψη Πίνακα Εισαγωγών-Εξαγωγών για το 2004: = A * IM(2004)

Εξαγωγέας	Εισαγωγέας 1	2	3	Σύνολο
1	13.10	3.93	1.31	18.33
2	6.55	5.24	3.93	15.71
3	7.86	3.93	9.17	20.95
Σύνολο	27.50	13.10	14.40	55.00

Για την καλύτερη κατανόηση της πρακτικής εφαρμογής των εννοιών αυτών, παρουσιάζεται το ακόλουθο υποθετικό παράδειγμα στο ***Excel***. Το Γράφημα 6.1 παρουσιάζει μια διεθνή οικονομία, η οποία αποτελείται από τρεις χώρες. Ο σχετικός πίνακας εισαγωγών-

εξαγωγών (ο αντίστοιχος του Πίνακα 6.4) για το έτος 2002 παρουσιάζεται στα κελιά A5 έως E9. Έτσι, οι εισαγωγές που πραγματοποιεί η χώρα 1 από τους εμπορικούς της εταίρους φαίνονται στη στήλη B του Excel. Οι εξαγωγές που πραγματοποιεί η χώρα 1 προς τους εμπορικούς της εταίρους παρουσιάζονται στη γραμμή 6 του Excel, και ούτω καθεξής. Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα εισαγωγών-εξαγωγών με τον αριθμό (1/42), το αντίστροφο του συνολικού παγκόσμιου εμπορίου, το οποίο βρίσκεται στο κελί E9, παράγεται ο πίνακας εμπορικών αναλογιών στα κελιά H6 έως K9.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το παγκόσμιο εμπόριο για τα έτη 2003 και 2004 προβλέπεται να είναι 50 και 55, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στα κελιά D13 και D14 του φύλλου εργασίας. Οι διμερείς ροές εμπορικών συναλλαγών στην παγκόσμια οικονομία, για το έτος 2003, μπορούν να προβλεφθούν, πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα με τις εμπορικές αναλογίες A, με τα δεδομένα του κελιού D13. Το αποτέλεσμα βρίσκεται στα κελιά H15:K18. Βλέπουμε για παράδειγμα, στα κελιά H18 με K18, ότι το παγκόσμιο εμπόριο των 50, κατά το 2003, έχει κατανεμηθεί στις χώρες εισαγωγείς, 1, 2 και 3, ως 25, 11,9 και 13,1, αντίστοιχα. Ομοίως, το σύνολο των 50 μονάδων παγκοσμίου εμπορίου, έχει κατανεμηθεί στις χώρες εξαγωγείς ως 16,67, 14,29 και 19,05, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στα κελιά K15, K16 και K17. Τα υπόλοιπα δεδομένα του πίνακα αφορούν τις προβλέψεις των διμερών ροών εμπορίου μεταξύ των χωρών. Π.χ. το 5,95 στο κελί H16, υποδηλώνει ότι οι εισαγωγές της χώρας 1 από τη 2 προβλέπονται σε 5,95 μονάδες για το 2003. Στο κελί H17, βλέπουμε ότι η χώρα 1 εισάγει, επίσης, 7,14 μονάδες εμπορίου από τη χώρα 3, ενώ στο κελί H15, παρουσιάζεται το σύνολο των προϊόντων που παράγει και καταναλώνει η χώρα 1. Προφανώς, το άθροισμα των δεδομένων των τριών κελιών θα πρέπει να ανέρχεται στο σύνολο των 25, που βλέπουμε στο κελί H18.

Ομοίως, οι προβλέψεις των εισαγωγών-εξαγωγών για το 2004 υπολογίζονται, πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα A με τα δεδομένα του κελιού D14. Το αποτέλεσμα φαίνεται στα κελιά G20 έως K26

Εδώ ισχύουν οι κριτικές που αναφέραμε προηγουμένως, σχετικά με τη στασιμότητα του πίνακα εμπορικών αναλογιών, όπως είδαμε και

στην περίπτωση του σταθερού πίνακα τεχνολογικών συντελεστών στα μοντέλα εισροών-εκροών.

6.3 Προσδιορισμός του είδους λύσης σε συστήματα εξισώσεων της μορφής AX = B, πριν από την επίλυσή τους

6.3.1 Εισαγωγή

Ένας εναλλακτικός τρόπος καθορισμού, του εάν ένα σύστημα εξισώσεων έχει λύση, είναι να εξετάσουμε την ***τάξη (rank)*** του πίνακα A. Η ***τάξη των γραμμών (row rank)*** ενός πίνακα A ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα. Η ***τάξη των στηλών (column rank)*** του A ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A. Εφόσον η τάξη των γραμμών ενός πίνακα είναι αντίστοιχη με την τάξη των στηλών του, τότε αναφορά, απλά, στην τάξη του πίνακα A ***(rank(A))*** επαρκεί για να χαρακτηριστεί η τάξη τόσο των γραμμών όσο και των στηλών του A.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Εφόσον $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, οι γραμμές και οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες. Οπότε, $\text{rank}(A) = 3$.

Εάν ο πίνακας A είναι διαστάσεων $(n \times m)$ και $n \neq m$, τότε ο A δεν είναι τετραγωνικός. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη του A δεν μπορεί να υπερβαίνει τη μικρότερη από τις δύο διαστάσεις του A. Δηλαδή, $\text{rank}(A) \leq \min(n, m)$. Για παράδειγμα, σ' έναν πίνακα (3×5), η τάξη του πίνακα δεν μπορεί να υπερβαίνει το 3.

Όταν $\text{rank}(A) = \min(n, m)$, τότε ο πίνακας A είναι ***πλήρους τάξης (full rank)***.

Παράδειγμα:

Εάν σ' έναν (4×7) πίνακα $\text{rank}(A) = 4$, ο πίνακας είναι πλήρους τάξης.

Για να βρούμε την τάξη ενός $(n \times m)$ πίνακα, όπου για παράδειγμα $n < m$, ελέγχουμε τις ορίζουσες όλων των πιθανών $(n \times n)$ υποπινάκων.

Εάν όλες οι ορίζουσες είναι 0 τότε ελέγχουμε για μη-αντιστρεψιμότητα (singularity) τους $(n-1 \times n-1)$ τετραγωνικούς υποπίνακες (submatrices), ώστου να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος υποπίνακας (ένας πίνακας με μη μηδενική ορίζουσα), με διαστάσεις για παράδειγμα $(k \times k)$. Τότε, $\text{rank}(A) = k$.

6.3.2 Τετραγωνικός πίνακας, A

Το σύστημα των $(n \times n)$ μη-ομογενών εξισώσεων της μορφής $AX = B$ έχει:

- Μία μοναδική ***μη-τετριμμένη (non-trivial) λύση*** (δεν είναι όλα τα X_i 0), εάν ο $(n \times n)$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, κάτι που απαιτεί οι γραμμές και οι στήλες του A να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό ισχύει όταν η ορίζουσα του A είναι μη-μηδενική, ή ισοδύναμα, όταν η τάξη του πίνακα A είναι n, $\boldsymbol{rank(A) = n}$ (δηλαδή, όταν ο A είναι πλήρους τάξης - full rank). Η λύση τότε είναι $X = A^{-1}B$.
- Εάν $\boldsymbol{rank(A) < n}$, δηλαδή ο A είναι μη αντιστρέψιμος, επειδή μερικές γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε είναι πιθανόν το σύστημα των εξισώσεων να είναι ασυμβίβαστο (inconsistent). Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση, ή οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες, οπότε υπάρχουν πολλαπλές λύσεις. Αυτό μπορεί να καθορισθεί με το σχηματισμό του ***επαυξημένου (augmented)*** πίνακα [A, B]. Αυτός είναι ο πίνακας A, ο οποίος συμπεριλαμβάνει τη στήλη του διανύσματος των σταθερών όρων της εξίσωσης, B, στα δεξιά του A. Ας υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{rank(A) = k}$.

– Εάν $\boldsymbol{rank([A, B]) > k}$, τότε η προσθήκη του B δημιουργεί μία επιπλέον ανεξάρτητη στήλη στον πίνακα A. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύστημα είναι ***ασυμβίβαστο (incosistent)*** – δεν υπάρχει λύση στο σύστημα.

– Εάν $\boldsymbol{rank([A, B]) = rank(A)}$, τότε οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες και κατά συνέπεια, υπάρχει ένας ***άπειρος αριθμός λύσεων (infinite number of solutions)*** στο σύστημα.

Παραδείγματα:

1. Να διερευνηθεί το ακόλουθο (2×2) σύστημα μη ομογενών εξισώσεων

$$2X_1 + 2X_2 = 3$$
$$4X_1 + 4X_2 = 5$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Rank}(A) = 1$, καθώς $|A| = 0$, όμως υπάρχουν μη μηδενικοί υποπίνακες διαστάσεων (1×1).

Για την περαιτέρω διερεύνηση του συστήματος, σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. $\text{Rank}([A, B]) \leq 2$. Η ορίζουσα του (2×2) υποπίνακα που αποτελείται, ας πούμε, από την πρώτη και την τρίτη στήλη του [A, B] είναι μη μηδενική. Έτσι, $\text{rank}([A, B]) = 2$.

Επομένως, εφόσον $\text{rank}([A, B]) > \text{rank}(A)$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο – δηλαδή δεν έχει λύση.

2. Να διερευνηθεί και να λυθεί το ακόλουθο (3 x 3) σύστημα μη ομογενών εξισώσεων

$$2X_1 + 4X_2 + 14X_3 = 8$$
$$6X_1 + 6X_2 + 12X_3 = 6$$
$$4X_1 + 4X_2 + 8X_3 = 4$$

Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 6 & 6 & 12 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$, οπότε $\text{rank}(A) < 3$. Εφόσον, ας πούμε, για τον (2×2) υποπίνακα του A, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{rank}(A) = 2$. Επιπλέον, $\text{rank}([A, B]) = 2$.

Επομένως, οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες και υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων. Η γραμμική εξάρτηση των εξισώσεων σημαίνει ότι μία γραμμή στον πίνακα [A, B] είναι περιττή, και δεν προσφέρει κάποια επιπλέον πληροφορία που να μην υπάρχει ήδη στο σύστημα. Απαλείφοντας την τρίτη γραμμή, το σύστημα μειώνεται σε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ο νέος πίνακας A, μπορεί να μετατραπεί σε αντιστρέψιμο (2×2) πίνακα, μετακινώντας μερικά από τα στοιχεία του στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης. Έτσι,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 14X_3 \\ 6 - 12X_3 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση έχουμε τις παρακάτω λύσεις για τους X_1 και X_2, σε όρους του X_3.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 - 14X_3 \\ 6 - 12X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3X_3 \\ 3 - 5X_3 \end{pmatrix}$$

Οι παραπάνω τιμές των X_1 και X_2 αποτελούν τη λύση του συστήματος για κάθε τιμή του X_3, δίνοντας έτσι έναν άπειρο αριθμό λύσεων. Για παράδειγμα, έστω $X_3 = 1$, τότε $X_1 = 1$, $X_2 = -2$ αποτελεί μία λύση για το σύστημα των τριών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να επαληθευθεί με αντικατάσταση:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 6 & 6 & 12 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Όταν $X_3 = 2$, τότε $X_1 = 4$, $X_2 = -7$ αποτελεί ακόμα μία λύση, και συνεχίζεται επ' άπειρον.

Μία εναλλακτική λύση του συστήματος εξισώσεων, θα μπορούσε να βρεθεί σε όρους του X_1 ή X_2 αντί για X_3. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, απαλείφοντας την εξίσωση 1 ή τη 2, αντίστοιχα, από το σύστημα εξισώσεων.

6.3.3 Μη τετραγωνικός πίνακας A

Για παράδειγμα, στο σύστημα $A X = B$, ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων, $n > m$. Τότε ο πίνακας A δεν είναι τετραγωνικός. Σ' αυτήν την περίπτωση, $\boldsymbol{rank}([A, B]) \geq \boldsymbol{rank}(A)$. Δύο περιπτώσεις μπορούν να διακριθούν:

1. $\boldsymbol{rank}([A, B]) > \boldsymbol{rank}(A)$, όπου στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι ***ασυμβίβαστο (inconsistent)*** – δεν υπάρχει λύση.

2. $\boldsymbol{rank}([A, B]) = \boldsymbol{rank}(A)$, όπου στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι ***συμβιβαστό και έχει πολλαπλές λύσεις.*** Το σύστημα μπορεί να επιλυθεί με παρόμοιο τρόπο, όπως στην περίπτωση του τετραγωνικού πίνακα που εξετάστηκε νωρίτερα. Δηλαδή, βρίσκουμε το μεγαλύτερο αντιστρέψιμο υποπίνακα του [A, B], αγνοούμε τις υπόλοιπες εξισώσεις και μεταφέρουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές στη δεξιά πλευρά του συστήματος. *Αν $Rank([A,B]) = Rank([A]) = m$ (όπου m το πλήθος των αγνώστων, τότε το σύστημα έχει 1 λύση).*

6.3.4 Λύσεις σε ομογενή συστήματα εξισώσεων

Όταν $B = 0$, στο σύστημα εξισώσεων $AX = B$, το σύστημα $AX = 0$ ονομάζεται ***ομογενές (homogeneous)***.

Παραδείγματα:

1. Παράδειγμα τέτοιου συστήματος αποτελεί το υπόδειγμα εισροών-εκροών $AX + D = X$, που παρουσιάστηκε παραπάνω, όπου η τελική ζήτηση είναι μηδέν, $D = 0$. Δηλαδή:

$$AX = X \quad ή \quad (I - A)X = 0$$

2. Ένα άλλο παράδειγμα, είναι το ακόλουθο (2 x 2) σύστημα εξισώσεων:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = 0$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0$$

• Μία λύση στο ομογενές σύστημα $AX = 0$, αποτελεί η ***τετριμμένη λύση (trivial solution)***, $X = 0$: Έτσι, Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος η λύση στο $AX = 0$, $X = A^{-1}0$, είναι η τετριμμένη λύση, $X = 0$.

Αυτό μπορεί να φανεί εύκολα από το παραπάνω (2×2) σύστημα. Εάν τα X_{11} και X_{22} είναι και τα δύο μηδέν, αυτό αποτελεί την τετριμμένη λύση.

Γενικά, για ένα $(n \times n)$ σύστημα εξισώσεων, τα παραπάνω μπορούν να επαληθευθούν εξετάζοντας τη λύση που προκύπτει, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer. Δηλαδή την, $X_i = \frac{|\hat{A}_i|}{|A|}$. Εφόσον ο **B** είναι ένας μηδενικός πίνακας A_i, για κάθε i, ο πίνακας περιέχει μία στήλη από

μηδενικά. Έτσι, η ορίζουσά του είναι μηδενική και η λύση, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, γίνεται $X_i = \frac{0}{|A|} = 0$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

• Μία ***μη-τετριμμένη λύση (non-trivial)*** στο ομογενές σύστημα βρίσκεται, όταν ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος. Σ' αυτήν την περίπτωση $|A| = 0$, και η λύση γίνεται $X_i = \frac{0}{0}$, το οποίο δεν ορίζεται. Επομένως, ο κανόνας του Cramer δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την περίπτωση. Σημειώνεται ότι ο κανόνας του Cramer μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν υπάρχει μοναδική λύση. Εάν υπάρχουν πολλαπλές λύσεις τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες μέθοδοι για τον υπολογισμό τους.

Ας εξετάσουμε ξανά το (2×2) σύστημα που είδαμε πιο πάνω. Εάν ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος, οι δύο εξισώσεις δεν είναι ανεξάρτητες και $|A| = 0$. Η μία εξίσωση είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Δηλαδή, η πρώτη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της δεύτερης. Συνεπώς, η μία εξίσωση είναι περιττή και μπορεί να απαλειφτεί από το σύστημα. Ας πούμε ότι απαλείφεται η πρώτη εξίσωση. Η δεύτερη εξίσωση, $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0$, μπορεί να επιλυθεί γράφοντας, ας πούμε, το X_1 σε όρους του X_2 ως $X_1 = (-a_{22}/a_{21})X_2$. Όταν $a_{21} \neq 0$ η λύση είναι καλά ορισμένη. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός λύσεων και μπορεί να βρεθούν βάζοντας στην εξίσωση διαφορετικές τιμές για το X_2 και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές του X_1. Μία από τις λύσεις αποτελεί η τετριμμένη λύση $X_1 = X_2 = 0$.

Το αποτέλεσμα γενικεύεται σε $(n \times n)$ ομογενή συστήματα. Μη τετριμμένες (άπειρες) λύσεις μπορεί να βρεθούν όταν ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος. Αυτό μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά μέσω των συνθηκών τάξης. Έτσι, για έναν $(n \times n)$ τετραγωνικό πίνακα A, με $\boldsymbol{rank(A) < n}$, υπάρχουν ***άπειρες λύσεις***. Αυτές οι λύσεις μπορεί να υπολογιστούν, με τον ίδιο τρόπο που παρουσιάστηκε νωρίτερα για το μη-ομογενές σύστημα. Δηλαδή, απαλείφοντας τις εξαρτημένες εξισώσεις και εκφράζοντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σε όρους των μεταβλητών που έχουν απαλειφτεί.

Δεν υπάρχει θέμα ασυμβίβαστου σ' αυτά τα συστήματα, καθώς το 0 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά εξαρτημένων στηλών του A.

6.3.5 Περίληψη

Ο Πίνακας 6.6 συνοψίζει τις πιθανές λύσεις συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, που εξετάστηκαν σε προηγούμενα μέρη του κεφαλαίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.6: *Πιθανές λύσεις για συστήματα γραμμικών εξισώσεων, AX = B*

Τετραγωνικότητα του A	Αντιστρεψιμότητα του A: Ορίζουσα, Τάξη του A(Rank(A))	Συνθήκες Τάξης	Εξάρτηση Εξισώσεων	AX = B Μη-Ομογενές σύστημα	AX = 0 Ομογενές σύστημα
Πίνακας A Τετραγωνικός, $(n \times n)$	A Αντιστρέψιμος Δηλ. $\|A\| \neq 0$ Δηλ. Τάξη (A) = n		Ανεξάρτητες Εξισώσεις	Μοναδική μη-τετριμμένη λύση	Μοναδική τετριμμένη λύση, X = 0
Πίνακας A Τετραγωνικός, $(n \times n)$	A μη αντιστρέψιμος Δηλ. $\|A\| = 0$ Δηλ. Τάξη (A) = k < n	Τάξη ([A, B]) = Τάξη(A)	Εξαρτημένες Εξισώσεις	Άπειρες λύσεις	Άπειρες λύσεις, X = 0 είναι μία απ' αυτές
Πίνακας A Τετραγωνικός, $(n \times n)$	A μη αντιστρέψιμος Δηλ. $\|A\| = 0$ Δηλ. Τάξη (A) = k < n	Τάξη([A, B]) > Τάξη(A)	Ασυμβίβαστες Εξισώσεις	Δεν υπάρχει λύση	Μη σχετικό
Πίνακας A μη τετραγωνικός, $(n \times m)$ Π.χ. n > m	Μη σχετικό	Μη σχετικό	Μη σχετικό	Μη σχετικό	Μη σχετικό
Πίνακας A μη τετραγωνικός, $(n \times m)$ Π.χ. n > m	A μη αντιστρέψιμος Δηλ. $\|A\| = 0$ Δηλ. Τάξη (A) = k < n	Τάξη([A, B]) = Τάξη(A)	Εξισώσεις Εξαρτημένες	Άπειρες λύσεις	Άπειρες λύσεις, X = 0 είναι μία από αυτές
Πίνακας A μη τετραγωνικός, $(n \times m)$ Π.χ. n > m	A μη αντιστρέψιμος Δηλ. $\|A\| = 0$ Δηλ. Τάξη (A) = k < n	Τάξη([A, B]) > Τάξη(A)	Ασυμβίβαστες Εξισώσεις	Δεν υπάρχει λύση	Μη σχετικό

6.4 Χαρακτηριστικές Εξισώσεις, ρίζες και διανύσματα πίνακα (Characteristic equations, eigenvalues and eigenvectors)

Σε προηγούμενα μέρη του κεφαλαίου, εξετάσαμε το πρόβλημα επίλυσης του συστήματος $AX = B$, ως $X = A^{-1}B$. Ας θεωρήσουμε, τώρα, ότι ζητάμε τη λύση X του συστήματος:

$$AX = \lambda X$$

Όπου A είναι τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων n, $X \neq 0$ είναι $(n \times 1)$ διάνυσμα και $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

Αυτό είναι ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων, του οποίου οι λύσεις διερευνήθησαν σε προηγούμενα μέρη του κεφαλαίου. Έτσι, είδαμε για παράδειγμα, ότι υπάρχει η προφανής λύση $X = 0$. Όμως, ας θεωρήσουμε ότι $(A - \lambda I_n)$ είναι τέτοιο ώστε:

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

Η αναζήτηση λύσεων αυτού του συστήματος, πέραν της προφανούς $X = 0$, είναι γνωστό ως **πρόβλημα ιδιοτιμών (eigenvalue problem)**. Οι τιμές του λ, οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι γνωστές ως **χαρακτηριστικές ρίζες ή ιδιοτιμές (characteristic roots, latent roots ή eigenvalues)** του πίνακα A. Οι μη μηδενικές λύσεις –διανύσματα– των τιμών του X ονομάζονται **χαρακτηριστικά διανύσματα ή ιδιοδιανύσματα (characteristic vectors, latent vectors ή eigenvectors)** του πίνακα A. Ώστε, οι ιδιοτιμές του A, λ_i, $i = 1, \ldots, n$, αποτελούν τη λύση της παραπάνω εξίσωσης, γνωστή ως **χαρακτηριστική εξίσωση (characteristic equation)** του πίνακα A.

Η ποσότητα

$$\rho(A) \equiv \max|\lambda_i|, \quad i = 1, \ldots, n$$

ονομάζεται **φασματική ακτίνα (spectral radius)** του πίνακα A.

Τέλος, αν είναι γνωστή μια ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A, τότε, μια μη προφανής λύση X της χαρακτηριστικής εξίσωσης, είναι ένα αντίστοιχο προς την ιδιοτιμή λ_i ιδιοδιάνυσμα του B.

Το **θεώρημα του Cayley - Hamilton** αναφέρει ότι κάθε $(n \times n)$ πίνακας A ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση, $|A - \lambda I_n| = 0$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν αντικαταστήσουμε στη χαρακτηριστική εξίσωση όπου λ το A. Έτσι:

$$|A - AI_n| = |A - A| = |0_n| = 0$$

Παράδειγμα – Χαρακτηριστική Εξίσωση και Ιδιοτιμές Πίνακα A:

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας την ακόλουθη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A:

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(5-\lambda) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 13 = 0$$

Επομένως, $\lambda_1 = 5{,}732$ και $\lambda_2 = 2{,}268$ αποτελούν τις δύο ιδιοτιμές του πίνακα A.

Με $|A - \lambda I_n| = 0$ στην εξίσωση $(A - \lambda I_n)X = 0$ ο αριθμός των λύσεων για το X είναι άπειρος. Για την εύρεση μοναδικής λύσης, η λύση κανονικοποιείται (normalized) αναγκάζοντας όλα τα στοιχεία του X, x_i, να ικανοποιούν τη συνθήκη $\sum x_i^2 = 1$ – βλέπε παράδειγμα που ακολουθεί.

Εάν:

- όλες οι ιδιοτιμές (λ_i) είναι θετικές, ο πίνακας A είναι **θετικά ορισμένος (positive definite)**
- όλες οι ιδιοτιμές (λ_i) είναι αρνητικές, ο πίνακας A είναι **αρνητικά ορισμένος (negative definite)**
- όλες οι ιδιοτιμές (λ_i) είναι μη αρνητικές και το λιγότερο ένα $\lambda = 0$, ο πίνακας A είναι **θετικά ημι-ορισμένος (positive semi-definite)**
- όλες οι ιδιοτιμές (λ_i) είναι μη θετικές και το λιγότερο ένα $\lambda = 0$, ο πίνακας A είναι **αρνητικά ημι-ορισμένος (negative semi-definite)**

- μερικές ιδιοτιμές (λ_i) είναι θετικές ενώ άλλες είναι αρνητικές, ο πίνακας A είναι **απροσδιόριστος (indefinite)**

Στο παραπάνω παράδειγμα, εφόσον και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.

Επομένως, η χαρακτηριστική εξίσωση ενός πίνακα αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση αρκετών θεμάτων που αφορούν τετραγωνικούς πίνακες. Όπως ήδη διαφαίνεται, ένας τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να προσδιοριστεί αν είναι θετικά η αρνητικά ορισμένος ή ημι-ορισμένος αναλύοντας την χαρακτηριστική εξίσωση και τις ιδιοτιμές του, όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Αυτός ο προσδιορισμός είναι χρήσιμος όταν για παράδειγμα διερευνάται η φύση των ακρότατων σημείων πολυμεταβλητών εξισώσεων. Θα δούμε σε μετέπειτα κεφάλαια ότι αυτό απαιτεί τη διερεύνηση των ιδιοτήτων πινάκων όπως του **Εσιανού** και του **πλαισιωμένου Εσιανού**. Ο εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού των ιδιοτήτων του πίνακα που έχουμε δει μέχρι τώρα (σε προηγούμενο κεφάλαιο) είναι μέσω των ελλάσονων οριζουσών των στοιχείων του πίνακα.

Παράδειγμα – Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα του Πίνακα A:

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ήταν

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

– Η πρώτη χαρακτηριστική ρίζα (ιδιοτιμή) $\lambda_1 = 5{,}732$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του χαρακτηριστικού διανύσματος (ιδιοδιανύσματος). Έτσι, αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή στην τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\begin{pmatrix} 3-5{,}732 & 2 \\ 1 & 5-5{,}732 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2{,}732 & 2 \\ 1 & -0{,}732 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Δεδομένου ότι οι σειρές του πίνακα των συντελεστών στην παραπάνω εξίσωση είναι γραμμικά εξαρτημένες, υπάρχουν άπειρες λύσεις

$$-2{,}732x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0{,}732x_2$$

Κανονοικοποιώντας $\left(\sum x_i^2 = 1\right)$ λαμβάνουμε

$$(0{,}732x_2)^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow 1{,}536x_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0{,}807 \quad \text{και} \quad x_1 = 0{,}732 \times 0{,}807 = 0{,}591$$

Έτσι, $X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}807 \end{pmatrix}$ είναι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα.

– Χρησιμοποιώντας τώρα τη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2{,}268$ μπορούμε με ανάλογο τρόπο να βρούμε το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} 3-2{,}268 & 2 \\ 1 & 5-2{,}268 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}732 & 2 \\ 1 & 2{,}732 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Από την $0{,}732x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -0{,}366x_1$

Κανονοικοποιώντας λαμβάνουμε:

$$x_1^2 + (-0{,}366)^2 x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{0{,}882} = 0{,}939 \quad \text{και}$$

$$x_2 = (-0{,}366) \times 0{,}939 = -0{,}344$$

Έτσι $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}882 \\ -0{,}344 \end{pmatrix}$ είναι το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα.

Παράδειγμα – Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα A

Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα υπολογίζονται ως εξής:

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$. Εφόσον $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$, ο A είναι απροσδιόριστος (indefinite).

- Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 7$ ευρίσκεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 6-7 & 3 \\ 3 & -2-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

απ' όπου: $x_1 = 3x_2$

Κανονικοποιώντας λαμβάνουμε

$$(3x_2)^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow 10x_2^2 = 1$$

Επομένως $x_2 = \sqrt{0{,}1}$ και $x_1 = 3x_2 = 3\sqrt{0{,}1}$. Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα λοιπόν είναι $X_1 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}$

- Στη συνέχεια βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} 6-(-3) & 3 \\ 3 & -2-(-3) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

απ' όπου $x_2 = -3x_1$

Κανονικοποιώντας λαμβάνουμε $x_1^2 + (-3x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow 10x_1^2 = 1$, με λύσεις: $x_1 = \sqrt{0{,}1}$ και $x_2 = -3x_1 = -3\sqrt{0{,}1}$

Έτσι, $X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}1} \\ -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}$

Μια ιδιότητα των ιδιοδιανυσμάτων είναι ότι, εκ κατασκευής, είναι **ορθοκανονικά (orthonormal)**. Δηλαδή $X_i'X_i = 1$

Έτσι, $X_1'X_1 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} \end{pmatrix} = 9 \times 0{,}1 + 0{,}1 = 1$

και $X_2'X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0{,}1} & -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{0{,}1} \\ -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix} = 0{,}1 + 9 \times 0{,}1 = 1$

Μια άλλη ιδιότητα των ιδιοδιανυσμάτων συμμετρικών πινάκων (μόνον) είναι ότι είναι **ορθογώνια (orthogonal)**, δηλαδή $X_i'X_j = 0$

Έτσι, $X_1'X_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{0{,}1} \\ -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix} = 3 \times 0{,}1 - 3 \times 0{,}1 = 0$

Έχοντας υπολογίσει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, X_1 και X_2 μπορεί να κατασκευαστεί ο **πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του A (transformation matrix)** $T = (X_1, X_2)$, έτσι ώστε το γινόμενο $T'AT$ να είναι διαγώνιος, όπου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές του A. Λέγεται τότε ότι έχει διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας A.

Στο παράδειγμά μας:

$$T = (X_1\ X_2) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} & -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}$$

Έτσι,

$$T'AT = \begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} & -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} & -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21\sqrt{0{,}1} & 7\sqrt{0{,}1} \\ -3\sqrt{0{,}1} & 9\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{0{,}1} & \sqrt{0{,}1} \\ \sqrt{0{,}1} & -3\sqrt{0{,}1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ένας συμμετρικός πίνακας A μπορεί να μετατραπεί σε διαγώνιο, πολλαπλασιάζοντάς τον από αριστερά με τον ανάστροφο του πίνακα T (T') και από δεξιά με τον T, δηλαδή μέσω του γινομένου $T'AT$, όπου ο πίνακας T έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.

Η μετατροπή ενός μη συμμετρικού πίνακα A σε διαγώνιο, με χρήση του πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων του επιτυγχάνεται με το γινόμενο $T^{-1}AT$.

Παράδειγμα – Διαγωνιοποίηση μη συμμετρικού πίνακα A

Έστω ο μη συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ προηγούμενου παραδείγματος, για τον οποίο έχουν υπολογιστεί τα ακόλουθα δύο ιδιοδιανύσματα, $X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}807 \end{pmatrix}$ και $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}939 \\ -0{,}344 \end{pmatrix}$, και επομένως ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του A ορίζεται ως $T = \begin{pmatrix} 0{,}591 & 0{,}939 \\ 0{,}807 & -0{,}344 \end{pmatrix}$.

Ο διαγώνιος πίνακας του A μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0{,}358 & 0{,}977 \\ 0{,}840 & -0{,}615 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}591 & 0{,}939 \\ 0{,}807 & -0{,}344 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}73 & 0 \\ 0 & 2{,}27 \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πράξεις πινάκων με χρήση του φύλλου εργασίας του Excel

E3 = {=MINVERSE(A3:C5)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Λύση Συστημάτων Εξισώσεων (Παράδειγμα Παραγωγής Ναυπηγείου)										
2	A				A^-1				B		(A^-1)*B
3	4	10	10		-1	0	1.25		162		13
4	1	7	12		1	-0.2	-0.95		110		7
5	4	8	8		-0.5	0.2	0.45		140		4
6											
7	B					(A^-1)*B					
8	162	150	165	160		13	15	17.5	2.5		
9	110	107	105	108		7	3.2	5.3	14.9		
10	140	132	146	130		4	5.8	4.2	0.1		
11											
12											
13	Ανάλυσις Εισροών - Εκροών (Input - Output Analysis)										
14							A		I		
15	240	20	230	490			0.49	0.10	1	0	
16	120	60	20	200			0.24	0.30	0	1	
17	130	120									
18	490	200									
19											
20	I-A				(I-A)^-1		D		X=((I-A)^-1)*D		
21	0.51	-0.10			2.10	0.30	230		490		
22	-0.24	0.70			0.74	1.53	20		200		

Ασκήσεις για λύση

1) Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων με την μέθοδο αντιστροφής πινάκων:

A) $5x_1 + 6x_2 = 21$
$4x_1 + 3x_2 = -3$

B) $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -9$
$5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2$

2) Έστω δύο αγαθά 1 και 2 των οποίων οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης είναι:

Αγαθό 1	**Αγαθό 2**
$Q_1^D = 82 - 3P_1 + P_2$	$Q_2^D = 92 + 2P_1 - 4P_2$
$Q_1^S = -5 + 15P_1$	$Q_2^S = -6 + 32P_2$

a) Να γραφεί το σύστημα εξισώσεων που προσδιορίζει τις τιμές και ποσότητες ισορροπίας σε μορφή πίνακα.

b) Να προσδιορισθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας.

3) Εταιρεία κατασκευάζει τρία προϊόντα, τύπου A, B και C. Οι διαθέσιμοι πόροι για περίοδο εργασίας 1 μήνα είναι 55 μονάδες χρόνου λειτουργίας μηχανημάτων, 139 μονάδες ανθρώπινου δυναμικού και 108 μονάδες πρώτων υλών. Απαιτούνται 2 μονάδες χρόνου εργασίας μηχανήματος, 9 μονάδες ανθρώπινου δυναμικού και 7 μονάδες πρώτων υλών για την παραγωγή 1000 μονάδων του προϊόντος τύπου A. Απαιτούνται 3 μονάδες χρόνου εργασίας μηχανήματος, 5 μονάδες ανθρώπινου δυναμικού και 6 μονάδες πρώτων υλών για την παραγωγή 1000 μονάδων του προϊόντος τύπου B. Τέλος, απαιτούνται 4,5 μονάδες χρόνου εργασίας μηχανήματος, 12 μονάδες ανθρώπινου δυναμικού και 8 μονάδες πρώτων υλών για την παραγωγή 1000 μονάδων του προϊόντος τύπου C. Για την πλήρη απασχόληση όλων των πόρων παραγωγής, παράγονται X μονάδες του προϊόντος A, Y μονάδες του προϊόντος B και Z μονάδες του προϊόντος C. Να υπολογιστούν οι τιμές των X, Y και Z.

4) Έστω το μακροοικονομικό μοντέλο με μεταβλητές Y, C, I, r, που ορίζεται από τις εξισώσεις:

Εθνικό Εισόδημα:	$Y = C + I + G^*$	$(G^* > 0)$
Κατανάλωση:	$C = aY + b$	$(0 < a < 1,\ b > 0)$
Επενδύσεις:	$I = cr + d$	$(c < 0,\ d > 0)$
Προσφορά χρήματος:	$M_S^* = k_1Y + k_2r$	$(k_1 > 0,\ k_2 < 0,\ M_S^* > 0)$

Να γραφεί το σύστημα στην μορφή $A\underline{x} = \underline{b}$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να προσδιοριστεί η τιμή της μεταβλητής r.

5) Έστω ο πίνακας A και το διάνυσμα B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της «τάξης ενός πίνακα», να διερευνηθεί αν το σύστημα AX = B έχει μία, καμία, ή άπειρες λύσεις.

6) Έστω ο παρακάτω πίνακας εισροών-εκροών για δύο βιομηχανίες I1 και I2.

		Εισροές		**Τελική Ζήτηση**
		I1	**I2**	
Εκροές	**I1**	100	100	300
	I2	200	500	300

Υποθέτοντας ότι το σύνολο των εκροών καλύπτει την συνολική ζήτηση (εισροές και τελική ζήτηση), να βρεθούν:

a) Το διάνυσμα εκροών x.

b) Ο πίνακας των τεχνολογικών συντελεστών, A.

c) Ο αντίστροφος του Leontief $(I - A)^{-1}$.

d) Ο μελλοντικός πίνακας εκροών $x + \Delta x$ αν η τελική ζήτηση για την I1 αυξηθεί κατά 150 μονάδες και η τελική ζήτηση για την I2 μειωθεί κατά 50 μονάδες.

7) Επιχείρηση πουλάει τρία προϊόντα A, B και Γ σε τιμές 0,5, 0,7 και 0,8 ευρώ, αντίστοιχα. Τα προϊόντα διανέμονται από τέσσερα σημεία πώλησης, τα καταστήματα K1, K2, K3 και K4, αντίστοιχα. Τον προηγούμενο μήνα το K1 διέθεσε 105 προϊόντα A, 75 προϊόντα B και 47 προϊόντα Γ. Αντίστοιχα, το K2 διέθεσε 12 προϊόντα A, 34 προϊόντα B, 17 προϊόντα Γ. Το K3 διέθεσε 150 προϊόντα A, 130 προϊόντα B, 100 προϊόντα Γ και το K4 διέθεσε 25 προϊόντα A, 20 προϊόντα B και 60 προϊόντα Γ. Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος A είναι 0,20 ευρώ, ενός B 0,4 ευρώ και ενός Γ 0,6 ευρώ. Τα καταστήματα K1, K2, K3 και K4 υπόκεινται σε διαφορετική φορολογία. Αν οι φορολογικοί συντελεστές είναι 25%, 30%, 35% και 40% αντίστοιχα, να υπολογιστούν με τη χρήση πινάκων το:

(α) αφορολόγητο κέρδος ανά κατάστημα, και
(β) συνολικό, μετά φόρων, κέρδος της επιχείρησης.

8) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας Α, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $BA - 2(B + A)^T B^{-1} = I_{2\times 2}$, όπου οι εκθέτες Τ και −1 συμβολίζουν τον ανάστροφο και αντίστροφο πίνακα, αντίστοιχα, και $I_{2\times 2}$ ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων (2 × 2).

7 Ανάλυση Ι: Παραγώγιση – Διαφορικός Λογισμός (Calculus I: Differentiation – Differential Calculus)

7.1 Όρια συναρτήσεων

Το ***όριο (limit)*** L, μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι ο αριθμός L στον οποίο τείνει η συνάρτηση, όταν το x προσεγγίζει μια συγκεκριμένη τιμή, έστω a. Συμβολίζεται ως:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x \to 3} 2x^2 = 18$$

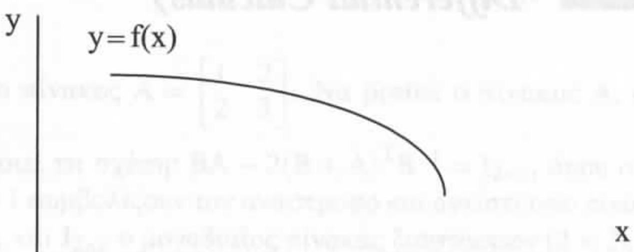
Το όριο μιας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί παρατηρώντας την τιμή της f(x), όταν το x λαμβάνει τιμές που πλησιάζουν όλο και περισσότερο το a, από πάνω και από κάτω.

Παράδειγμα:

Όταν υπολογίζουμε το $\lim_{x \to 3} 2x^2$ βρίσκουμε τιμές του $2x^2$, όταν το x λαμβάνει τιμές 1,5, 2, 2,5, 2,9, 2,95,..., και όταν το x λαμβάνει τιμές 4,5, 4, 3,5, 3,1, 3,05, ... κλπ.

Για να ορίζεται το όριο μιας συνάρτησης, πρέπει η συνάρτηση να είναι ***συνεχής (continuous)***. Δηλαδή, πρέπει να μην υπάρχουν άλματα ή κενά στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Όταν σχεδιάζεται μια τέτοια γραφική παράσταση το στυλό δεν σηκώνεται απ' το χαρτί, όπως απεικονίζεται και στο Διάγραμμα 7.1.

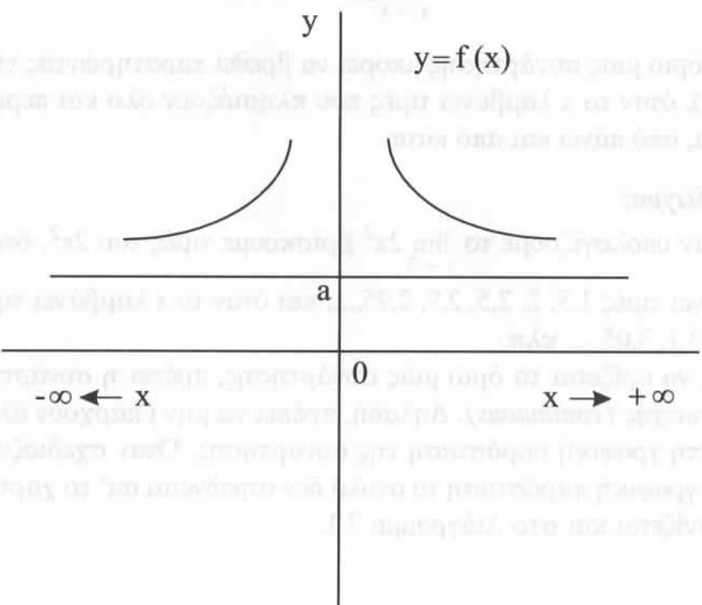
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.1: ***Μια συνεχής συνάρτηση***



Η έννοια του ορίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ***οριζόντιας ασύμπτωτης*** (***horizontal asymptote***) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Έτσι, η ευθεία y = a, στο Διάγραμμα 7.2, είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, εφόσον

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad ή \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.2: ***Η συνάρτηση f(x) με οριζόντια ασύμπτωτη, a***



Παράδειγμα:

$\lim_{x \to \infty} (k/x) = 0$, αφού όταν το x λαμβάνει τις τιμές 1, 10, 100, ..., η k/x τείνει στο 0. Δηλαδή, η υπερβολή έχει τον οριζόντιο άξονα των x ως ασύμπτωτη, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.3.

Η ***κατακόρυφη ασύμπτωτη (vertical asymptote)***, έστω x = a, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x), αν υπάρχει, είναι

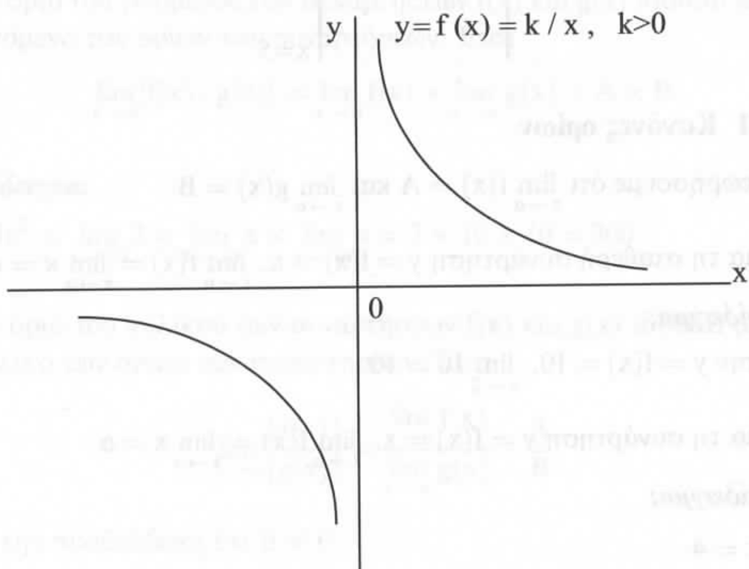
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Τα σύμβολα a^- και a^+ στα όρια των παραπάνω τύπων συμβολίζουν ότι το x λαμβάνει τιμές όλο και πιο κοντά στο a, από πάνω και από κάτω, αντίστοιχα. Τα όρια αυτά λέγονται και πλευρικά όρια.

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to 0^+} (k/x) = +\infty$, αφού όταν το x παίρνει τιμές 1,5, 1, 0,5, 0,1, ..., το k/x τείνει στο άπειρο. Συνεπώς η υπερβολή έχει και τον άξονα των y ως ασύμπτωτη, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.3.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.3: ***Η συνάρτηση k/x με κατακόρυφη ασύμπτωτη, τον άξονα y***

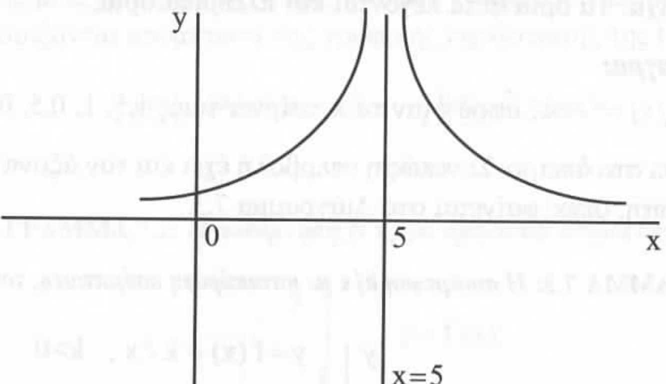


Παράδειγμα:

Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^2}$ όταν το $x \to \alpha$, η $f(x) \to \infty$. Επομένως, η συνάρτηση αυτή έχει ως κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = \alpha$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ έχει ως κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 5$. Το διάγραμμα 7.4 παρουσιάζει τη συνάρτηση και την κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.4: ***Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ με κατακόρυφη ασύμπτωτη, την $x = 5$***



7.1.1 Κανόνες ορίων

Ας θεωρήσουμε ότι $\lim_{x \to \alpha} f(x) = A$ και $\lim_{x \to \alpha} g(x) = B$.

- Για τη σταθερή συνάρτηση $y = f(x) = \kappa$, $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} \kappa = \kappa$

Παράδειγμα:

Για την $y = f(x) = 10$, $\lim_{x \to 2} 10 = 10$

- Για τη συνάρτηση $y = f(x) = x$, $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} x = \alpha$

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to 4} x = 4$

- $\lim_{x \to \alpha} x^n = \alpha^n$, όπου α, $n > 0$

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to 2} x^5 = 2^5 = 32$

- $\lim_{x \to \alpha} \kappa f(x) = \kappa \lim_{x \to \alpha} f(x)$, όπου κ είναι σταθερά

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to -2} 4x = 4 \lim_{x \to -2} = 4(-2) = -8$

- Το όριο του αθροίσματος ή της διαφοράς των $f(x)$ και $g(x)$ ισούται το άθροισμα των ορίων των συναρτήσεων. Έτσι:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) \pm \lim_{x \to \alpha} g(x) = A \pm B$$

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to -2} (x + 3) = \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 3 = -2 + 3 = 1$

$\lim_{x \to 4} (2 - x) = \lim_{x \to 4} 2 - \lim_{x \to 4} x = 2 - 4 = -2$

- Το όριο του γινομένου των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ ισούται με το γινόμενο των ορίων των συναρτήσεων. Έτσι

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) \times \lim_{x \to \alpha} g(x) = A \times B$$

Παράδειγμα:

$\lim_{x \to 10} 3x^2 = \lim_{x \to 10} 3 \times \lim_{x \to 10} x \times \lim_{x \to 10} x = 3 \times 10 \times 10 = 300$

- Το όριο του πηλίκου των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ ισούται με το πηλίκο των ορίων των συναρτήσεων. Έτσι

$$\lim_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to \alpha} f(x)}{\lim_{x \to \alpha} g(x)} = \frac{A}{B}$$

με την προϋπόθεση ότι $B \neq 0$.

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{10}{x}\right)=\frac{\lim_{x\to 5}10}{\lim_{x\to 5}x}=\frac{10}{5}=2$$

- Το όριο της συνάρτησης f(x) υψωμένης στη δύναμη n, όπου $n>0$ είναι:

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to\alpha}f(x)\right]^n=A^n$$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 2}x^5=\left[\lim_{x\to 2}x\right]^5=2^5=32$$

Παραδείγματα:

Να υπολογιστούν τα όρια των συναρτήσεων $y=\frac{x^5+3x}{2-3x^2}$, όταν $x\to -1$, και $y=(2x-3)^4-2$, όταν το $x\to 3$

Απαντήσεις

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+3x}{2-3x^2}=\frac{\lim_{x\to -1}(x^5+3x)}{\lim_{x\to -1}(2-3x^2)}=\frac{\left[\lim_{x\to -1}x\right]^5+\left(\lim_{x\to -1}3\times\lim_{x\to -1}x\right)}{\lim_{x\to -1}2-\left(\lim_{x\to -1}3\times\lim_{x\to -1}x\times\lim_{x\to -1}x\right)}$$

$$=\frac{(-1)^5+[3\times(-1)]}{2-[3\times(-1)\times(-1)]}=\frac{-4}{-1}=4$$

$$\lim_{x\to 3}[(2x-3)^4-2]=\left[\lim_{x\to 3}(2x-3)\right]^4-\lim_{x\to 3}2$$

$$=\left[\left(\lim_{x\to 3}2\times\lim_{x\to 3}x\right)-\lim_{x\to 3}3\right]^4-2$$

$$=[(2\times 3)-3]^4-2=79$$

- **Κανόνες του L'Hospital**

Όταν $\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$, $\lim_{x\to\alpha}g(x)=0$, τότε

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to\alpha}f(x)}{\lim_{x\to\alpha}g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$

όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ συμβολίζουν τις παραγώγους των συναρτήσεων f(x) και g(x). Οι τελευταίες ορίζονται παρακάτω στο κεφάλαιο αυτό. Ο παραπάνω κανόνας ισχύει και όταν $\lim_{x\to\alpha}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to\alpha}g(x)=+\infty$.

Για $\lim_{x\to\alpha}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to\alpha}g(x)=-\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to\alpha}f(x)\times\left[1+\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to\alpha}f(x)\left[1+\frac{g'(x)}{f'(x)}\right]$$

Για $\lim_{x\to\alpha}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to\alpha}g(x)=+\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to\alpha}g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]=\lim_{x\to\alpha}g(x)\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-1\right]$$

Για $\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$, $\lim_{x\to\alpha}g(x)=\pm\infty$, ισχύει

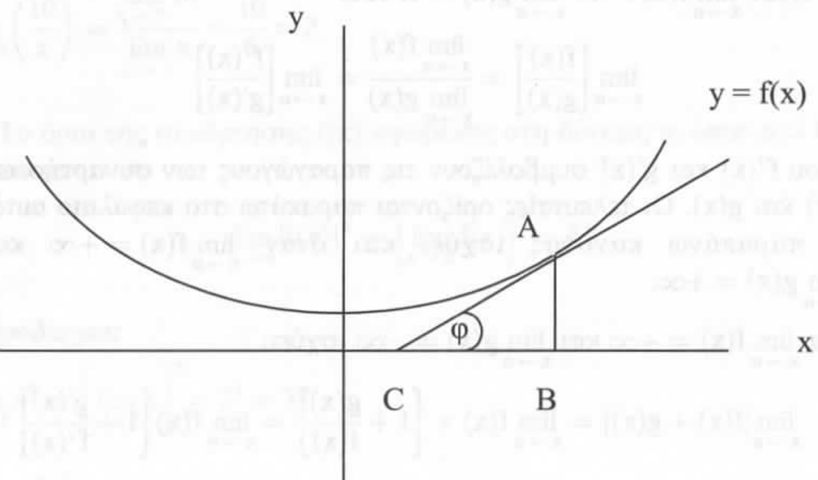
$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)\times g(x)]=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right]=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}\right]$$

Παραδείγματα εδώ δεν δίνονται αφού δεν έχει οριστεί ακόμα η παράγωγος.

7.2 Η κλίση της καμπύλης μιας συνάρτησης και η παράγωγος

Η ***κλίση της καμπύλης*** μιας συνάρτησης $y=f(x)$, σ' ένα συγκεκριμένο σημείο (έστω το Α, στο Διάγραμμα 7.5), ορίζεται ως η κλίση της ευθείας που εφάπτεται της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Ισοδύναμα, ισούται με την ***εφαπτομένη της γωνίας (tangent of the angle)*** της ευθείας με τον x άξονα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.5: ***Η κλίση της καμπύλης της συνάρτησης $y = f(x)$***



Μαθηματικά ορίζεται ως:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Όπου h συμβολίζει απειροελάχιστες μεταβολές του x, δηλαδή Δx.

Το όριο συμβολίζεται και ως

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

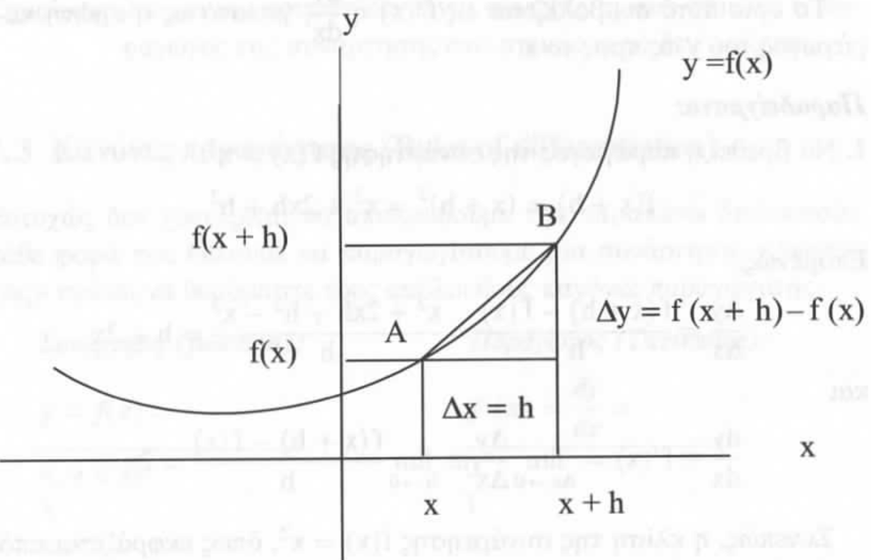
και είναι γνωστό ως η ***πρώτη παράγωγος του y ως προς το x (the first derivative of y with respect to x)***. Δείχνει το ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x σε αυτό το σημείο. Εναλλακτικά, μετράει το ***στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής (instantaneous rate of change)*** του y ως προς μια απειροελάχιστη μεταβολή στο x στο σημείο αυτό. Αυτό πρέπει να διαχωριστεί από τη μέση μεταβολή του y ως προς κάποια μεταβολή στο x, η οποία ορίζεται από το λόγο Δy/Δx. Ειδικότερα, όπως ορίσαμε μαθηματικά πριν λίγο το όριο είναι ο αριθμός στον οποίο ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ πλησιάζει όλο και περισσότερο, καθώς το διάστημα Δx γίνεται όλο και μικρότερο, δηλαδή καθώς το Δx τείνει στο μηδέν.

Δηλαδή, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$. Τα μεγέθη df (ή dy) και dx ονομάζονται **διαφορικά** της f (της y) και της x αντίστοιχα. Δείχνουν τις στιγμιαίες μεταβολές στην f (της y) και στην x αντίστοιχα.

Γράφοντας τη σχέση $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ως προς dy βλέπουμε ότι $dy = f'(x)dx$. Δηλαδή το διαφορικό (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής) της εξαρτημένης μεταβλητής y ισούται με το διαφορικό (στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής) της x επί την παράγωγο (το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της y σε σχέση με τη x όπως ορίζεται και εξαρτάται από τη συνάρτηση f(x)) της y ως προς την x. Η διαδικασία εύρεσης του διαφορικού ονομάζεται **διαφόριση**.

Η κλίση μη-γραμμικών συναρτήσεων δεν είναι σταθερή, σε αντίθεση με την κλίση των γραμμικών συναρτήσεων η οποία παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία της ευθείας.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.6: ***Η κλίση της καμπύλης της συνάρτησης $y = f(x)$***



Για καλύτερη κατανόηση των εννοιών ας εξετάσουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$, η οποία παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 7.6. Το h δηλώνει

«απειροελάχιστες» μεταβολές στο x, $\Delta x = h$. Σχεδιάζουμε τη χορδή AB ως προσέγγιση της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο –φανταστείτε την καμπύλη να μεγεθύνεται στο σημείο αυτό– το σημείο A είναι $(x, f(x))$, ενώ το σημείο B είναι $(x+h, f(x+h))$. Επομένως:

$$\Delta x = (x+h) - x \quad \text{και} \quad \Delta y = f(x+h) - f(x)$$

Η κλίση της χορδής AB υπολογίζεται ως:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η κλίση υποτίθεται ότι είναι προσέγγιση της καμπύλης σ' ένα σημείο, δηλαδή $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ είναι προσέγγιση της καμπύλης καθώς το $h \to 0$, δηλαδή καθώς γίνεται όλο και μικρότερο. Με άλλα λόγια, θέλουμε το:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{δηλαδή το:} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Το όριο αυτό συμβολίζεται ως $f'(x)$ ή $\frac{dy}{dx}$, γνωστό ως η πρώτη παράγωγος του y ως προς το x.

Παραδείγματα:

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Επομένως,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = h + 2x$$

και

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

Συνεπώς, η κλίση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, όπως εκφράζεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης, είναι 2x. Όπως φαίνεται, αυτή διαφέρει καθώς μεταβάλλεται το x. Δηλαδή, δεν παραμένει σταθερή στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + h^2 + 2xh + 2$$

Επομένως:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 2 - x^2 - 2}{h} = h + 2x$$

και

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0}(x + 2h) = 2x$$

Η ***κλίση (slope)*** – ή ισοδύναμα ο ρυθμός μεταβολής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σ' ένα συγκεκριμένο σημείο a, συμβολίζεται ως $dy/dx|_{x=a}$, και μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας όπου x το a στην dy/dx.

Παράδειγμα:

Η ***παράγωγος*** (***derivative***) της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2$, ***για*** $x = 3$ είναι 6.

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο, η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό δεν ορίζεται.

7.3 Κανόνες παραγώγισης (Rules of differentiation)

Ευτυχώς δεν χρειάζεται να ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία κάθε φορά που θέλουμε να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση. «Δυστυχώς» πρέπει να θυμόμαστε τους ακόλουθους κανόνες παραγώγισης:

Συνάρτηση (function): $y = f(x) =$	***Παράγωγος (Derivative):*** $f'(x) = \frac{dy}{dx} =$
$a, a \in \mathbb{R}$	0
x	1
ax	a
x^n	nx^{n-1}
ax^n	anx^{n-1}

Άθροισμα συναρτήσεων

$ax^n + bx^m$	$anx^{n-1} + bmx^{m-1}$

Διαφορές συναρτήσεων

$ax^n - bx^m$	$anx^{n-1} - bmx^{m-1}$

Γινόμενα συναρτήσεων

$u(x)v(x)$	$u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

Κλάσματα συναρτήσεων

$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

Δυνάμεις συναρτήσεων

$[f(x)]^n$	$nf'(x)[f(x)]^{n-1}$

Αλυσωτός κανόνας (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης) – Chain Rule (derivative of a composite function)

$f(u(x))$		$f'(u(x))u'(x) \equiv \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$	
e^x		e^x	
$ae^{g(x)}$		$ag'(x)e^{g(x)}$	
$\log_e x$		$\frac{1}{x}$	
$\log_e f(x)$		$f'(x)/f(x)$	
$\log_a x = \log_e x/\log_e a$		$1/x\log_e a$	
$\sin x$	$(\eta\mu x)$	$\cos x$	$(\sigma\upsilon\nu x)$
$\cos x$	$(\sigma\upsilon\nu x)$	$-\sin x$	$(-\eta\mu x)$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\left(\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tau\varepsilon\mu^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)$
$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\left(\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)$	$-\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(-\sigma\tau\varepsilon\mu^2 x = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)$
$\sec x$	$(\tau\varepsilon\mu x)$	$\sec x \tan x$	$(\tau\varepsilon\mu x \cdot \varepsilon\varphi x)$
$\csc x$	$(\sigma\tau\varepsilon\mu x)$	$-\csc x \cot x$	$(\sigma\tau\varepsilon\mu x \cdot \sigma\varphi x)$

Σημείωση:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \frac{d(e^x)}{dx} = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Παραδείγματα:

Συνάρτηση, $f(x)$	***Παράγωγος, $f'(x) \equiv \frac{dy}{dx}$***
$y = 5x$	$\frac{dy}{dx} = 5$
$y = 4x^6$	$f'(x) = 4 \cdot 6x^{6-1} = 24x^5$
$y = 2$	$\frac{dy}{dx} = 0$
$y = 2 - 3x$	$f'(x) = -3$
$y = 5x^3 + 2x + 4$	$f'(x) = 15x^2 + 2 + 0$
$y = 4x - x^6 - x^{10}$	$f'(x) = 4 - 6x^5 - 10x^9$
$y = 3xe^x$	$f'(x) = 3xe^x + 3e^x$
$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	$f'(x) = \frac{(x-1)^2 2x - x^2 2(x-1)}{[(x-1)^2]^2}$
$y = (x^2 - 3)^{1/2}$	$f'(x) = \frac{1}{2}(2x - 0)(x^2 - 3)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$
$y = 7e^{5x^2}$	$f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot 2xe^{5x^2} = 70xe^{5x^2}$
$y = \log_e 7x^3$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{21x^2}{7x^3} = \frac{3}{x}$
$y = \log_{10}x = \log_e x \log_{10}e$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_{10}e = \frac{1}{x\ln 10}$
$y = \sin(6x^3 + 2x)$	$f'(x) = (18x^2 + 2)\cos(6x^3 + 2x)$

$y = \cos x^3$	$f'(x) = -3x^2 \sin x^3$
$y = \tan 6x$	$f'(x) = 6\sec^2 6x$
$y = \csc(3x-2)$	$f'(x) = -3\csc(3x-2)\cot(3x-2)$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε την πεπλεγμένη συνάρτηση, η οποία έχει τη γενική μορφή $F(y, x) = 0$. Μια τέτοια συνάρτηση δεν είναι πάντα εύκολο ή εφικτό να μετατραπεί σε συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$. Για την παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων διακρίνονται δύο βήματα:

1. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης ως προς x, θεωρώντας ότι η y είναι συνάρτηση του x. Ο αλυσωτός κανόνας χρησιμοποιείται στην πορεία.
2. Η εξίσωση που προκύπτει από το βήμα 1 επιλύεται ως προς x.

Παράδειγμα:

$F(y, x) = 0 : 2x^3 - 6y^4 + 20 = 0$

1. $\frac{d}{dx}(2x^3 - 6y^4 + 20) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(6y^4) + \frac{d}{dx}(20) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - \left[6 \times 4 \times y^3 \times \frac{d}{dx}(y)\right] + 0 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 24y^3\frac{dy}{dx} = 0$

2. $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{24y^3} = \frac{x^2}{4y^3}$

Ιδιότητα εκθετικών συναρτήσεων: Σταθερή αναλογική ανάπτυξη (steady proportionate growth):

Εάν: $y = ae^{bt}$ ή ισοδύναμα $\ln y = \ln a + bt$

τότε: $dy/dt = abe^{bt} = by$

απ' όπου: $(dy/y)/dt = b$ – δηλαδή είναι μια σταθερά,

όπου: dy/y μετράει την ποσοστιαία μεταβολή στο y

7.4 Οικονομικές εφαρμογές

7.4.1 Η συνάρτηση ζήτησης ως σύνθετη συνάρτηση της τιμής και του χρόνου

Ας θεωρήσουμε ότι η εβδομαδιαία ποσότητα ζήτησης για παγωτά (q) εξαρτάται από την τιμή τους (p). Περαιτέρω, εάν βρισκόμαστε στην αρχή του καλοκαιριού θα θεωρήσουμε ότι η τιμή των παγωτών μεταβάλλεται με το χρόνο (t). Κατά συνέπεια, η εβδομαδιαία ποσότητα ζήτησης για παγωτά είναι (σύνθετη) συνάρτηση του χρόνου, $q = f(p(t))$.

Μεταβολές στην ποσότητα ζήτησης περιγράφονται από την παράγωγο της συνάρτησης q ως προς το t. Χρησιμοποιώντας τον αλυσωτό κανόνα λαμβάνουμε:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

Δηλαδή, μεταβολές στην ποσότητα ζήτησης ανά εβδομάδα ισούται με το γινόμενο της μεταβολής της ζήτησης ως προς την τιμή και της μεταβολής της τιμής ως προς το χρόνο (ανά εβδομάδα). Ας υποθέσουμε ότι για κάθε ευρώ αύξησης της τιμής των παγωτών η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται κατά 100 μονάδες $\left(\text{δηλαδή } \frac{dq}{dp} = -100\right)$. Επίσης, η τιμή των παγωτών αυξάνεται κάθε εβδομάδα λόγω της άφιξης του καλοκαιριού κατά 0,05 ευρώ $\left(\text{δηλαδή } \frac{dp}{dt} = 0{,}05\right)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μείωση που επέρχεται στη ζήτηση των παγωτών ανά εβδομάδα (λόγω της αύξησης της τιμής) ως

$$\frac{dq}{dt} = -100 \times 0{,}05 = -5$$

Βεβαίως η ζήτηση για παγωτά δεν επηρεάζεται μόνο από την τιμή τους. Η θερμοκρασία του αέρα για παράδειγμα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα όσον αφορά στην ποσότητα ζήτησης και αυτός ο παράγοντας μπορεί να υπερκεράσει τη μείωση στη ζήτηση που επιτελείται λόγω της αύξησης της τιμής των παγωτών.

7.4.2 Σχέσεις μεταξύ συνολικών (totals), μέσων (averages) και οριακών (marginals) μεγεθών

Έστω TC το συνολικό κόστος (Total Cost), AC το μέσο κόστος (Average Cost) και MC το οριακό κόστος (Marginal Cost) της παραγωγής x μονάδων κάποιου προϊόντος.

Το ***συνολικό κόστος*** περιγράφεται ως συνάρτηση των μονάδων παραγωγής (x) ως:

$$TC = f(x)$$

Το ***οριακό κόστος*** είναι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής για μια επιπλέον μονάδα παραγωγής. Μαθηματικά:

$$MC = f'(x) \equiv \frac{d(TC)}{dx}$$

Το ***μέσο κόστος*** είναι το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων παραγόμενου προϊόντος, διαιρούμενο με τον αριθμό των μονάδων. Περιγράφει το κόστος παραγωγής ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος. Μαθηματικά:

$$AC = \frac{TC}{x} \equiv \frac{f(x)}{x}$$

Από την οικονομική θεωρία γνωρίζουμε ότι η καμπύλη συνολικού κόστους, TC, έχει σχήμα S, ενώ οι καμπύλες των MC και AC έχουν σχήμα δοχείου, U, με την καμπύλη MC να τέμνει την AC από κάτω, στο κατώτατο σημείο της. Το Διάγραμμα 7.7 παρουσιάζει τις καμπύλες αυτές.

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι η καμπύλη του οριακού κόστους τέμνει την καμπύλη του μέσου κόστους στο κατώτατο σημείο της τελευταίας. Αυτό μπορεί να δειχθεί και μαθηματικά ως εξής: Όπως θα δούμε παρακάτω, το κατώτατο σημείο μιας συνάρτησης, όπως αυτή του μέσου κόστους μπορεί να βρεθεί παραγωγίζοντας τη συνάρτηση, θέτοντας την παράγωγο αυτή ίση με μηδέν και λύνοντας ως προς x. Έτσι

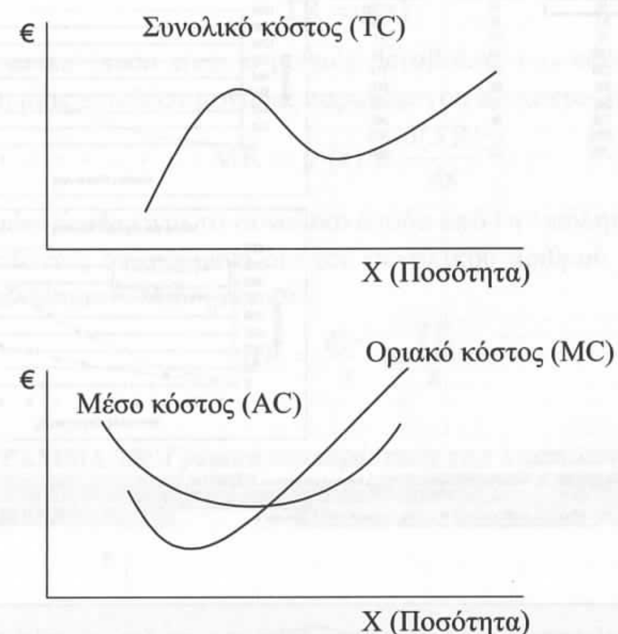
$$AC = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{d(AC)}{dx} = \frac{x \cdot f'(x) - f(x) \cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} \equiv \frac{TC}{x} \equiv AC$$

Επομένως, στο ελάχιστο σημείο της συνάρτησης του μέσου κόστους,

το μέσο κόστος παραγωγής (AC) ισούται με το οριακό κόστος παραγωγής (MC), όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 7.7.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.7: ***Γραφική αναπαράσταση των καμπυλών συνολικού, μέσου και οριακού κόστους***



Παραδείγματα:

1. Κόστη:

Έστω: $TC = x^3 + 3x^2 + 6x$ (συνάρτηση 3ου βαθμού)

Τότε: $AC = TC/x = x^2 + 3x + 6$ (συνάρτηση 2ου βαθμού)

και $MC = d(TC)/dx = 3x^2 + 6x + 6$

Συνεπώς, η συνάρτηση του TC δεικνύει ότι αν x = 10, δηλαδή αν είχαμε 10 μονάδες παραγόμενου προϊόντος, τότε:

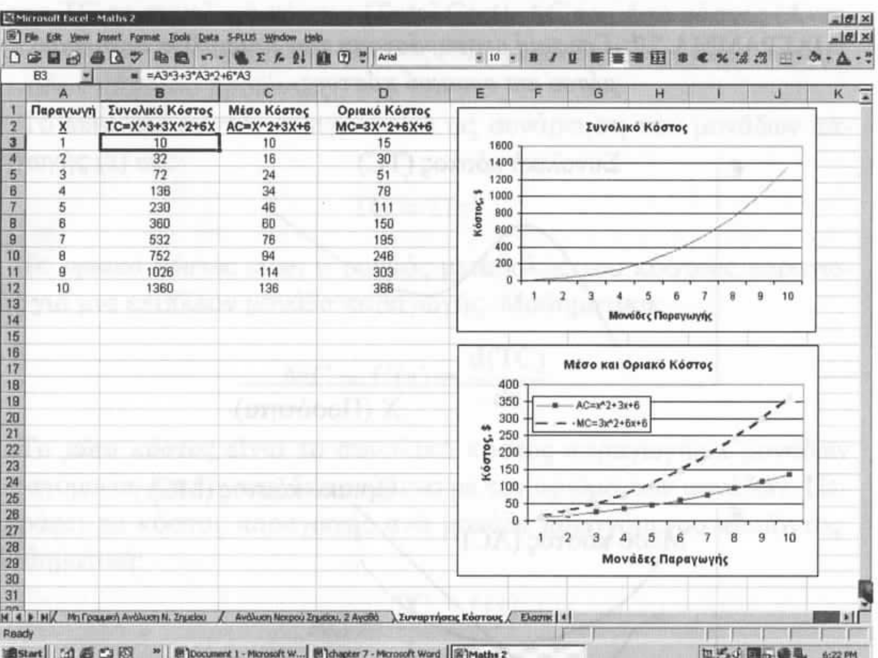
$TC = 10^3 + 10^2 \times 3 + 10 \times 6 = €\,1360$

$AC = 10^2 + 10 \times 3 + 6 = €\,136$

ή απλά: $AC = TC/x = 1360/10 = €\,136$

και $MC = €\,366$

ΓΡΑΦΗΜΑ 7.1: ***Το συνολικό, μέσο και οριακό κόστος σε μορφή πίνακα και σε διαγράμματα***



Παραγωγή X	Συνολικό Κόστος TC=X^3+3X^2+6X	Μέσο Κόστος AC=X^2+3X+6	Οριακό Κόστος MC=3X^2+6X+6
1	10	10	15
2	32	16	30
3	72	24	51
4	136	34	78
5	230	46	111
6	360	60	150
7	532	76	195
8	752	94	248
9	1026	114	303
10	1360	136	366

Το ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία των συναρτήσεων TC, AC και MC του παραπάνω παραδείγματος σε μορφή πίνακα και σε μορφή διαγράμματος, όπως φαίνεται στο Γράφημα 7.1. Οι μονάδες παραγωγής του προϊόντος εισάγονται στα κελιά a3:a12. Στα κελιά b3, c3 και d3 τοποθετούνται οι τύποι υπολογισμού των TC, AC και MC, αντίστοιχα. Δηλαδή, οι a3^3+3*a3^2+6*a3, a3^2+3*a3+6 και 3*a3^2+*a3+6. Εν συνεχεία, οι τύποι αντιγράφονται στα κελιά b4 με d12 και παράγουν τις συναρτήσεις σε μορφή πίνακα, όπως φαίνονται στο Γράφημα 7.1. Οι δυνατότητες του Excel στην κατασκευή διαγραμμάτων χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των διαγραμμάτων των συναρτήσεων, όπως φαίνονται στο ίδιο γράφημα που περιέχει τον πίνακα

Από την πλευρά των εσόδων μιας επιχείρησης, ας υποθέσουμε ότι πωλούνται x μονάδες του προϊόντος. Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: ***Συνολικό έσοδο (Total Revenue)*** ≡ TR, ***Μέσο Έσοδο (Average Revenue)*** ≡ AR και ***Οριακό Έσοδο (Marginal Revenue)*** ≡ MR.

Το ***συνολικό έσοδο*** περιγράφεται ως συνάρτηση των πωλήσεων x

$$TR = g(x)$$

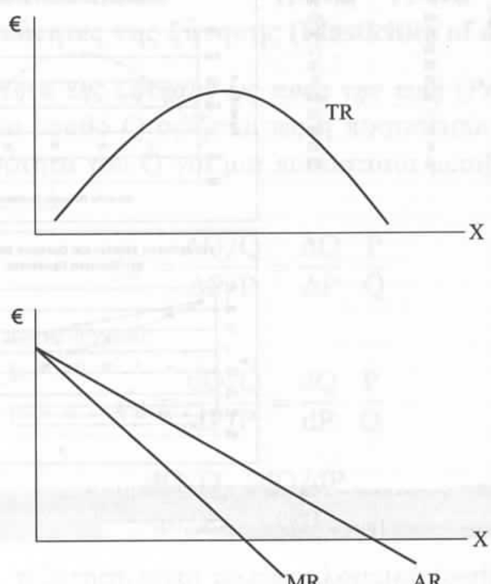
Το ***οριακό έσοδο*** είναι ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας παραγόμενου προϊόντος. Μαθηματικά:

$$MR = g'(x) \equiv \frac{d(TR)}{dx}$$

Το ***μέσο έσοδο*** είναι το συνολικό έσοδο από την πώληση x μονάδων του προϊόντος διαιρούμενο δια του συνολικού αριθμού των μονάδων που επωλήθησαν. Μαθηματικά:

$$AR = \frac{g(x)}{x} \equiv \frac{TR}{x}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.8: ***Γραφική αναπαράσταση των καμπυλών συνολικών, μέσων και οριακών εσόδων***



2. Έσοδα:

Έστω $TR = 50x - 2x^2$ (συνάρτηση δευτέρου βαθμού)

$D \equiv AR = TR/x = 50 - 2x$ (γραμμική συνάρτηση)

$MR = d(TR)/dx = 50 - 4x$ (γραμμική συνάρτηση)

Αν $x = 2$, $TR = 100 - 2 \times 4 = 92$

$AR = 50 - 2 \times 2 = 46$

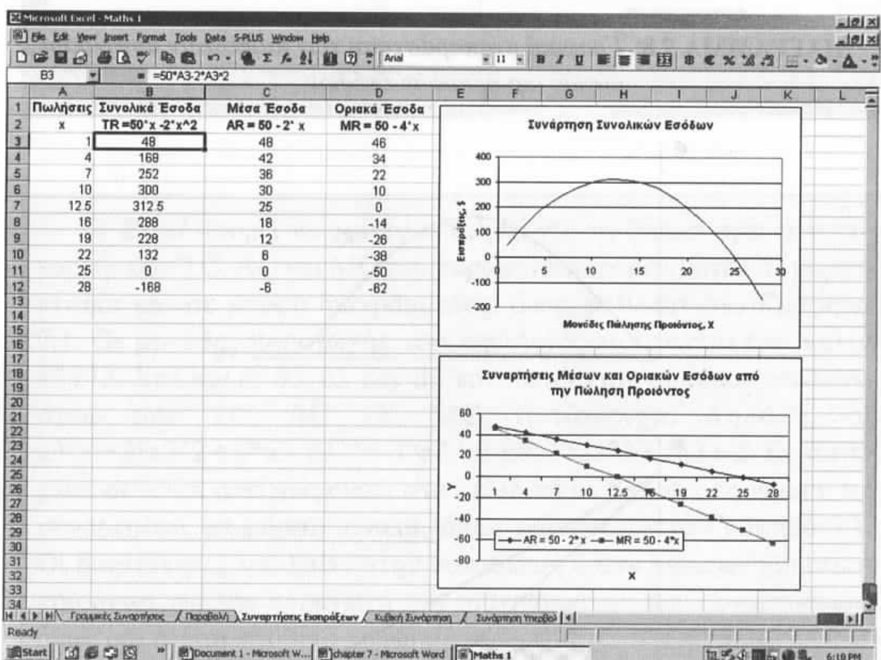
$MR = 50 - 8 = 42$

Γενικά αν $TR = ax + bx^2$

$AR = TR/x = a + bx$

$d(TR)/dx = MR = a + 2bx$

ΓΡΑΦΗΜΑ 7.2: ***Συνολικό, μέσο και οριακό έσοδο σε μορφή πίνακα και σε διαγράμματα***



Πωλήσεις x	Συνολικά Έσοδα TR=50*x-2*x^2	Μέσα Έσοδα AR=50-2*x	Οριακά Έσοδα MR=50-4*x
1	48	48	46
4	168	42	34
7	252	36	22
10	300	30	10
12.5	312.5	25	0
16	288	18	-14
19	228	12	-26
22	132	6	-38
25	0	0	-50
28	-168	-6	-62

Παρατηρούμε ότι, AR και MR είναι και οι δυο γραμμικές συναρτήσεις, όμως η MR έχει διπλάσια κλίση από εκείνη της συνάρτησης της AR. Δηλαδή, είναι δύο φορές πιο απότομη. Έτσι, αν το σημείο τομής της καμπύλης MR με τον x άξονα είναι b, το σημείο τομής της AR με τον x άξονα είναι 2b. Αυτό φαίνεται στο Διάγραμμα 7.8 και στο Γράφημα 7.2.

Το ***Excel*** χρησιμοποιείται για τη δημιουργία των συναρτήσεων των TR, AR και MR σε μορφή πίνακα και σε γραφική μορφή. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Γράφημα 7.2. Οι μονάδες πωλήσεων του προϊόντος x τοποθετούνται στα κελιά a3:a12. Οι τύποι των TR, AR και MR εισάγονται στα κελιά b3, c3 και d3. Αυτοί είναι, αντίστοιχα, 50a3-2a3^2, 50-2a3 και 50-4a3. Εν συνεχεία, τα περιεχόμενα των κελιών b3:d3 αντιγράφονται στα κελιά b4 με d12. Έτσι δημιουργούνται οι συναρτήσεις σε μορφή πίνακα, όπως φαίνεται στο Γράφημα 7.2. Στο ίδιο γράφημα χρησιμοποιούνται οι τιμές του πίνακα για τη δημιουργία των διαγραμμάτων των συναρτήσεων των TR, AR και MR

7.4.3 Ελαστικότητες της ζήτησης (Elasticities of demand)

1. Η ***Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή*** (***Price elasticity of demand***) για ένα αγαθό Q ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του Q για μια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή του Q. Μαθηματικά:

$$\mathcal{E}_d = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

ή με τη χρήση παραγώγων:

$$\mathcal{E}_d = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{E}_d = \dfrac{dQ/Q}{dP/P} = \dfrac{dQ/dP}{Q/P}$

όταν $|\mathcal{E}_d| \to \infty$, η ζήτηση είναι τελείως ελαστική (perfectly elastic)

όταν $|\mathcal{E}_d| > 1$, η ζήτηση είναι ελαστική (elastic)
όταν $|\mathcal{E}_d| = 1$, η ζήτηση έχει μοναδιαία ελαστικότητα (unit elasticity)
όταν $0 < |\mathcal{E}_d| < 1$, η ζήτηση είναι ανελαστική (inelastic)
όταν $|\mathcal{E}_d| = 0$, η ζήτηση είναι τελείως ανελαστική (perfectly inelastic)

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό των ***ελαστικοτήτων*** είναι ότι δεν εκφράζονται σε συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης.

Παράδειγμα:

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για μήλα είναι Q = 10 – 2P, όπου το Q μετριέται σε κιλά, ενώ το P μετριέται σε λεπτά του ευρώ. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε την ευαισθησία της ζήτησης για μήλα σε σχέση με μεταβολές στην τιμή των μήλων. Ας συγκρίνουμε τις μετρήσεις από την παράγωγο και από την ελαστικότητα. Και οι δύο μετρούν τη μεταβολή στην Q σε σχέση με μεταβολές στο P.

Η παράγωγος του Q ως προς P, –2, δείχνει ότι η ζήτηση για μήλα θα σημείωνε πτώση (άνοδο) κατά 2 κιλά για κάθε λεπτό αύξησης (μείωση) στην τιμή των μήλων.

Ωστόσο, αν μετρούσαμε τις τιμές σε ευρώ η παράγωγος, –2, δείχνει ότι η ζήτηση θα σημείωνε πτώση (άνοδο) κατά 2 κιλά για κάθε 1 ευρώ αύξησης (μείωσης) στην τιμή των μήλων.

Υπό αυτήν την έννοια η παράγωγος είναι ευαίσθητη στις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών. Η ελαστικότητα μπορεί να παρακάμψει το πρόβλημα αυτό καθόσον εκφράζει ένα ποσοστό.

Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή στο παράδειγμα είναι $\mathcal{E}_d = -2(P/Q)$. Για P = 1, Q = 8, η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\mathcal{E}_d = -0{,}25\%$. Δηλαδή, στο σημείο (P = 1, Q = 8) επί της καμπύλης ζήτησης, αν η τιμή των μήλων αυξηθεί κατά 1%, η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται κατά 0,25%. Αυτή η λύση, καθότι εκφράζεται ως ποσοστό, είναι ανεξάρτητη από τις μονάδες μέτρησης των τιμών ή του βάρους.

Με άλλα λόγια μια αύξηση στην τιμή των μηλων κατά 1% του λεπτού, από 1 λεπτό σε $1 + 0{,}01 \times 1 = 1{,}01$, θα επιφέρει μείωση στην ποσότητα ζήτησης των μήλων σε $\varepsilon_d \times Q = 0{,}0025 \times 8 = 0{,}02$ κιλά. Η νέα ποσότητα ζήτησης λοιπόν, όταν η τιμή των μήλων διαμορφωθεί σε 1,01 ευρώ, θα είναι 8 – 0,02 = 7,98 κιλά. Η μεταβολή στην ποσότητα ζήτησης λόγω της αύξησης της τιμής κατά 1% από 1 σε 1,01 ευρώ υπολογίζεται ως 8 – 7,98 = 0,02

Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή είναι σημαντική αναφορικά με το τι συμβαίνει στα έσοδα, όταν μεταβάλλεται η τιμή του προιόντος. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής:

$$\text{Αν } TR = P\,Q,\ MR = \frac{d(TR)}{dQ} = Q\frac{dP}{dQ} + P\frac{dQ}{dQ}$$

$$MR = P\left(1 + \frac{dP}{dQ}\cdot\frac{Q}{P}\right) = P\left(1 + \frac{1}{\mathcal{E}_d}\right)$$

Αφού η ελαστικότητα της ζήτησης είναι αρνητική $MR = P\left(1 - \frac{1}{\mathcal{E}_d}\right)$
Συνεπώς:

Αν $|\mathcal{E}_d| \to \infty$, $MR > 0$ και $MR = P$
Αν $|\mathcal{E}_d| > 1$, $MR > 0$
Αν $|\mathcal{E}_d| = 1$, $MR = 0$
Αν $0 < |\mathcal{E}_d| < 1$, $MR < 0$
Αν $|\mathcal{E}_d| \to 0$, $MR < 0$ και $MR \to -\infty$

2. Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα (Income elasticity of demand) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του Q, ως προς την ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος, Ι. Μαθηματικά:

$$\mathcal{E}_I = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta I/I} = \frac{\Delta Q}{\Delta I}\cdot\frac{I}{Q} = \frac{dQ}{dI}\cdot\frac{I}{Q}$$

$\mathcal{E}_I > 0$ για ***κανονικά αγαθά (normal goods)***
$\mathcal{E}_I < 0$ για ***κατώτερα αγαθά (inferior goods)***
$\mathcal{E}_I = 0$ για ***ουδέτερα αγαθά (neutral goods)***

3. Η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης (Cross elasticity of demand) ή η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή κάποιου άλλου αγαθού, ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του Q ως προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής ενός άλλου αγαθού (υποκατάστατου ή συμπληρωματικού), P_y. Μαθηματικά:

$$\mathcal{E}_{Qy} = \frac{dQ/Q}{dP_y/P_y} = \frac{dQ}{dP_y}\cdot\frac{P_y}{Q}$$

$\mathcal{E}_{Qy} > 0$ όταν Q, Y είναι ***υποκατάστατα αγαθά (substitutes)***
$\mathcal{E}_{Qy} < 0$ όταν Q, Y είναι ***συμπληρωματικά αγαθά (complements)***

Παράδειγμα:

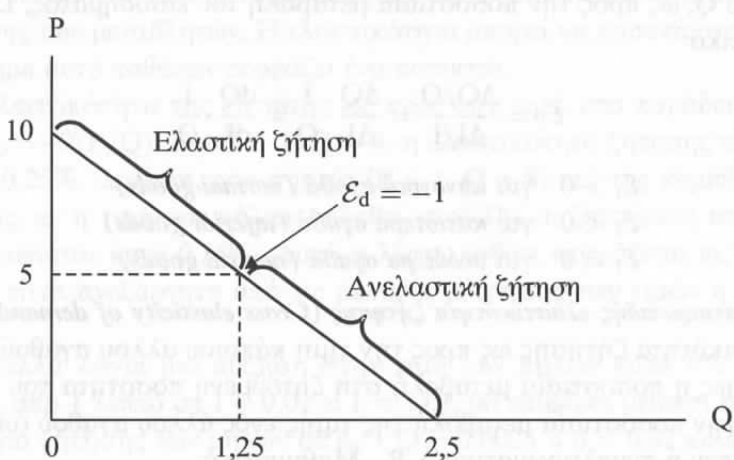
Εστω η συνάρτηση ζήτησης: $P = 10 - 4Q$
Η κλίση της καμπύλης ζήτησης είναι: $dP/dQ = -4$
Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή είναι:

$$\mathcal{E}_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{P}{Q}$$

Από τον τύπο υπολογισμού της ελαστικότητας, αλλά και από το Διάγραμμα 7.9, βλέπουμε ότι η κλίση της ευθείας ζήτησης παραμένει σταθερή σε κάθε σημείο της. Ωστόσο, η ελαστικότητα $\mathcal{E}_d$, μεταβάλλεται κατά μήκος της ευθείας και εξαρτάται από το συνδυασμό των P και Q, στον οποίο βρισκόμαστε. Για παράδειγμα

- Στο σημείο (Q = 2, P = 2) έχουμε $\mathcal{E}_d = -1/4$ (ανελαστική ζήτηση)
- Στο σημείο (Q = 1, P = 6) έχουμε $\mathcal{E}_d = -3/2$ (ελαστική ζήτηση)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.9: *Η συνάρτηση ζήτησης P = 10 – 4Q και η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή*



Σημειωτέον ότι η ελαστικότητα της ζήτησης είναι –1 στο σημείο Q = 5/4, P = 5. Αυτό προκύπτει από τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$-1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{P}{Q} \Rightarrow -1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(10-4Q)}{Q} \Rightarrow Q = \frac{5}{4}$$

Αντικαθιστώντας στην $P = 10 - 4Q$ έχουμε $P(Q = 5/4) = 5$.

Ιδιότητα των λογαριθμικών συναρτήσεων: Σταθερή ελαστικότητα. Αυτό προκύπτει από τα ακόλουθα:

Αν: $\ln Q = a - b\ln P$
τότε: $d\ln Q/d\ln P = -b$
Τώρα: $d\ln Q = dQ/Q$, $d\ln P = dP/P$ (αφού $d\ln x/dx = 1/x$)
Επομένως: $(dQ/dP)(P/Q) = -b$ – δηλαδή η ελαστικότητα είναι σταθερή
όπου: $-b$ είναι η ελαστικότητα του Q ως προς το P.

7.4.4 Ελαστικότητα προσφοράς ως προς την τιμή (elasticity of sypply with respect to price)

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος εκφράζεται μέσω της σχέσης $Q = f(P)$

Η ελαστικότητα της προσφοράς ενός προϊόντος ως προς την τιμή του ορίζεται ως

$$\varepsilon_s = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$$

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση προσφοράς καλαμποκιού δίνεται από τη σχέση $Q^s = 3P^2$, όπου $Q^s \geq 0$, συμβολίζει την ποσότητα καλαμποκιού σε τόνους και το P την τιμή του καλαμποκιού σε ευρώ ανά τόνο.

Η ελαστικότητα της προσφοράς στο σημείο παραγωγής P = 2 (και επομένως Q = 12) είναι:

$$\varepsilon_s = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = 6P\frac{P}{Q}$$

$$\varepsilon_s = (P = 2,\ Q = 12) = 6 \times 2 \times \frac{2}{12} = 2$$

Δηλαδή στο σημείο αυτό της καμπύλης προσφοράς, εάν η τιμή του καλαμποκιού αυξηθεί κατά 1% από 2 σε 2,02, η ποσότητα παραγωγής θα αυξηθεί από 12 τόνους σε 12,24 τόνους.

7.5 Ακρότατα (ή στάσιμα) σημεία συναρτήσεων (Turning points)

Σε πολυώνυμα, το πρόσημο του συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμης μαζί με το βαθμό και τη δομή τους προσδιορίζουν το σχήμα και τη θέση τους. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός πολυώνυμου δευτέρου βαθμού, το πρόσημο του ax^2 προσδιορίζει τη μορφή της γραφικής του παράστασης. Όταν $a > 0$ η παραβολή έχει μορφή δοχείου U, ενώ όταν $a < 0$ η παραβολή έχει μορφή καμπάνας.

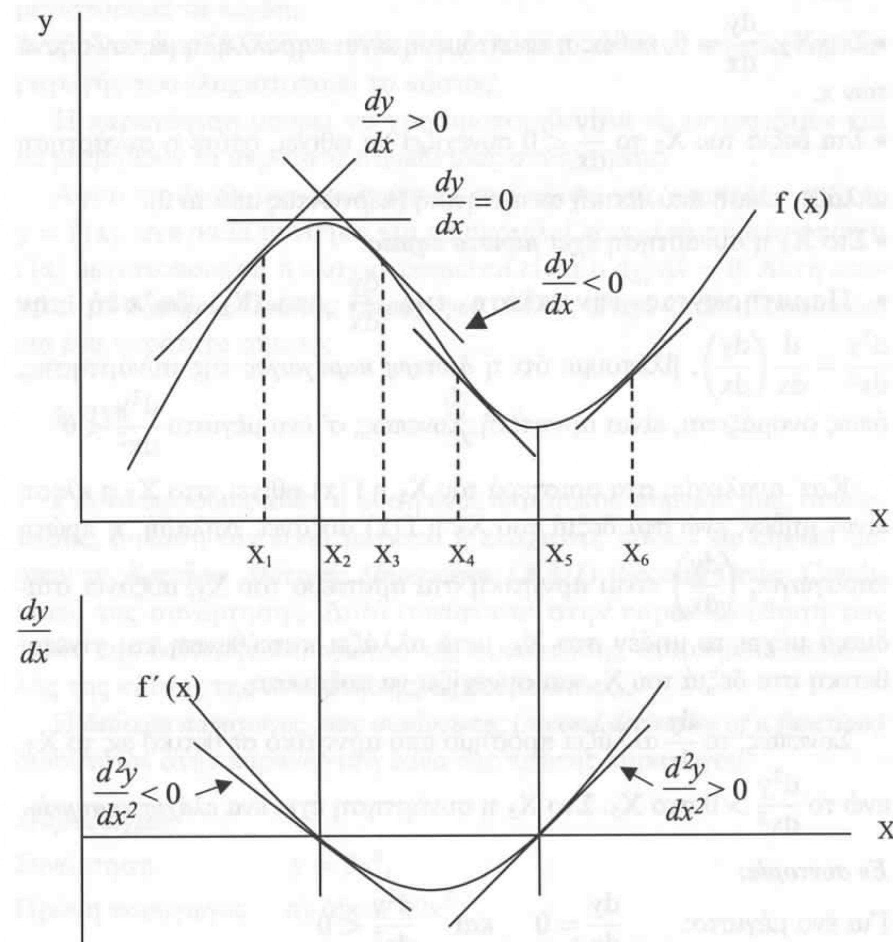
Σε δυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχει μία μόνο αλλαγή στην κατεύθυνση της γραμμής της γραφικής παράστασης. Σε πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού μπορεί να υπάρχουν αρκετές μεταβολές στην κατεύθυνση της γραφικής τους παράστασης. Αλλαγές στην κατεύθυνση μπορεί να είναι ***μέγιστα (maxima)***, ***ελάχιστα (minima)*** ή ***σημεία καμπής (points of inflexion)***.

Μια συνάρτηση λέγεται ότι έχει ***σχετικό ή τοπικό μέγιστο (local maximum)*** σε ένα σημείο της, όταν όλες οι άλλες τιμές της συνάρτησης στην περιοχή του μεγίστου είναι μικρότερες. Ένα ***ολικό ή απόλυτο μέγιστο (global minimum)*** παρατηρείται, όταν όλες οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται χαμηλότερα από το μέγιστο.

Ομοίως, μια συνάρτηση λέγεται ότι έχει ***σχετικό ή τοπικό ελάχιστο (local minimum)***, όταν όλες οι άλλες τιμές της συνάρτησης στην περιοχή του ελαχίστου βρίσκονται πάνω από την τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο. Ένα ***ολικό ή απόλυτο ελάχιστο (global minimum)*** υφίσταται, όταν όλες οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται υψηλότερα από το ελάχιστο.

Ένα πολυώνυμο μπορεί να έχει αρκετές μεταβολές στην κλίση της γραφικής της παράστασης. Για παράδειγμα, στη γραφική παράσταση του πολυώνυμου τρίτου βαθμού που εμφανίζεται στο Διάγραμμα 7.10, βλέπουμε να υπάρχουν πάνω από μία μεταβολές στην κλίση της γραφικής του παράστασης.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.10: *Πολυώνυμο τρίτου βαθμού και οι παράγωγοι της συνάρτησής του*



Η εφαπτομένη της συνάρτησης σ' ένα συγκεκριμένο σημείο αντιπροσωπεύει την κλίση της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο της συνάρτησης δηλώνεται ως $\frac{dy}{dx}$. Συνεπώς, μεταβολές στο $\frac{dy}{dx}$, δείχνουν μεταβολές στην κλίση της συνάρτησης.

• Στα αριστερά του X_1 η συνάρτηση f(x) είναι αύξουσα με $\frac{dy}{dx} > 0$, ενώ το $\frac{dy}{dx}$ φθίνει, καθώς μετακινούμαστε προς το X_2.

• Στο X_2, $\frac{dy}{dx} = 0$, καθώς η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα των x.

• Στα δεξιά του X_2 το $\frac{dy}{dx} < 0$ συνεχίζει να φθίνει, οπότε η συνάρτηση αλλάζει κλίση από θετική σε αρνητική (περνώντας από το 0).

• Στο X_2 η συνάρτηση έχει ***μέγιστο σημείο***.

• Παρατηρώντας την κλίση της $\frac{dy}{dx}$ στο X_2, δηλαδή την $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, βλέπουμε ότι η ***δεύτερη παράγωγος*** της συνάρτησης, όπως ονομάζεται, είναι αρνητική. Συνεπώς, σ' ένα μέγιστο $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Κατ' αναλογία, στα αριστερά του X_5 η f(x) φθίνει, στο X_5 η κλίση είναι μηδέν, ενώ στα δεξιά του X_5 η f(x) αυξάνει. Δηλαδή, η πρώτη παράγωγος $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ είναι αρνητική στα αριστερά του X_5, αυξάνει σταδιακά μέχρι το μηδέν στο X_5, μετά αλλάζει κατεύθυνση και γίνεται θετική στα δεξιά του X_5 και συνεχίζει να αυξάνεται.

Συνεπώς, το $\frac{dy}{dx}$ αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό ως το X_5, ενώ το $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ στο X_5. Στο X_5 η συνάρτηση έχει ένα ***ελάχιστο σημείο***.

Εν συντομία:

Για ένα μέγιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ και $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Για ένα ελάχιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ και $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Η εύρεση των ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Δηλαδή, σε αρκετές περιπτώσεις είναι χρήσιμη η εύρεση της τιμής (ή των τιμών) της ανεξάρτητης μεταβλητής, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της.

Παραδείγματα:

1. Αν Κέρδη = f(παραγωγή), ποιο είναι το σημείο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη;
2. Αν Συνολικά Κόστη = f(παραγωγή), ποιο είναι το σημείο της παραγωγής που ελαχιστοποιεί το κόστος;

Η παραγώγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εντοπιστούν και να μετρηθούν τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης.

Αφού το dy/dx αντιπροσωπεύει την κλίση της εφαπτόμενης της y = f(x), αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί το x_0 ένα σημείο όπου η f(x) μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται είναι η dy/dx = 0. Αυτή αποτελεί το ***Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου, ΚΠΠ***, (First Order Conditions) για ένα ακρότατο σημείο:

ΚΠΠ: $$\frac{dy}{dx} = 0$$

Για να προσδιορισθεί η φύση ενός ακρότατου σημείου μιας συνάρτησης, δηλαδή εάν είναι μέγιστο ή ελάχιστο, πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν το ***Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου (ΚΔΠ)*** (Second Order Conditions) της συνάρτησης. Αυτό συνίσταται στην παρακολούθηση των τιμών της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο μεταβολής της κλίσης της συνάρτησης, ας πούμε στο x_0.

Η ***δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης (second derivative of a function)*** συνίσταται στην παραγώγιση ξανά της πρώτης παραγώγου.

Παράδειγμα:

Συνάρτηση $y = 3x^4$,
Πρώτη παράγωγος $dy/dx = 12x^3$,
Δεύτερη παράγωγος $d(dy/dx)/dx \equiv d^2y/dx^2 = 36x^2$

Σημείο καμπής (Point of inflexion)

Υπάρχει και ένα τρίτου είδους σημείο στη συνάρτηση, το οποίο εξετάζεται στα μαθηματικά. Λέγεται ***σημείο καμπής (point of inflexion)***, και βρίσκεται στο Διάγραμμα 7.10 μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου. Η καμπύλη φθίνει σε όλο το μήκος της συνάρτησης μεταξύ των δύο ακρότατων. Όμως στο σημείο εκείνο η φορά κλίσης της συνάρτησης

αλλάζει από φθίνουσα με ταχείς ρυθμούς σε φθίνουσα με αργούς ρυθμούς. Η εφαπτόμενη της συνάρτησης αριστερά του σημείου καμπής (και δεξιά του μέγιστου) βρίσκεται στο πάνω μέρος της συνάρτησης, ενώ στα δεξιά του σημείου καμπής (και αριστερά του ελάχιστου) εφάπτεται στο κάτω μέρος της συνάρτησης. Στο σημείο καμπής η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν.

Συνοπτικά, τα κριτήρια για τον προσδιορισμό των ακρότατων σημείων συναρτήσεων είναι:

	ΚΠΠ		ΚΔΠ
Μέγιστο:	$\frac{dy}{dx} = 0$	και	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
Ελάχιστο:	$\frac{dy}{dx} = 0$	και	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$
Σημείο Καμπής:			$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Παραδείγματα:

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = 7x^2 - 2x + 1$

ΚΠΠ: $\frac{dy}{dx} = 14x - 2 = 0$

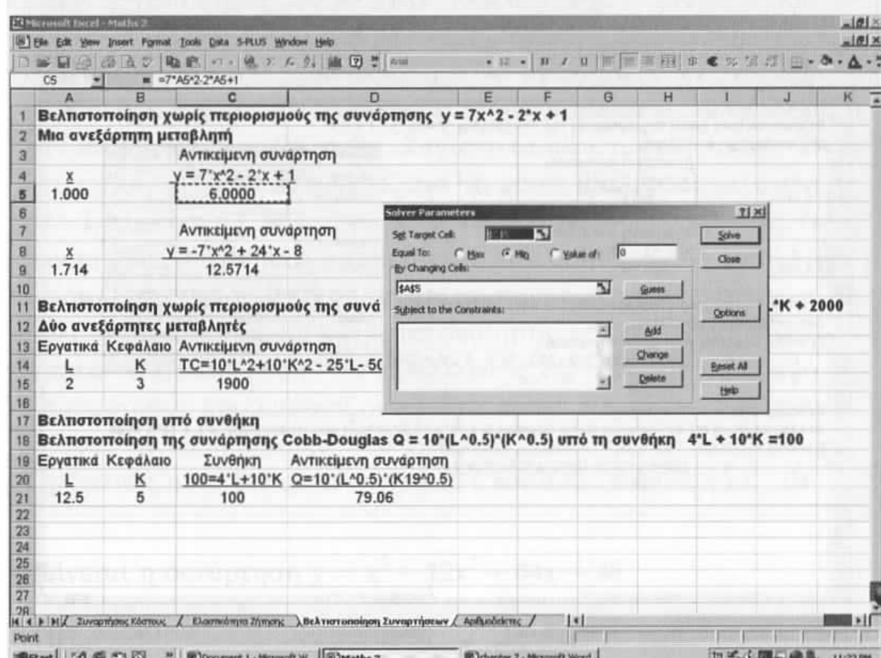
Επομένως, υπάρχει ένα ακρότατο σημείο στο $x = \frac{1}{7} = 0{,}1429$

ΚΔΠ: $\frac{d^2y}{dx^2} = 14 > 0$

Επομένως, το ακρότατο σημείο είναι ελάχιστο.
Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι:

$$y = 7 \times 0{,}1429^2 - 2 \times 0{,}1429 + 1 = 0{,}857$$

ΓΡΑΦΗΜΑ 7.3: ***Βελτιστοποίηση συναρτήσεων στο Excel μέσω του solver***



Το ***Excel*** παρέχει τη δυνατότητα βελτιστοποίησης συναρτήσεων μέσω του Solver, υπό την επιλογή Tools. Για το παράδειγμα που είδαμε, η εξίσωση της αντικείμενης συνάρτησης προς βελτιστοποίηση εισέρχεται σε κάποιο άδειο κελί του φύλλου εργασίας του Excel, ας πούμε στο c5. Αυτό φαίνεται στο Γράφημα 7.3. Καθώς η συνάρτηση είναι της μορφής $y = f(x)$, με μια ανεξάρτητη μεταβλητή ορίζεται ένα άδειο κελί, το οποίο δέχεται τις τιμές της μεταβλητής x, ας πούμε το κελί a5. Μια οποιαδήποτε τιμή μπορεί να εισαχθεί σ' αυτό το κελί, ας πούμε η τιμή 1. Έτσι, στο κελί c5 εισάγεται η εξίσωση της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση, η οποία χρησιμοποιεί την τιμή εισόδου $x = 1$ και η οποία παράγει την τιμή εξόδου της συνάρτησης, $y = 6$. Το ερώτημα σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι: Ποια τιμή του x ελαχιστοποιεί την τιμή της συνάρτησης y; Επιλέγοντας τον Solver εμφανίζεται το κουτί διαλόγου του Γραφήματος 7.3. Το «target cell» (δηλαδή η αντικείμενη συνάρτηση προς

ΓΡΑΦΗΜΑ 7.4: ***Βελτιστοποίηση συναρτήσεων στο Excel μέσω του solver***

Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς της συνάρτησης y = 7x^2 - 2*x + 1
Μια ανεξάρτητη μεταβλητή
x | Αντικείμενη συνάρτηση y = 7*x^2 - 2*x + 1
0.143 | 0.8571
x | Αντικείμενη συνάρτηση y = -7*x^2 + 24*x - 8
1.714 | 12.5714
Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς της συνάρτησης κόστους
Δύο ανεξάρτητες μεταβλητές
Εργατικά L | Κεφάλαιο K | Αντικείμενη συνάρτηση TC=10*L^2+10*K^2 - 25*L- 50*K - 5*L*K + 2000
2 | 3 | 1900
Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη
Βελτιστοποίηση της συνάρτησης Cobb-Douglas Q = 10*(L^0.5)*(K^0.5) υπό τη συνθήκη 4*L + 10*K =100
Εργατικά L | Κεφάλαιο K | Συνθήκη 100=4*L+10*K | Αντικείμενη συνάρτηση Q=10*(L^0.5)*(K^0.5)
12.5 | 5 | 100 | 79.06
Solver Options

ελαχιστοποίηση) ορίζεται ως το κελί C5, ενώ στην επιλογή «By Changing Cells» (δηλαδή οι τιμές εισόδου) ορίζονται τα δεδομένα του κελιού A5. Επιλέγοντας το Solve στο κουτί διαλόγου δίνεται η λύση x = 0.143 στο κελί a5. Η τιμή της αντικείμενης συνάρτησης υπολογίζεται επίσης από το Excel στο κελί c5 για τη δεδομένη λύση του x. Αυτή είναι y = 0.8571. Και οι δύο αυτές λύσεις εμφανίζονται στο Γράφημα 7.4.

Χρησιμοποιούνται ***μη γραμμικές μέθοδοι προσέγγισης (non-linear iterative methods)*** από το Excel για τη λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν μια σειρά διαδοχικών προσεγγίσεων, ξεκινώντας από μια αρχική τιμή, έως ότου βρεθεί η λύση. Δηλαδή, έως ότου υπολογιστεί η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία βελτιστοποιεί τη συνάρτηση. Γραφικά μετακινούμαστε με μικρά βήματα κατά μήκος της καμπύλης της συνάρτησης, μέχρι να φτάσουμε στο μέγιστο ή στο ελάχιστο. Η διαδικασία μπορεί να ολοκληρωθεί με λίγα ή πάρα πολλά βήματα, ή και καθόλου, ανάλογα με το πόσο πολύπλοκη είναι η συνάρτηση προς βελτιστο-

ποίηση. Μια σειρά από επιλογές (options) εμφανίζονται στο κουτί διαλόγου, οι οποίες μας επιτρέπουν να «βοηθήσουμε» τον Η/Υ στην εύρεση λύσης, όταν η συνάρτηση δεν είναι τόσο απλή όσο αυτή του παραδείγματος. Για παράδειγμα, η επιλογή Max και Min καθορίζει εάν θα μεγιστοποιηθεί ή θα ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση. Όταν επιλεχθεί το Options, εμφανίζεται το κουτί διαλόγου που φαίνεται στο Γράφημα 7.4. Μας επιτρέπει να μεταβάλουμε επιλογές, όπως τον αριθμό των βημάτων (iterations), την ακρίβεια της λύσης (precision) (πόσο «κοντά» στο ακρότατο σημείο είναι η λύση), κλπ. Σε πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης πολλές φορές είναι δύσκολο να βρεθεί λύση. Μεταβάλλοντας τις τιμές κάποιων από τις παραμέτρους που εμφανίζονται στο κουτί διαλόγου των options, μπορεί να «βοηθήσουμε» το Excel να βρει λύση στο πρόβλημα. Προφανώς αυτό δεν είναι αναγκαίο στο παρόν παράδειγμα.

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$

ΚΠΠ: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 24x + 44 = 0$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς x βρίσκουμε δυο ακρότατα:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 3 \times 44}}{6}$$

Επομένως, $x_1 = 2{,}85$ και $x_2 = 5{,}15$

Οι αντίστοιχες τιμές του y μπορούν να βρεθούν αντικαθιστώντας τις λύσεις των x_1 και x_2 στην αρχική συνάρτηση, η οποία δίνει τιμές $y_1 = 3{,}08$, $y_2 = -3{,}08$

Επομένως, οι συνισταμένες των δύο ακρότατων είναι: (2,85, 3,08) και (5,15, – 3,08)

Για τον προσδιορισμό της φύσης των ακρότατων σημείων χρειάζεται το ΚΔΠ:

ΚΠΠ: $\frac{d^2y}{dx^2} \equiv f''(x) = 6x - 24$

Για $x = 2{,}85$, $f''(x) = -6{,}9 < 0$

Επομένως το σημείο αυτό είναι μέγιστο.

Για $x = 5{,}15$, $f''(x) = 6{,}9 > 0$

Επομένως το σημείο αυτό είναι ελάχιστο.

7.5.1 Οικονομικές και άλλες εφαρμογές

7.5.1.1 Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται αύξουσα σε ένα σημείο της, όπως στο x_1 ή στο x_6 στο Διάγραμμα 7.10 όταν η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι θετική, $\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) > 0$. Επομένως, όταν ο ρυθμός μεταβολής του y σε σχέση με μεταβολές στο x αυξάνεται, η συνάρτηση είναι αύξουσα. Στο Διάγραμμα 7.10, στα σημεία x_3 και x_4 η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική $\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) < 0$ ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς μεταβολές στην x φθίνει. Στα σημεία αυτά η συνάρτηση $f(x)$ είναι φθίνουσα. Επομένως, εξετάζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης σε ένα σημείο της, μπορούμε να κρίνουμε εάν η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο σημειό αυτό θα είναι $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί εάν η συνάρτηση $y = 3x^2 + 2x - 1$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα στα σημεία $x = -2,\ 0, 3$

Πρώτη παράγωγος: $f'(x) = 6x + 2$

$$f'(x = -2) = -10 < 0, \text{ φθίνουσα}$$

$$f'(x = 0) = 2 > 0, \text{ αύξουσα}$$

$$f'(x = 3) = 21 > 0, \text{ αύξουσα}$$

7.5.1.2 Κυρτότητα συναρτήσεων, ακρότατα και σημεία καμπής

Κοίλες (concave down) και κυρτές (convex) συναρτήσεις εξετάστηκαν για πρώτη φορά στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Οι έννοιες αυτές μπορούν να οριστούν πιο επίσημα εξετάζοντας τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων. Έτσι, μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **κοίλη (concave down)** σε ένα σημείο της όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από την εφαπτόμενη της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Για παράδειγμα, στο Διάγραμμα 7.10, στα σημεία x_1, x_2 και x_3 της συνάρτησης $f(x)$, η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία. Επομένως, η συνάρτηση στα σημεία αυτά είναι κοίλη. Σε κάθε περίπτωση η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης, όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του διαγράμματος 7.10, είναι αρνητική, $f''(x) < 0$. Εάν στο σημείο που εξετάζεται και η πρώτη παράγωγος είναι 0, $f'(x) = 0$, όπως στο σημείο x_2, η συνάρτηση έχει μέγιστο.

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **κυρτή (convex)** σε ένα σημείο της όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Έτσι, στο Διάγραμμα 7.10, στα σημεία x_4, x_5 και x_6 της συνάρτησης $f(x)$, η συνάρτηση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε κάθε ένα από τα σημεία αυτά. Σε κάθε περίπτωση η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι θετική, $f''(x) > 0$ Εάν στο σημείο που εξετάζεται και η πρώτη παράγωγος ισούται με μηδέν, $f'(x) = 0$, όπως στο σημείο x_5, η συνάρτηση έχει ελάχιστο.

Εάν μια συνάρτηση έχει $f''(x) > 0$ σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, η συνάρτηση είναι **γνήσια κυρτή (strictly convex)**. Στο Διάγραμμα 7.10 η συνάρτηση είναι **τοπικά κυρτή** στο σημείο x_5, όμως δεν είναι γνήσια κυρτή αφού υπάρχουν κάποια σημεία της $f(x)$ που βρίσκονται κάτω από το $f(x_5)$. Επίσης, η τριτοβάθμια συνάρτηση του διαγράμματος 7.10 δεν είναι γνήσια κοίλη (strictly concave down), καθόσον ενώ η $f''(x) < 0$ γύρω από το σημείο x_2 για παράδειγμα, υπάρχουν άλλα σημεία της $f(x)$ που βρίσκονται πάνω από το $f(x_2)$.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς της κυρτότητας της συνάρτησης βλέπουμε ότι σε ένα μέγιστο η συνάρτηση είναι κοίλη, ενώ σε ένα ελάχιστο η συνάρτηση είναι κυρτή.

Σημείο καμπής (inflexion point) υπάρχει στη συνάρτηση όταν αυτή μεταβάλλεται από κοίλη σε κυρτή ή αντίστροφα.

Για παράδειγμα, στο Διάγραμμα 7.10, μεταξύ των σημείων x_3 και x_4 η συνάρτηση αλλάζει ροπή και από κοίλη γίνεται κυρτή – στο x_3 η εφαπτομένη είναι πάνω από την $f(x)$, ενώ στο x_4 η εφαπτομένη είναι κάτω από τη συνάρτηση. Δηλαδή, η συνάρτηση τέμνει την εφαπτομένη της καθώς μεταβάλλεται από κοίλη σε κυρτή. Στο σημείο καμπής $f''(x) = 0$ ή δεν ορίζεται. Η $f'(x)$ στο σημείο καμπής μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν.

Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον γρήγορο σχεδιασμό συναρτήσεων. Προς το σκοπό αυτό μπορούν να: 1) προσδιοριστούν τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης, όπου $f'(x) = 0$, 2) να οριστεί η καμπυλότητα της συνάρτησης στα ακρότατα σημεία της εξετάζοντας τη δεύτερη παράγωγό της $f''(x)$, όπου $f''(x) > 0$ για ελάχιστο και $f''(x) < 0$ για μέγιστο, 3) ελεγχθεί η συνάρτηση για σημεία καμπής, όπου $f''(x) = 0$ και η μεταβολή της κυρτότητάς της από κοίλη σε κυρτή ή αντιστρόφως.

7.5.1.3 Σειρές του Taylor και του Maclaurin

Σημειογραφία:

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$,

1η Παράγωγος: $\dfrac{dy}{dx} \equiv \dfrac{d\{f(x)\}}{dx} \equiv f^{(1)}(x)$

2η Παράγωγος: $\dfrac{d^2y}{dx^2} \equiv \dfrac{d\{f^{(1)}(x)\}}{dx} \equiv f^{(2)}(x)$

3η Παράγωγος: $\dfrac{d^3y}{dx^3} \equiv \dfrac{d\{f^{(2)}(x)\}}{dx} \equiv f^{(3)}(x)$

κ.λπ.

7.5.1.3.1 Σειρές του Taylor

Μια συνάρτηση $f(\underline{x})$ μπορεί να προσεγγιστεί σε κάποιο σημείο, x_0, από την ακόλουθη παράσταση:

$$f(\underline{x}) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \text{Υπόλοιπο}$$

όπου $f(x_0)$ είναι η τιμή της $f(x)$ στο σημείο x_0 και το n! αναφέρεται στο ***n παραγοντικό (n factorial)***.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η τιμή του ln(1,5) με ανάπτυγμα Taylor 5 όρων γύρω από το σημείο 1.

$f(x) = \ln(x)$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4$$

Για $x = 1{,}5$ και $x_0 = 1$ λαμβάνουμε:

$$\ln(1{,}5) = \ln(1) + 1\frac{1}{1}(0{,}5) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1}\right)(0{,}5)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{1}\right)(0{,}5)^3$$

$$+ \frac{1}{24}\left(-\frac{6}{1}\right)(0{,}5)^4 = 0 + 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156$$

$$= 0{,}4010$$

7.5.1.3.2 Σειρές του Maclaurin

Μια ειδική περίπτωση των σειρών Taylor υφίσταται όταν $x_0 = 0$, όπου

$$f(\underline{x}) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \text{Υπόλοιπο}$$

Παραδείγματα ανάπτυξης σειρών Maclaurin

1. Έστω $f(x) = (1 + x)^3$

Γνωρίζουμε (με ανάπτυξη) ότι $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

Χρησιμοποιήστε τις σειρές του MacLaurin για να το αποδείξετε.

$f(x) = (1 + x)^3$ $\quad f(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = 3(1 + x)^2$ $\quad f^{(1)}(0) = 3$

$f^{(2)}(x) = 6(1 + x)$ $\quad f^{(2)}(0) = 6$

$f^{(3)}(x) = 6$ $\quad f^{(3)}(0) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

$$f(x) = 1 + 3x + \frac{1}{2!}6x^2 + \frac{1}{3!}6x^3$$

Συνεπώς: $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

2. Έστω $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$$
$$f^{(1)}(x) = e^x \qquad f^{(1)}(0) = e^0 = 1$$
$$f^{(2)}(x) = e^x \qquad f^{(2)}(0) = e^0 = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Επόμενως: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Οι σειρές Taylor και Maclaurin είναι χρήσιμες στην απλοποίηση πολύπλοκων, μη γραμμικών, συναρτήσεων σε γραμμικές. Πολλές φορές η πολυπλοκότητα των μη γραμμικών συναρτήσεων καθιστά αδύνατη την εκτίμησή τους. Η λύση του προβλήματος καθίσταται εφικτή με τη χρησιμοποίηση των σειρών αυτών.

7.5.1.4 Νεοκλασσικό πρόβλημα της επιχείρησης – Μεγιστοποίηση του κέρδους

Στα νεοκλασικά οικονομικά γίνεται η υπόθεση ότι ο αντικειμενικός στόχος μιας επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των κερδών (Π), όπου τα κέρδη ορίζονται ως η διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων (TR) και συνολικού κόστους (TC).

Παραδείγματα:

1. Έστω οι συναρτήσεις TR και TC μιας επιχείρησης,

$$TR = 40x - 8x^2 \quad \text{και} \quad TC = 8 + 16x - x^2$$

Η συνάρτηση κερδών της είναι:

$$\Pi = TR - TC = -8 + 24x - 7x^2$$

Για να βρεθεί αν υπάρχει ακρότατο σημείο στη συνάρτηση, βρίσκουμε το ΚΠΠ:

$$d\Pi/dx = -14x + 24 = 0. \text{ Επομένως, } x = 1{,}714$$

Για να επαληθεύσουμε ότι είναι μέγιστο, εξετάζουμε αν ικανοποιείται το ΚΔΠ:

$$d^2\Pi/dx^2 = -14 < 0$$

Επομένως, το ακρότατο (ή στάσιμο) σημείο καμπής είναι μέγιστο. Το επίπεδο κερδών για $x = 1{,}714$ είναι $\Pi = 12{,}571$

Η λύση αυτή επιβεβαιώνεται με τη χρήση του Excel όπως φαίνεται και στο γράφημα 7.4. Συγκεκριμένα, στο κελί C9 υπάρχει ο τύπος της αντικείμενης συνάρτησης του κέρδους που εμφανίζεται στο κελί C8, ενώ στο κελί A9 ο Η/Υ, μέσω του Solver, έχει υπολογίσει ότι υπάρχει ακρότατο στο σημείο $x = 1{,}714$ και ότι στο σημείο αυτό η τιμή της αντικείμενης συνάρτησης (δηλαδή του κέρδους) είναι 12,571.

2. Εάν ο αντικειμενικός στόχος της παραπάνω επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων, σε ποιο σημείο παραγωγής επιτυγχάνεται αυτό;

Απάντηση:

ΚΠΠ: $d(TR)/dx = 40 - 16x = 0$

Επομένως, $x = 2{,}5$, *και* $\Pi = 8{,}25$. *Δηλαδή τα κέρδη σε αυτό το σημείο παραγωγής είναι μικρότερα από αυτά που αποκομίζονται όταν ο στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των κερδών που βρήκαμε προηγουμένως (δηλαδή των 12,571).*

3. Γενικά, μια συνάρτηση κερδών προσδιορίζεται ως

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) \Leftrightarrow \Pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

Το ΚΠΠ για τη μεγιστοποίηση των κερδών δίνει

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow TR'(q) - TC'(q) = 0$$

Ισοδύναμα, $TR'(q) = TC'(q)$

Δηλαδή, τα κέρδη μεγιστοποιούνται, όταν

Οριακό Έσοδο = Οριακό Κόστος

Δηλαδή, όταν MR > MC συμφέρει η παραγωγή και πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος, αφού η συνεισφορά της στα συνολικά έσοδα (TR), είναι μεγαλύτερη από απ' ότι στο συνολικό κόστος (TC). Όταν MR < MC η παραγωγή και πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος θα αυξήσει το TC περισσότερο απ' ότι το TR. Το βέλτιστο

σημείο παραγωγής είναι αυτό, στο οποίο η οριακή συνεισφορά στα έσοδα και το κόστος είναι: MR = MC. Όπως δείξαμε και παραπάνω, αυτό είναι το σημείο όπου μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Η συνθήκη δεύτερης τάξης για τη μεγιστοποίηση των κερδών είναι:

ΚΔΠ: $\Pi'' = TR''(q) - TC''(q) < 0$. Δηλαδή, $TR''(q) < TC''(q)$

4. Στα μέρη 4.10.3 (ανάλυση νεκρού σημείου) και 4.10.4 (μη γραμμική ανάλυση νεκρού σημείου) του βιβλίου παρουσιάστηκαν δύο παραδείγματα ανάλυσης νεκρού σημείου, μιας αεροπορικής εταιρείας και ενός εργοστασίου αυτοκινήτων. Στην περίπτωση της αεροπορικής εταιρείας η συνάρτηση κερδών περιγράφηκε από τη σχέση $\Pi(x) = -800.000 + 20x$, όπου x είναι τα αεροπορικά μίλια που διένυσε το αεροπλάνο. Στην περίπτωση του εργοστασίου παραγωγής αυτοκινήτων η συνάρτηση των κερδών περιγράφηκε από την εξίσωση $\Pi(x) = -1{,}5x^2 + 80x - 500$, όπου x συμβολίζει χιλιάδες μονάδες αυτοκινήτων. Για ποιές τιμές του x μεγιστοποιούνται τα κέρδη σε κάθε περίπτωση;

Απαντήσεις:

Συνάρτηση κερδών για την αεροπορική εταιρεία: $\Pi(x) = -800.000 + 20x$

ΚΠΠ: $\Pi'(x) = 0$: $\Pi'(x) = 20 = 0$ Δεν υπάρχει λύση (μέγιστο)

Είναι λογικό αφού η συνάρτηση κέρδους είναι γραμμική - ευθεία γραμμή.

Συνάρτηση κερδών για το εργοστάσιο παραγωγής αυτοκινήτων

$\Pi(x) = -1{,}5x^2 + 80x - 500$, πρόκειται για δευτεροβάθμια εξίσωση.

ΚΠΠ: $\Pi'(x) = 0 : \Pi'(x) = -3x + 80 = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} = 26{,}667$

ΚΔΠ: $\Pi''(x) = -3 < 0$, επομένως πρόκειται για μέγιστο.

Στο σημείο όπου μεγιστοποιούνται τα κέρδη, δηλαδή για $x = 26{,}667$ χιλιάδες μονάδες αυτοκινήτων τα κέρδη είναι $\Pi(x = 26{,}667) = 566{,}67$ νομισματικές μονάδες.

7.5.1.5 Διοίκηση Αποθεμάτων (Inventory Management)

Το κόστος αποθεμάτων είναι ένας συνδυασμός του κόστους αγοράς, κατοχής και συντήρησης αποθεμάτων. Αυτά ποικίλουν ανάλογα με το μέγεθος της παραγγελίας. Ένας λιανικός έμπορος ποδηλάτων εξέτασε τα ιστορικά στοιχεία της επιχείρησης και εκτίμησε την ακόλουθη συνάρτηση ετησίου κόστους αποθεμάτων σε ευρώ (C), ως συνάρτηση του μεγέθους της παραγγελίας (του αριθμό των ποδηλάτων), q.

$$C = 4.860q^{-1} + 15q + 750.000$$

Το μέγεθος της παραγγελίας που ελαχιστοποιεί τα ετήσια κόστη αποθεμάτων μπορεί να βρεθεί βελτιστοποιώντας την ανωτέρω συνάρτηση ως προς q.

ΚΠΠ: $C' = -4.860q^{-2} + 15 = 0$

$q^2 = 324$

$q = \pm 18$

Το ακρότατο σημείο βρίσκεται στο q = 18 ποδήλατα.

ΚΠΠ: $C'' = 9.720q^{-3}$

$C''(18) = 1{,}67 > 0$

Επομένως, το ακρότατο σημείο είναι ελάχιστο.

Συνεπώς, το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας που ελαχιστοποιεί τα ετήσια κόστη αποθεμάτων είναι 18 ποδήλατα.

Το ελάχιστο κόστος βρίσκεται στο C(18) = € 750.540

7.5.1.6 Τιμολόγηση προϊόντος σε διαφοροποιημένες αγορές

Εργοστάσιο παραγωγής διαχωρίζει μεταξύ εγχώριας και εξαγωγικής αγοράς για το προϊόν που παράγει. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ζήτηση στην κάθε αγορά (εγχώρια και ξένη) και το συνολικό κόστος παραγωγής είναι αντίστοιχα:

$$Q_1 = 200 - 0{,}5p_1$$

$$Q_2 = 500 - 2p_2$$

$$TC = 20.000 + 100Q, \quad \text{όπου } Q = Q_1 + Q_1$$

Για μεγιστοποίηση των κερδών, ο παραγωγός θέτει τις τιμές p_1 και p_2 στα σημεία όπου MR = MC σε κάθε αγορά, όπου $MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 100$.

Έτσι, στην εγχώρια αγορά $p_1 = 400 - 2Q_1$

$$TR_1 = p_1Q_1 = 400Q_1 - 2Q_1^2$$

$$MR_1 = \frac{d(TR_1)}{dQ_1} = 400 - 4Q_1$$

Για μεγιστοποίηση των κερδών $MR_1 = MC$

$$-4Q_1 + 400 = 100 \Leftrightarrow Q_1 = 75$$

Επίσης:

$$p_1 = 400 - 2Q_1 = 400 - 150 = 250$$

$$TR_1 = p_1 \times Q_1 = 250 \times 75 = 18.750$$

Στην αγορά εξαγωγών: $Q_2 = 500 - 2p_2 \Rightarrow p_2 = 250 - \frac{1}{2}Q_2$

$$TR_2 = p_2Q_2 = 250Q_2 - \frac{1}{2}Q_2^2$$

$$MR_2 = 250 - Q_2$$

$$MR_2 = MC : 250 - Q_2 = 100 \Leftrightarrow Q_2 = 150$$

$$P_2 = 250 - \frac{1}{2}Q_2 = 250 - 75 = 175$$

$$TR_2 = p_2 \times Q_2 = 175 \times 150 = 26.250$$

Η τιμή η οποία χρεώνεται στην ξένη αγορά για το ίδιο προϊόν είναι χαμηλότερη ($p_2 = 175$). Οικονομικά αυτό δικαιολογείται από την υψηλότερη ελαστικότητα ζήτησης που επικρατεί στην ξένη αγορά σε σχέση με την εγχώρια. Η συνολική ποσότητα που παράγεται και πωλείται είναι $Q = 225$. Τα συνολικά έσοδα, συνολικό κόστος και κέρδη είναι:

$$TR = TR_1 + TR_2 = 18.750 + 26.250 = 45.000,$$

$$TC = 20.000 + 100(75 + 150) = 42.500 \quad \text{και}$$

$$\Pi = TR - TC = 45.000 - 42.500 = 2.500$$

Σε περίπτωση που ο παραγωγός επιλέξει να χρεώσει την ίδια τιμή και στις δύο αγορές $p_1 = p_2 = p$ και κατά συνέπεια

$$Q = Q_1 + Q_2 = 200 - 0,5p + 500 - 2p = 700 - 2,5p$$

Επομένως

$$p = 280 - 0,4Q$$

$$TR = pQ = 280Q - 0,4Q^2$$

$$MR = 280 - 0,8Q$$

$$MR = MC : 280 - 0,8Q = 100 \Rightarrow Q = 225$$

$$p = 280 - 0,4 \times 225 = 190$$

$$TR = p \times Q = 190 \times 225 = 42.750$$

$$TC = 20.000 + 100 \times 225 = 42.500$$

$$\Pi = TR - TC = 42.750 - 42.500 = 250$$

Από τα $Q = 225$ $\quad Q_1 = 200 - 0,5p = 105$ πωλούνται στην εγχώρια αγορά και $Q_2 = 500 - 2p = 120$ στην ξένη αγορά.

Επομένως, η ίδια ποσότητα προϊόντος ($Q = 225$) πωλείται με ή χωρίς διαφοροποίηση της τιμής μεταξύ εγχώριας και ξένης αγοράς. Όμως τα κέρδη όταν η τιμή διαφοροποιείται είναι 2.500, ενώ χωρίς διαχωρισμό των αγορών τα κέρδη είναι 250.

7.5.1.7 Ποσότητα Οικονομικής Παραγγελίας

Η Θεωρία του Baumol (1952) για τη ζήτηση χρήματος έχει ως εξής:

Ιδιώτης χρειάζεται ένα ποσό K για τις συναλλαγές του σε χρονική περίοδο ενός μήνα. Για τις μηνιαίες συναλλαγές του αποσύρει από τον τραπεζικό του λογαριασμό ποσά χρημάτων Q ευρώ κάθε φορά, καταβάλλοντας μια προμήθεια c ευρώ σε κάθε περίπτωση.

Επομένως το *κόστος συναλλαγών* είναι $ΚΣ = c\left(\frac{K}{Q}\right)$, όπου $\frac{K}{Q}$ είναι ο μέσος αριθμός των αναλήψεων από το λογαριασμό του.

Το *ευκαιριακό κόστος* (δηλαδή το εισόδημα που χάνει διατηρώντας το ποσό Q σε ρευστό) είναι $ΕΚ = r\frac{Q}{2}$, όπου r είναι το επιτόκιο που επικρατεί στην αγορά και $\frac{Q}{2}$ είναι το μέσο ύψος των ρευστών κάθε περιόδου ανάληψης. Το συνολικό κόστος από τη διατήρηση ρευστών

δίνεται από το άθροισμα του κόστους συναλλαγών και του κόστους ευκαιρίας, δηλαδή $ΣΚ = c\frac{K}{Q} + r\frac{Q}{2}$.

1) Στο ίδιο γράφημα να σχεδιαστεί:

a) Το κόστος συναλλαγών ως συνάρτηση της ποσότητας των χρημάτων Q.

b) Το ευκαιριακό κόστος διατήρησης του ποσού Q σε ρευστό.

c) Το συνολικό κόστος διατήρησης του ποσού Q σε ρευστό.

d) Τι είδους συνάρτηση περιγράφει την κάθε μια σχέση;

e) Να περιγραφεί πώς μεταβάλλεται το κόστος σε σχέση με τις παραμέτρους που το επηρεάζουν.

2) Να υπολογιστεί το σημείο Q στο οποίο το κόστος συναλλαγών ισούται με το ευκαιριακό κόστος διατήρησης του ποσού Q σε ρευστό. Ποιο είναι το κόστος συναλλαγών και διατήρησης στο σημείο αυτό;

3) Να υπολογιστεί το σημείο οικονομικής παραγγελίας Q^*, δηλαδή το σημείο στο οποίο το συνολικό κόστος διατήρησης των ρευστών είναι ελάχιστο, και να συγκριθεί με το σημείο Q όπου το ΚΣ ισούται με το ΕΚ.

4) Για τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων K = 1000 €, Q = 100 €, c = 0,2 €, r = 10%, να υπολογιστούν:

a) Ο μέσος αριθμός αναλήψεων το μήνα.

b) Το κόστος συναλλαγών για αυτόν τον αριθμό αναλήψεων.

c) Το μέσος ύψος των ρευστών ανά περίοδο ανάληψης.

d) Το ευκαιριακό κόστος διακράτησης του ποσού Q.

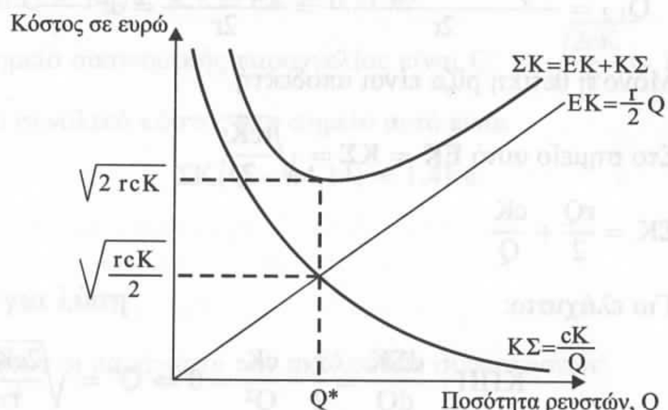
e) Το συνολικό κόστος διατήρησης των ρευστών.

f) Η ποσότητα Q για την οποία ΚΣ = ΕΚ και το ύψος των ΚΣ και ΕΚ στο σημείο αυτό.

g) Το σημείο οικονομικής παραγγελίας και το συνολικό κόστος διακράτησης χρήματος (ρευστών).

Λύση

1 a,b,c) **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7.11:** ***Ποσότητα οικονομικής παραγγελίας***



d) Η συνάρτηση ΣΚ είναι δυναμική (δευτέρου βαθμού), η συνάρτηση ΕΚ είναι γραμμική, ενώ η συνάρτηση ΚΣ είναι συνάρτηση υπερβολής.

e) Το κόστος ευκαιρίας (ΕΚ) αυξάνεται γραμμικά με το κόστος κεφαλαίου (r) και με το ποσό που αποσύρεται κάθε φορά από τον τραπεζικό λογαριασμό (Q). Το κόστος συναλλαγών (ΚΣ) είναι ανάλογο της προμήθειας που καταβάλλεται σε κάθε συναλλαγή (c), ανάλογο του ποσού K που απαιτείται στη χρονική περίοδο του μήνα και αντιστρόφως ανάλογο του ποσού της ανάληψης (Q). Το συνολικό κόστος (ΣΚ) αρχικά μειώνεται, καθώς το κόστος συναλλαγών (ΚΣ) μειώνεται με ταχύτερους ρυθμούς σε σχέση με την αύξηση του κόστους ευκαιρίας (ΕΚ), μέχρι το σημείο Q^*. Δεξιά της ποσότητας παραγγελίας Q^* το κόστος ευκαιρίας αυξάνεται με πολύ ταχύτερους ρυθμούς σε σχέση με τη μείωση του κόστους συναλλαγών και ως συνέπεια συμπαρασύρει το συνολικό κόστος προς τα πάνω.

2) $ΕΚ = \frac{r}{2}Q$,

$$ΚΣ = \frac{cK}{Q}$$

$$ΕΚ = ΚΣ \Rightarrow \frac{r}{2}Q = \frac{cK}{Q} \Rightarrow rQ^2 = 2cK \Rightarrow rQ^2 - 2cK = 0$$

Ρίζες της εξίσωσης

$$Q_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot r \cdot (-2cK)}}{2r} = \frac{\pm 2\sqrt{2rcK}}{2r} = \pm\frac{\sqrt{2rcK}}{r} = \pm\sqrt{\frac{2cK}{r}}$$

Μόνο η θετική ρίζα είναι αποδεκτή.

Στο σημείο αυτό $EK = K\Sigma = \sqrt{\frac{rcK}{2}}$.

3) $\Sigma K = \frac{rQ}{2} + \frac{cK}{Q}$

Για ελάχιστο:

$$K\Pi\Pi: \frac{d\Sigma K}{dQ} = \frac{r}{2} - \frac{cK}{Q^2} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2cK}{r}}$$

$$K\Delta\Pi: \frac{d^2\Sigma K}{dQ^2} = \frac{2cK}{Q^3} > 0$$

αφού c, K και Q είναι θετικές ποσότητες, έχουμε ελάχιστο.
Στο ελάχιστο

$$\Sigma K^* = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{2cK}{r}} + \frac{cK}{\sqrt{\frac{2cK}{r}}} = \sqrt{\frac{rcK}{2}} + \sqrt{\frac{rcK}{2}} = \sqrt{2rcK}$$

Επομένως, στο σημείο οικονομικής παραγγελίας ρευστών, το συνολικό κόστος διακράτησής τους είναι $\sqrt{2rcK}$ ευρώ.

4) a) Μέσος αριθμός αναλήψεων είναι: $\frac{K}{Q} = \frac{1.000}{100} = 10$

b) $K\Sigma = c\left(\frac{K}{Q}\right) = 0,2 \times 10 = €20$

c) Μέσος ύψος ρευστών ανά περίοδο ανάληψης $\frac{Q}{2} = \frac{100}{2} = €50$

d) Ευκαιριακό κόστος διακράτησης του ποσού Q

$$EK = r\frac{Q}{2} = 0,1 \times \frac{100}{2} = €5$$

e) Όταν $\Sigma K = K\Sigma + EK = €20 + €5 = €25$.

f) Όταν $K\Sigma = EK$, $Q = \sqrt{\frac{2cK}{r}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,2 \times 1.000}{0,1}} = 14,14$.

Για $Q = 14,14$, $K\Sigma = EK = 0,71$ €.

g) Το σημείο οικονομικής παραγγελίας είναι $Q^* = \sqrt{\frac{2cK}{r}} = 14,14$ και το συνολικό κόστος στο σημείο αυτό είναι

$$\Sigma K(Q = 14,14) = 1,41 €$$

Ασκήσεις για λύση

1) Να ευρεθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

a) $y = 6x^4$

b) $y = x$

c) $y = 4x^{-5}$

d) $y = 6(x-5)^{1/2}$

e) $y = e^{3x}$

f) $y = e^{4(x-2)^3}$

g) $y = \log_e x^2$

h) $y = \log_e(x-5)^{1/2}$

i) $y = 6x + 3x^{-4} + 8x^2 + 9x^8 + 10$

j) $y = 6x - 2x^{-1} + 6x^3 - 20(x-2)^2$

k) $y = e^x(x-2)^{1/2}$

l) $y = (3x - 2 + 6x^2)(6x-1)^{-4}$

m) $y = \frac{(2x-3)}{5x}$

n) $y = \frac{x^5 + 3x}{(7x-1)^2}$

2) Να ευρεθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων πεπλεγμένων συναρτήσεων:

a. $3x^2 - y^5 = 10$

b. $x^3 \cdot y^2 = -3$

c. $6x^2 + 4xy - 2y^3 = 5$

3) Να ευρεθούν οι παράγωγοι $\frac{dz}{dt}$ των σύνθετων συναρτήσεων

a) $z = x^2 - y^2$, όπου $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

b) $z = x^3y^2$, όπου $x = e^t$, $y = (1+t)^2$.

c) $z = x \cos y$, όπου $x = e^t$, $y = 1 + t^2$.

4) Ο ρυθμός με τον οποίο μια καινοτομία διαχέεται στην οικονομία είναι ευθέως ανάλογος με τον αριθμό των επιχειρήσεων που την έχουν υιοθετήσει. Να δειχθεί ότι ο ρυθμός διάχυσης της καινοτομίας μεγιστοποιείται όταν οι μισές επιχειρήσεις έχουν υιοθετήσει την καινοτομία, όπου η διάδοση της καινοτομίας δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση τύπου S.

$$N(t) = \frac{A}{1 + be^{-ct}}$$

5) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι $q = 20 - 4p$:

a) Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης.

b) Να υπολογισθεί η ελαστικότητα ζήτησης για $p = 4$.

c) Να δοθεί οικονομική ερμηνεία στην απάντηση της ερώτησης (b).

d) Για ποια τιμή η ελαστικότητα ζήτησης γίνεται μοναδιαία.

6) Σε μια συγκεκριμένη αγορά για μήλα, η ζήτηση για μήλα (q) σχετίζεται με την τιμή τους (p) μέσω της εξίσωσης: $q = 16 - 4p$.

a) Να βρεθεί η τιμή της ελαστικότητας της ζήτησης όταν η τιμή των μήλων είναι 1.

b) Για ποιο διάστημα τιμών είναι η καμπύλη ζήτησης για τα μήλα ανελαστική ως προς την τιμή τους;

7) Έστω η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q = cp^a$ με $c > 0$ και $a < 0$.

a) Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης της παραπάνω συνάρτησης.

b) Ποια η σχέση συνολικών εσόδων και τιμής για συναρτήσεις ζήτησης όπως η παραπάνω;

c) Να βρεθεί η συνάρτηση των οριακών εσόδων MR.

d) Να βρεθούν οι περιορισμοί που πρέπει να ισχύουν στην παράμετρο a έτσι ώστε $MR > 0$, $MR = 0$, $MR < 0$.

8) Η μηνιαία παραγωγή μιας εταιρείας περιγράφεται από τις εξής συναρτήσεις εσόδων και κόστους, αντίστοιχα:

$$R(x) = 60x^2 - 4500x, \quad C(x) = 0{,}1x^3 - 20x^2 + 800x + 8000$$

Στους επόμενους 5 μήνες η παραγωγή αυξάνει σύμφωνα με τον τύπο: $x = 80 + 4t^2/5$.

Να υπολογισθούν οι συναρτήσεις $dR/dt, dC/dt$ και $d\Pi/dt$ οριακών εσόδων, κόστους και κερδών σε σχέση με τον χρόνο.

9) Η αξία ενός οικοπέδου εξαρτάται από το χρόνο t, με συναρτησιακή σχέση $y = 1.000.000(1{,}5)^{\sqrt{t}}$. Αν το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού, r, είναι 10% ποια είναι η βέλτιστη χρονική περίοδος για την πώληση του οικοπέδου και ποια η αξία του;

10) Η συνάρτηση ζήτησης ενός μονοπωλητή είναι $p + 3q - 30 = 0$ και η συνάρτηση κόστους είναι $TC = 2q^2 + 10q$. Να υπολογιστούν:

a) Το επίπεδο παραγωγής και η τιμή που μεγιστοποιούν τα κέρδη του μονοπωλητή.

b) Η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη.

c) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία ίση με t νομισματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος να υπολογιστεί η τιμή του t που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης.

11) Έστω η συνάρτηση ολικού κόστους μιας επιχείρησης $TC = 3x + 8x^2 + 2x^3$.

a) Να βρεθούν οι συναρτήσεις μέσου (AC) και οριακού κόστους παραγωγής (MC).

b) Ποιο το συνολικό, μέσο και οριακό κόστος παραγωγής όταν η επιχείρηση παράγει 5 μονάδες προϊόντος;

c) Έστω η συνάρτηση συνολικών εσόδων της επιχείρησης $TR = 20x - 3x^2$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μέσων (AR) και οριακών εσόδων (MR).

d) Ποιο είναι το ύψος των συνολικών, μέσων και οριακών εσόδων όταν η επιχείρηση παράγει και πουλάει 5 μονάδες του προϊόντος;

e) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης.

f) Εάν σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, σε ποιο επίπεδο παραγωγής και πωλήσεων επιτυγχάνει η επιχείρηση το στόχο της αυτό; Επιβεβαιώστε ότι πρόκειται για το μέγιστο.

g) Να υπολογιστεί το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτύχει η επιχείρηση.

h) Έστω ότι σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων. Σε ποιο επίπεδο παραγωγής επιτυγχάνεται ο σκοπός αυτός; Να επιβεβαιωθεί ότι πρόκειται για το μέγιστο σημείο των εσόδων. Ποια τα κέρδη της επιχείρησης στο σημείο αυτό;

i) Να συγκριθούν και να σχολιαστούν τα μέγιστα κέρδη στα σημεία παραγωγής όπου μεγιστοποιούνται τα κέρδη και τα έσοδα.

12) Ένας κατασκευαστής πλαστικών σωλήνων άρδευσης παράγει 100.000 μονάδες σωλήνες το χρόνο, τις οποίες αποστέλλει σε ένα πελάτη στο εξωτερικό. Τα έξοδα του κατασκευαστή που δεν σχετίζονται με την παραγωγή περιλαμβάνουν: έξοδα μεταφοράς, έξοδα αποθήκευσης (πριν την αποστολή), και έξοδα αποθεμάτων (δηλαδή, ο τόκος κεφαλαίου που αντιστοιχεί στα αγαθά ενώ αυτά βρίσκονται αποθηκευμένα). Τα έξοδα μεταφοράς ανά μονάδα περιγράφονται από τη συνάρτηση $(400.000/x)+10$, όπου x είναι το μέγεθος της αποστολής. Τα ανά μονάδα έξοδα αποθήκευσης και αποθεμάτων περιγράφονται από τη συνάρτηση $17{,}5x/100.000$. Δεδομένου ότι ο κατασκευαστής θέλει να ελαχιστοποιήσει τα έξοδα που δεν σχετίζονται με την παραγωγή, να βρεθεί το βέλτιστο μέγεθος αποστολής και το κόστος ανά μονάδα παραγωγής ώστε να επιτύχει τον στόχο αυτό. Να επαληθευτεί ότι το κόστος είναι το ελάχιστο.

13) Μέσω της ανάπτυξης των σειρών Maclaurin να αποδειχτούν οι ακόλουθες σχέσεις:

a) $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, για $x \neq 1$

b) $\frac{1}{(1-x)} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

c) $\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

8 Ανάλυση Ι: Παραγώγιση – Πολυμεταβλητές Συναρτήσεις

8.1 Συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές (Multivariate functions) – Εισαγωγή

Σε πραγματικά προβλήματα που αντιμετωπίζονται στα οικονομικά και στις επιχειρήσεις μια μεταβλητή είναι συνάρτηση μιας σειράς από άλλες μεταβλητές. Για παράδειγμα, η ζήτηση για αυτοκίνητα ενός συγκεκριμένου τύπου εξαρτάται, μεταξύ άλλων, από την τιμή τους, την τιμή άλλων αυτοκινήτων της ίδιας κατηγορίας, το εισόδημα των καταναλωτών, την ηλικία του αυτοκινήτου κ.λπ. Τέτοιου είδους πολυμεταβλητές συναρτήσεις θα αναλυθούν στο κεφάλαιο αυτό. Η γενική τους μορφή είναι

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

όπου y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές (παράγοντες) που επηρεάζουν την y.

8.2 Μερικές Παράγωγοι (Partial Derivatives)

Έστω ότι η ζήτηση για ένα αγαθό x είναι συνάρτηση της ιδίας τιμής του αγαθού (p_x), της τιμής ενός συσχετιζόμενου αγαθού (p_y), και των εισοδημάτων των καταναλωτών (i). Μαθηματικά:

$$x = f(p_x, p_y, i)$$

Μπορούμε να μετρήσουμε πώς μεταβάλλεται η εξαρτημένη μεταβλητή x, όταν μεταβάλλεται μόνο μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ οι τιμές όλων των υπολοίπων μεταβλητών παραμένουν σταθερές (*ceteris paribus*), εκτιμώντας τη ***μερική παράγωγο*** (***partial derivative***) της συνάρτησης ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή που μας ενδιαφέ-

ρει. Έτσι, στην παραπάνω συνάρτηση ορίζονται τρεις μερικές παράγωγοι, ως ακολούθως:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial x}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial x}{\partial i}$$

Η πρώτη μετράει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής στη ζήτηση για το αγαθό x, όταν μεταβάλλεται η τιμή του, ceteris paribus. Η δεύτερη μετράει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής στη ζήτηση για το x, όταν μεταβάλλεται η τιμή ενός συσχετιζόμενου αγαθού y, ceteris paribus, ενώ η τρίτη μερική παράγωγος μετράει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής στη ζήτηση για μεταβολές στο εισόδημα, όταν οι υπόλοιποι παράγοντες παραμένουν σταθεροί.

Έστω η συνάρτηση παραγωγής της μορφής $X = g(K, L)$. Σύμφωνα με τη συνάρτηση αυτή η ποσότητα του προϊόντος που παράγεται (X) προσδιορίζεται από τις ποσότητες κεφαλαίου (K), και εργασίας (L) που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή του προϊόντος X. Οι δύο μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial X}{\partial K} \quad \text{και} \quad \frac{\partial X}{\partial L}$$

μετρούν το ρυθμό μεταβολής της ποσότητας παραγωγής του προϊόντος, όταν μεταβάλλεται μόνο το κεφάλαιο ή μόνο η εργασία κατά τη διαδικασία παραγωγής.

Οι κανόνες για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων είναι ίδιοι με αυτούς των ολικών παραγώγων.

Παραδείγματα:

1. Έστω η ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης:

$$x = 10 - 4p_x + 6p_y^2 + i$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτου βαθμού είναι:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -4, \quad \frac{\partial x}{\partial p_y} = 12p_y, \quad \frac{\partial x}{\partial i} = 1$$

Για να δούμε πώς προκύπτουν οι παράγωγες αυτές ας δούμε πώς υπολογίζεται η $\frac{\partial x}{\partial p_x}$. Θεωρείται ότι οι όροι p_y^2 και i είναι σταθερές (αριθμοί). Έτσι, κατά τη μερική παραγώγιση του κάθε όρου έχουμε:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x}(10) - \frac{\partial}{\partial p_x}(-4p_x) + \frac{\partial}{\partial p_x}(6p_y^2) + \frac{\partial}{\partial p_x}(i)$$
$$= 0 - 4 + 0 + 0 = -4$$

Βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος του x ως προς p_x της σταθεράς 10 είναι 0, όπως επίσης και των σταθερών όρων $6p_y^2$ και i, αφού οι τελευταίοι δεν εμπεριέχουν τη μεταβλητή p_x. Κατά παρόμοιο τρόπο εξάγονται και οι υπόλοιπες μερικές παράγωγοι.

2. Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $y = 3x^3 + 5z - 6xz^2$ είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 9x^2 - 6z^2$$

και

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 5 - 12xz$$

8.3 Κανόνες μερικής παραγώγισης

8.3.1 Γινόμενα συναρτήσεων

Δεδομένης της συνάρτησης $z = g(x, y) \cdot h(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x, y)\frac{\partial h}{\partial x} + h(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)\frac{\partial h}{\partial y} + h(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}$$

Παράδειγμα:

Έστω $z = (6x + 10y)(3x - 2y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (6x + 10y)3 + (3x - 2y)6 = 36x - 18y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (6x + 10y)(-2) + (3x - 2y)10 = 18x - 40y$$

8.3.2 Κλάσματα συναρτήσεων

Δεδομένης της συνάρτησης $z = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$, όπου $h(x, y) \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-g(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}}{[h(x,y)]^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-g(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}}{[h(x,y)]^2}$$

Παράδειγμα:

Έστω, $z=\dfrac{2x-3y}{4x+5y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(4x+5y)2-(2x-3y)4}{(4x+5y)^2}=\frac{22y}{(4x+5y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(4x+5y)(-3)-(2x-3y)5}{(4x+5y)^2}=\frac{-22x}{(4x+5y)^2}$$

8.3.3 Δυνάμεις συναρτήσεων

Δεδομένης της συνάρτησης $z=[g(x,y)]^n$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=n[g(x,y)]^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=n[g(x,y)]^{n-1}\frac{\partial g}{\partial y}$$

Παράδειγμα:

Έστω $z=(x^2-7y^3)^5$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5(x^2-7y^3)^4 2x=10x(x^2-7y^3)^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=5(x^2-7y^3)^4(-21y^2)=-105y^2(x^2-7y^3)^4$$

8.3.4 Σύνθετες συναρτήσεις – αλυσωτός κανόνας

Έστω $z=f(x,y)$, όπου $x=g(t_1,t_2)$, $y=h(t_1,t_2)$

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

Παράδειγμα:

Έστω $z=2x^3-4y^2$, όπου $x=3t_1^2+2t_2$, $y=6t_1^3+t_1t_2$

$$\frac{\partial z}{\partial t_1}=6x^2(6t_1)-8y(18t_1^2+t_2)$$

$$=36t_1(3t_1^2+2t_2)^2-8(18t_1^2+t_2)(6t_1^3+t_1t_2)$$

$$=-540t_1^5+240t_1^3t_2+136t_1t_2^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2}=6x^2(2)-8yt_1=12(3t_1^2+2t_2)^2-8t_1(6t_1^3+t_1t_2)$$

$$=60t_1^4+48t_2^2+136t_1^2t_2$$

8.3.5 Άλλοι κανόνες μερικής παραγώγισης

$u=f(x,y,z)$ όπου $z=g(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}$$

Παράδειγμα:

$u=2x+3y+4z$ όπου $z=6x^2+3y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2+4(12x)=2+84x$$

Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται αν αντικαταστήσουμε στην αρχική συνάρτηση της τιμής της z και μετά πάρουμε την μερική παράγωγο.

8.4 Διαφορικό (Differential)

Σε μια συνάρτηση με μια ανεξάρτητη μεταβλητή $y = f(x)$, το διαφορικό του y (dy) μετρά τη μεταβολή στο y δεδομένης μια μικρής μεταβολής στην τιμή του x (dx)

Παράδειγμα:

Έστω $y = 6x^3 + 5x + 1$ το διαφορικό υπολογίζεται λαμβάνοντας την παράγωγο (το ρυθμό μεταβολής) του y ως προς x

$$\frac{dy}{dx} = 18x^2 + 5$$

πολλαπλασιάζοντας νοητά με dx δίνει το διαφορικό

$$dy = (18x^2 + 5)dx$$

8.4.1 Ολικό και μερικό διαφορικό (Total and partial differential)

Σε μια συνάρτηση με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές $z = f(x, y)$ το **ολικό διαφορικό (total differential)** μετρά τη μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή που επιφέρει μια μικρή αλλαγή σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Μαθηματικά

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = z_x dx + z_y dy$$

όπου z_x και z_y συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους της z ως προς x και y αντίστοιχα, και dx και dy συμβολίζουν μικρές μεταβολές των μεταβλητών x και y.

Παράδειγμα:

Έστω $z = 3x^2 - 2y^4 + 3xy$.

Πρώτα βρίσκουμε τις $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv z_x = 6x + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} \equiv z_y = -8y^3 + 3x$ και

αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$dz = (6x + 3y)dx + (-8y^3 + 3x)dy$$

Εαν διατηρηθεί μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές σταθερή, λαμβάνουμε το **μερικό διαφορικό (partial differential)**. Αυτό μετρά τη μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή για μικρές μεταβολές σε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές όταν οι υπόλοιπες διατηρούνται σταθερές (ceteris paribus).

Παράδειγμα:

Στην $z = 3x^2 - 2y^4 + 3xy$, εάν $dx = 0$ τότε λαμβάνουμε το μερικό διαφορικό της z ως προς y:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy = (-8y^3 + 3x)dy$$

Παράδειγμα υπολογισμού του διαφορικού

Εκτίμηση οριακών μεταβολών στην τιμή της συνάρτησης u για οριακές μεταβολές των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y. Έστω η συνάρτηση $u = \ln(x^2 + y^2)$, τότε το ολικό διαφορικό της u ορίζεται ως:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot dy$$

Για $x = 1$ και $y = 2$ η τιμή της συνάρτησης είναι $u = \ln(5)$

Αν το x και y μεταβληθούν κατά 0,1 η μεταβολή στην τιμή της u κατά προσέγγιση μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο του ολικού διαφορικού, δηλαδή $du = \frac{2}{5} \cdot 0{,}1 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}6}{5} = 0{,}12$

8.5 Ολική Παράγωγος (Total Derivative)

Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$, όπου $y = g(x)$, δηλαδή οι μεταβλητές x και y στο δεξί μέρος της συνάρτησης δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Κατά συνέπεια μια μεταβολή στη μεταβλητή x επιδρά άμεσα στην z μέσω της συνάρτησης f και έμμεσα μέσω της συνάρτησης g (δηλαδή μέσω της y). Η ***ολική παράγωγος* (total derivative)** μπορεί να μετρήσει την επίδραση του x στην z ως εξής:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Δηλαδή η μεταβολή του z ως προς μεταβολές στην x ισούται με την άμεση επίδραση του x στη z $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ συν την έμμεση επίδραση του x στην z μέσω της y $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)$.

Εναλλακτικά, λαμβάνοντας το ολικό διαφορικό της z έχουμε

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

και διαιρώντας νοητά με το dx λαμβάνουμε:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx}$$

Παράδειγμα:

Έστω $z = f(x, y) = -3x^2 + 2y$ όπου $y = g(x) = 5x^2 - 3x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -6x + 2(10x - 3) = 14x - 6$$

8.5.1 Σύνθετες συναρτήσεις – Ολική *παράγωγος* και αλυσωτός κανόνας

Δεδομένης της συνάρτησης $z = f(x, y)$, όπου $x = g(t)$, $y = h(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Παράδειγμα:

Έστω $z = 3x^2 + 5y^3$, όπου $x = 4t^3$, $y = 3t^2 + 1$

$$\frac{dz}{dt} = 6x(12t^2) + 15y^2(6t) = 72t^2(4t^3) + 90t(3t^2 + 1)^2$$

$$= 1.098t^5 + 520t^3 + 90t$$

8.5.2 Ολική Παράγωγος συναρτήσεων με n μεταβλητές

Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t. Τότε η ολική παράγωγος της f ως προς t ορίζεται ως:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

Παραδείγματα:

1. Δίνεται η συνάρτηση $u = x^2 + y^2$ όπου $x = t^2$ και $y = t^2 + 1$

Να ευρεθεί η ολική παράγωγος $\frac{du}{dt}$.

Λύση:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 2x2t + 2y2t = 4t(x + y)$$

$$= 4t(2t^2 + 1) = 8t^3 + 4t$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $u = x^2 + y^2$ όπου $y = 2x$

Να ευρεθεί η παράγωγος $\frac{du}{dx}$

Λύση:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2x + 2y2 = 2x + 4y = 10x$$

3. Οικονομική εφαρμογή: Οριακή χρησιμότητα ενός αγαθού σε συνάρτηση χρησιμότητας 2 αγαθών, με εισοδηματικό περιορισμό)

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας (utility function) 2 αγαθών $u = f(q_1, q_2)$ και η συνάρτηση εισοδηματικού περιορισμού (budget constraint) $q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 = M$ όπου q και p συμβολίζουν ποσότητες και τιμές δύο προϊόντων.

Η οριακή χρησιμότητα του q_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{du}{dq_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\cdot\frac{dq_2}{dq_1}$$

Αλλά $q_2 = \frac{M - p_1 \cdot q_1}{p_2}$ και $\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{p_1}{p_2}$

Επομένως $\frac{du}{dq_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2} \cdot \frac{p_1}{p_2}$

8.5.3 Άλλοι κανόνες ολικών παραγώγων

Έστω μια συνάρτηση με 3 μεταβλητές στο δεξί μέρος, x, y και z, όμως οι μεταβλητές y και z εξαρτώνται από την μεταβλητή x:

$$u = f(x, y, z),\ y = g(x),\ z = h(x)$$

Η ολική παράγωγος υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

Παράδειγμα:

$u = 2x^3 + 6y - 3z^2$ όπου $y = 2x^3$, $z = 3x$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 6(6x^2) - 6z(3) = 42x^2 - 54x$$

8.6 Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση της μορφής $f(x, y) = 0$ είναι πεπλεγμένη. Το ολικό διαφορικό της ορίζεται ως

$$f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Επομένως, η παράγωγος της πεπλεγμένης συνάρτησης είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Παράδειγμα:

Η παράγωγος της συνάρτησης $2x^3 + 7y^4 - 20 = 0$ είναι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{6x^2}{28y^3}$$

8.7 Οικονομική εφαρμογή – Η συνάρτηση Cobb-Douglas

Έστω μια συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas της μορφής

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

όπου Q, K και L είναι μεταβλητές, οι οποίες συμβολίζουν τις ποσότητες παραγωγής του προϊόντος, κεφαλαίου και εργατικού δυναμικού που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή, και $A > 0$, $0 < \alpha$, $\beta < 1$ είναι σταθερές. Η τιμή της σταθεράς A αντικατοπτρίζει το επίπεδο της τεχνολογίας που χρησιμοποιείται στην παραγωγή, ενώ οι τιμές των α και β μετρούν τις ελαστικότητες της παραγωγής ως προς το κεφάλαιο και το εργατικό δυναμικό, αντίστοιχα.

Οι ελαστικότητες της παραπάνω συνάρτησης ως προς K και L είναι:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q/Q}{\partial K/K} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\frac{K}{Q} = A\alpha\frac{K^{\alpha}L^{\beta}}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \alpha$$

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Q/Q}{\partial L/L} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1}\frac{K}{Q} = \beta$$

Επομένως, οι συντελεστές α και β μετρούν τις ελαστικότητες της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas.

Ο **βαθμός ομογένειας** της συνάρτησης προσδιορίζεται ως

$$A(\kappa K)^{\alpha}(\kappa L)^{\beta} = A\kappa^{\alpha}K^{\alpha}\kappa^{\beta}L^{\beta} = A\kappa^{\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{\beta}$$

Επομένως, $\alpha + \beta$ ισούται με το βαθμό ομογένειας της Cobb-Douglas και κατά συνέπεια προσδιορίζει τις οικονομίες κλίμακας στην παραγωγή. Έτσι, όταν $\alpha + \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + \beta > 1$ έχουμε αντίστοιχα φθίνουσες, σταθερές και αύξουσες οικονομίες κλίμακας.

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση παραγωγής: $Q = 10K^{0,7}L^{0,5}$

Οι (μερικές) ελαστικότητες παραγωγής ως προς το κεφάλαιο και την εργασία είναι 0,7 και 0,5 αντίστοιχα. Έτσι, για 1% αύξηση του κεφαλαίου η ποσότητα παραγωγής αυξάνεται κατά 0,7%, ceteris paribus. Για 1% αύξηση του εργατικού δυναμικού η ποσότητα παραγωγής

αυξάνεται κατά 0,5%. Εάν κεφάλαιο και εργατικό δυναμικό αυξηθούν κατά 1% η ποσότητα παραγωγής αυξάνεται κατά 0,7 + 0,5 = 1,2%. Οι οικονομίες κλίμακας είναι αύξουσες.

8.8 Εφαρμογή μερικών παραγώγων στη διερεύνηση της λύσης μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων – Η Ιακωβιανή (Jacobian)

Στο κεφάλαιο του βιβλίου όπου παρουσιάστηκε η θεματική ενότητα των πινάκων, είδαμε πώς η γραμμική εξάρτηση σε ένα σύστημα μπορεί να ελεγχθεί εξετάζοντας την ορίζουσα ενός πίνακα, ας πούμε του A. Στο μέρος αυτό του βιβλίου ορίζουμε την **Ιακωβιανή ορίζουσα (Jacobian Determinant)** $|J|$ μέσω της οποίας μπορεί να εξεταστεί η πιθανότητα μη γραμμικής εξάρτησης σε ένα σύστημα εξισώσεων ή, γενικά, η πιθανότητα ύπαρξης συναρτησιακής εξάρτησης (functional dependence), γραμμικής ή μη γραμμικής. Η Ιακωβιανή ορίζουσα αποτελείται από όλες τις μερικές παραγώγους πρώτου βαθμού του υπό εξέταση συστήματος, τοποθετημένου σε μια συγκεκριμένη σειρά. Έτσι, για το ακόλουθο σύστημα έχουμε:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$|J| = \left|\frac{\partial y_1, \partial y_2, \ldots, \partial y_n}{\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Βλέπουμε ότι τα στοιχεία κάθε σειράς του J είναι οι μερικές παράγωγοι της κάθε συνάρτησης σε σχέση με την κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή

της $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ως εκ τούτου, τα στοιχεία της καθε στήλης του J είναι οι πρώτες μερικές παράγωγοι της κάθε συνάρτησης $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Όταν $|J| \neq 0$ οι εξισώσεις είναι ανεξάρτητες (γραμμικά ή μη γραμμικά) μεταξύ τους. Όταν $|J| = 0$ οι εξισώσεις είναι (γραμμικά ή μη γραμμικά) εξαρτημένες μεταξύ τους.

Παραδείγματα:

1. Έστω το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x_1 - 3x_2 \\ y_2 &= 7x_1 + 8x_2 \end{aligned}$$

Για να ορίσουμε την Ιακωβιανή χρειαζόμαστε τα ακόλουθα

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 5, \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -3, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 7, \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 8$$

Επομένως,

$$|J| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 21 = 61$$

Αφού $|J| \neq 0$ δεν υπάρχει (συναρτησιακή) εξάρτηση μεταξύ των εξισώσεων. Συμπεραίνουμε ότι εφόσον $|A| \neq 0$ οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, όπου οι εξισώσεις είναι πρώτου βαθμού, η Ιακωβιανή ισούται με την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος, ας πούμε A.

2. Να εξεταστεί το ακόλουθο σύστημα για (συναρτησιακή) ανεξαρτησία

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 \end{aligned}$$

Για την Ιακωβιανή απαιτούνται οι ακόλουθες πρώτες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 3, \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -2, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 18x_1 - 12x_2, \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} = -12x_1 + 8x_2$$

Επομένως, η Ιακωβιανή είναι

$$|J| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 18x_1 - 12x_2 & -12x_1 + 8x_2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-12x_1 + 8x_2) - (-2)(18x_1 - 12x_2)$$

$$= -36x_1 + 24x_2 + 36x_1 - 24x_2 = 0$$

Εφόσον $|J| = 0$ οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες μεταξύ τους.

Αυτό φαίνεται εύκολα στην περίπτωση αυτή παρατηρώντας ότι η δεύτερη εξίσωση ισούται με το τετράγωνο της πρώτης. Δηλαδή $(3x_1 - 2x_2)^2 = 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2$.

8.9 Ακρότατα σημεία συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: y = f(x, z)

Σημειογραφία:

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $y = f(x, z)$

Μερικές παράγωγοι πρώτου βαθμού (first order partial derivatives):

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv f_x \equiv f_1, \quad \frac{\partial y}{\partial z} \equiv f_z \equiv f_2$$

Μερικές παράγωγοι δεύτερου βαθμού (second order partial derivatives): Η κάθε πρώτη μερική παράγωγος παραγωγίζεται ξανά ως προς την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$f_{xx} \equiv f_{11} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \quad \text{και} \quad f_{zz} \equiv f_{22} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

Μικτές μερικές παράγωγοι (Cross partial derivatives): Η μικτή μερική παράγωγος μετρά το ρυθμό μεταβολής της πρώτης μερικής παραγώγου ως προς τη μια ανεξάρτητη μεταβλητή σε σχέση με μεταβολές στην άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης.

$$f_{xz} \equiv f_{12} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \quad \text{και} \quad f_{zx} \equiv f_{21} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Γενικά, όταν η συνάρτηση είναι συνεχής $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$

Δηλαδή, οι μικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσες.

Οι μερικές παράγωγοι δευτέρου βαθμού μπορούν να παρουσιασθούν σε μορφή πίνακα τοποθετώντας στην κύρια διαγώνιο τις μερικές παραγώγους δευτέρου βαθμού, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα αποτελούνται από τις μικτές μερικές παραγώγους ως εξής:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xz} \\ f_{zx} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Προφανώς, δεδομένου ότι $f_{xz} = f_{zx}$, ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του.

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $y = 2x^3 - 6z^5 + 3xz$

Μερικές παράγωγοι πρώτου βαθμού:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6x + 3z, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -30z^4 + 3x$$

Μερικές παράγωγοι δευτέρου βαθμού:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -120z^3$$

Μικτές μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-30z^4 + 3x) = 3, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(6x + 3z) = 3$$

Συνοπτικά:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -120z^3 \end{pmatrix}$$

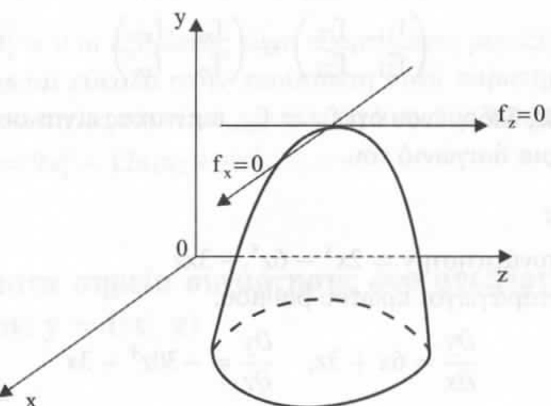
Ακρότατα σημεία της συνάρτησης $y = f(x, z)$:

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου σημείου στην ανωτέρω συνάρτηση είναι, η μερική παράγωγος πρώτου βαθμού να είναι μηδέν. Δηλαδή,

ΚΠΠ: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0$ δηλαδή $f_x = f_z = 0$

Η έννοια του κριτηρίου αυτού φαίνεται στα Διαγράμματα 8.1 και 8.2. Στο μέγιστο και στο ελάχιστο η συνάρτηση (η μεταβλητή y) ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται σε σχέση με μεταβολές προς την κατεύθυνση του άξονα x ή του άξονα z.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 8.1: ***Η συνάρτηση $y = f(x, z)$ με μέγιστο***



Ικανές συνθήκες για ακρότατα (ΚΔΠ):

Η εξέταση των κριτηρίων της δεύτερης παραγώγου καθορίζει τη φύση των ακρότατων σημείων. Συνεπώς, όταν:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2$$

το ακρότατο σημείο υπάρχει και είναι είτε μέγιστο είτε ελάχιστο.

Έτσι, όταν:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$$

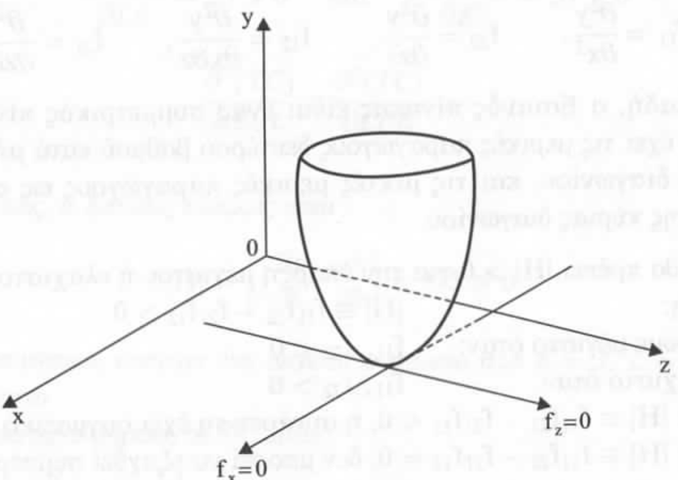
το ακρότατο σημείο είναι ***μέγιστο***. Στο διάγραμμα 8.1 ξεκινώντας από το μέγιστο σημείο η συνάρτηση κινείται προς τα κάτω –φθίνει– προς όλες τις κατευθύνσεις (του x και του z).

Όταν:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0$$

το ακρότατο σημείο είναι ***ελάχιστο***. Στο διάγραμμα 8.2 ξεκινώντας από το ελάχιστο σημείο η συνάρτηση κινείται ανοδικά προς την κατεύθυνση του x και/ή του y.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 8.2: ***Η συνάρτηση $y = f(x, z)$ με ελάχιστο***



Όταν:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) < \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2$$

το σημείο μεταβολής κλίσης της συνάρτησης λέγεται ***σαγματικό σημείο (saddle point)***. Είναι το αντίστοιχο του σημείου καμπής που είδαμε νωρίτερα σε συναρτήσεις με μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Γραφικά, η συνάρτηση έχει σχήμα σέλας αλόγου.

Όταν,

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2$$

δεν εξάγεται συμπέρασμα.

Γενικά, η καμπυλότητα μιας πολυμεταβλητής συνάρτησης, όπως της $y = f(x, z)$, περιγράφεται από τον ακόλουθο ***Εσιανό πίνακα (Hes-***

sian matrix), ο οποίος συνοψίζει τα κριτήρια της δεύτερης παραγώγου, ΚΔΠ:

$$|H| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

όπου:

$$f_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}, \quad f_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$

Δηλαδή, ο Εσιανός πίνακας είναι ένας συμμετρικός πίνακας, ο οποίος έχει τις μερικές παραγώγους δευτέρου βαθμού κατά μήκος της κύριας διαγωνίου, και τις μικτές μερικές παραγώγους ως στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου.

- Έτσι θα πρέπει $|H| > 0$ για την ύπαρξη μέγιστου ή ελάχιστου.
Δηλαδή: $|H| \equiv f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} > 0$
και έχουμε μέγιστο όταν: $f_{11}, f_{22} < 0$
και ελάχιστο όταν: $f_{11}, f_{22} > 0$
- Όταν: $|H| \equiv f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} < 0$, η συνάρτηση έχει σαγματικό σημείο.
- Όταν: $|H| \equiv f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} = 0$, δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα.

Παράδειγμα:

Τα συνολικά κόστη μιας επιχείρησης συνδέονται με το εργατικό δυναμικό (L), και τον κεφαλαιακό εξοπλισμό (K), σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$TC = 10L^2 + 10K^2 - 25L - 50K - 5LK + 2000$$

Ποιος συνδυασμός των K και L ελαχιστοποιεί το TC;

Απάντηση:

Λαμβάνουμε τα ΚΠΠ για τον προσδιορισμό ακρότατων σημείων στη συνάρτηση κόστους της επιχείρησης. Έτσι,

ΚΠΠ: $$\frac{\partial(TC)}{\partial L} = 20L - 25 - 5K = 0 \qquad (1)$$

και $$\frac{\partial(TC)}{\partial K} = 20K - 50 - 5L = 0 \qquad (2)$$

Αυτό αποτελεί ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, K και L.
$4 \times (1) + (2)$ δίνει: $75L - 150 = 0$. Επομένως, $L = 2$
Θέτοντας $L = 2$ στην (1) και λύνοντας λαμβάνουμε, $K = 3$
Για να επαληθεύσουμε ότι το σημείο παραγωγής, όπου $L = 2$, $K = 3$, είναι ελάχιστο εξετάζουμε τα ΚΔΠ. Έτσι:

ΚΔΠ: $$\frac{\partial^2(TC)}{\partial L^2} = 20 > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2(TC)}{\partial K^2} = 20 > 0$$

Επίσης: $$\frac{\partial^2(TC)}{\partial K \partial L} \equiv \frac{\partial^2(TC)}{\partial L \partial K} = -5$$

Επομένως, ο Εσιανός πίνακας είναι

$$|H| = \begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{vmatrix} = 375 > 0$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει ένα ακρότατο σημείο στο $K = 3$, $L = 2$, και είναι ελάχιστο.

Στο ανωτέρω σημείο, το TC είναι:

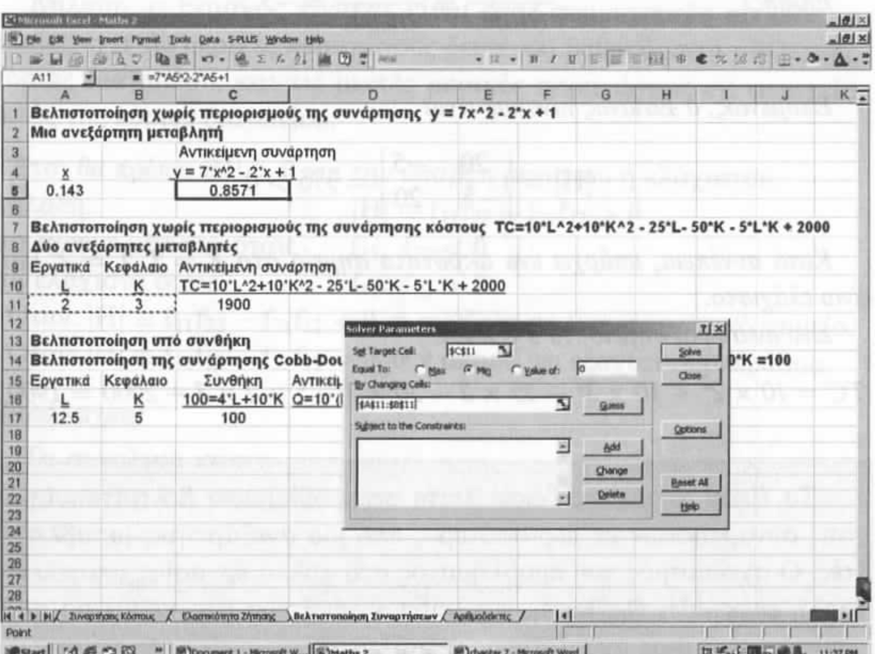
$$TC = 10 \times 2^2 + 10 \times 3^2 - 25 \times 2 - 50 \times 3 - 5 \times 2 \times 3 + 2000 = 1900$$

Το ***Excel*** μπορεί να δώσει λύση σε προβλήματα βελτιστοποίησης συναρτήσεων με περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές. Ο σχεδιασμός του προβλήματος στο φύλλο εργασίας αποτελεί απλή επέκταση της λύσης που είδαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο σε συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.

Η διαδικασία είναι παρόμοια με πριν, όπως βλέπουμε στο Γράφημα 8.1. Επιλέγουμε ένα άδειο κελί, όπου εισάγεται η εξίσωση της αντικείμενης συνάρτησης προς βελτιστοποίηση, ας πούμε το κελί c11 στο γράφημα του Excel. Αυτή είναι η διεύθυνση που εισάγουμε στο «Set Target Cell» στο κουτί διαλόγου που εμφανίζει ο Solver. Στο παράδειγμα που εξετάζουμε, η συνάρτηση έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (εισόδους). Ως συνέπεια, απαιτούνται δύο κελιά για τις τιμές (εισόδους) των L και K. Έτσι, στο φύλλο εργασίας ορίζονται τα κελιά a11 και b11. Αυτό ορίζεται στο «By Changing Cells»

του κουτιού διαλόγου που βλέπουμε στο γράφημα. Επιλέγοντας το Solve λαμβάνουμε τις λύσεις που εμφανίζονται στα κελιά a11 με c11, για τις τιμές εισόδου και εξόδου της συνάρτησης στο βέλτιστο σημείο. Αυτές ταυτίζονται με την αναλυτική λύση που βρήκαμε νωρίτερα

ΓΡΑΦΗΜΑ 8.1: ***Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές στο Excel μέσω του solver***



8.10 Ακρότατα σημεία πολυμεταβλητών συναρτήσεων: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$

Για μια γενική ***συνάρτηση n μεταβλητών***, έστω $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ τα ΚΠΠ για ακρότατα σημεία συνοψίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0$$

Για τα ΚΔΠ σχηματίζουμε τον ακόλουθο (n × n) Εσιανό πίνακα,

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

όπου $f_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$, $f_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$, $f_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$, $f_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$, κλπ

Υπολογίζουμε τις διαδοχικές ***κύριες ελάσσονες ορίζουσες (principal minors)*** του Εσιανού πίνακα H ως:

$$|H_1| = f_{11}, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \quad |H_n| = |H|$$

Τότε, τα ΚΔΠ για ακρότατα σημεία στη συνάρτηση ορίζονται ως εξής:

Για μέγιστο, ο πίνακας H πρέπει να είναι ***αρνητικά ορισμένος (negative definite)***. Δηλαδή, το πρόσημο των κύριων ελάσσονων οριζουσών εναλλάσσεται, ξεκινώντας από αρνητικό. Έτσι,

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0, \ \ldots$$

Για ελάχιστο, ο πίνακας H πρέπει να είναι ***θετικά ορισμένος (positive definite)***. Δηλαδή, το πρόσημο των κύριων ελάσσονων οριζουσών πρέπει να είναι θετικό. Έτσι,

$$|H_1| > 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| > 0, \ \ldots$$

Παράδειγμα:

Εστω η συνάρτηση $y = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2 - 2x_3$

ΚΠΠ:
$$\partial y/\partial x_1 = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\partial y/\partial x_2 = -2x_1 + 4x_2 = 0$$
$$\partial y/\partial x_3 = 2x_1 + 8x_3 - 2 = 0$$

Η λύση του συστήματος είναι $x_1 = -1$, $x_2 = -0{,}5$, $x_3 = 0{,}5$. Δηλαδή, υπάρχει ένα ακρότατο σημείο στο $(-1, -0{,}5, 0{,}5)$.

ΚΔΠ: Όταν εξαχθούν και υπολογιστούν στο ακρότατο σημείο όλες οι μερικές παράγωγοι δευτέρου βαθμού και οι μικτές παράγωγοι της συνάρτησης, σχηματίζεται ο ακόλουθος (3 × 3) Εσιανός πίνακας, ο οποίος περιγράφει την ***καμπυλότητα (curvature)*** της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Οι τιμές των διαδοχικών κύριων ελάσσονων οριζουσών του πίνακα είναι:

$$|H_1| = 2, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad |H| = 16$$

Αφού είναι όλα θετικά, το ακρότατο σημείο είναι ελάχιστο.

8.11 Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη (Constrained optimization)

8.11.1 Λαγκρανζιανή συνάρτηση και Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου (ΚΠΠ)

Έστω $\underline{x}$ διάνυσμα γραμμή με $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και συνεπώς $f(\underline{x})$, $g(\underline{x})$ είναι συναρτήσεις n-μεταβλητών $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ και $g(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, αντίστοιχα.

Καθώς οι πόροι στην οικονομία είναι περιορισμένοι, συχνά πρέπει να λάβουμε αποφάσεις της μορφής:

Βελτιστοποίηση μιας ***αντικείμενης συνάρτησης (ή του συναρτησιακού) (objective function)***, $f(\underline{x})$, ***υπό κάποιες συνθήκες (subject to constraints)*** $g(\underline{x})$, δηλαδή, υπό ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι περιγράφονται από τη συνάρτηση $g(\underline{x}) = c$, όπου c μια σταθερά.

Παραδείγματα:

1. Η επιχείρηση θέλει να μεγιστοποιήσει τα έσοδα της (revenue) υπό τη συνθήκη κόστους (cost).

2. Τα νοικοκυριά (households) θέλουν να μεγιστοποιήσουν τη χρησιμότητα (utility) από την κατανάλωση αγαθών υπό τη συνθήκη που επιβάλει το ύψος του εισοδήματός τους (budget constraint).

Για συναρτήσεις απλής μορφής πολλές φορές είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε τη συνθήκη εντός της αντικείμενης συνάρτησης και να βελτιστοποιήσουμε τη νέα συνάρτηση με το συνηθισμένο τρόπο που είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα:

Ελαχιστοποίηση της $q = 1 + 2x + 5y^2$ υπό τη συνθήκη $x = y$

Αντικαθιστούμε τη συνθήκη στην αντικείμενη συνάρτηση για να απαλείψουμε το x, $q = 1 + 2y + 5y^2$. Η ελαχιστοποίηση δίνει $dq/dy = 2 + 10y = 0$. Απ' όπου $y = -1/5$, και ως αποτέλεσμα $x = -1/5$.

Γενικά, για να λύσουμε ένα υπό συνθήκη πρόβλημα βελτιστοποίησης, βελτιστοποιούμε μια νέα συνάρτηση η οποία ονομάζεται **Λαγκρανζιανή συνάρτηση (Lagrangean function)**, και ορίζεται ως:

$$L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) + \lambda[c - g(\underline{x})]$$

ή ως

$$L(x_1, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda[g(\underline{x}) - c]$$

όπου λ είναι η Λαγκρανζιανή σταθερά.

Για την εύρεση των ακρότατων θέτουμε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτου βαθμού ως προς $\underline{x}$ και λ ίσες με μηδέν και λύνουμε το σύστημα των $n + 1$ εξισώσεων.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση παραγωγής (production function) μιας επιχείρησης περιγράφει την τεχνολογική σχέση μεταξύ εισροών (πρώτες ύλες, εργασία κλπ.) και εκροών στην παραγωγή.

Ας υποθέσουμε ότι μια συγκεκριμένη επιχείρηση επιθυμεί να βελτιστοποιήσει την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής μορφής Cobb-Douglas $Q = 10L^{1/2}K^{1/2}$, ως προς την ακόλουθη συνθήκη η οποία περιγράφει το κόστος των εισροών, $4L + 10K = 100$, όπου L και K (οι συντελεστές παραγωγής) είναι οι εισροές εργασίας και κεφαλαίου στην παραγωγή, αντίστοιχα, και το Q συμβολίζει την ποσότητα που παράγεται.

Αναδιατάσσοντας τη συνθήκη λαμβάνουμε: $100 - 4L - 10K = 0$, και σχηματίζουμε την ακόλουθη Λαγκρανζιανή συνάρτηση:

$$L^*(K, L, \lambda) = 10L^{1/2}K^{1/2} + \lambda(100 - 4L - 10K).$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς τους παράγοντες L, K και λ. Η αναγκαία συνθήκη για μέγιστο δίνεται από τα ακόλουθα ΚΠΠ:

$$\frac{\partial L^*}{\partial L} \equiv 5L^{-1/2}K^{1/2} - 4\lambda = 0 \qquad \text{Επομένως, } \lambda = \frac{5K^{1/2}}{4L^{1/2}}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial K} \equiv 5L^{1/2}K^{-1/2} - 10\lambda = 0 \qquad \text{Επομένως, } \lambda = \frac{5L^{1/2}}{10K^{1/2}}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda} \equiv 100 - 4L - 10K = 0 \qquad \text{Επομένως, } 100 - 4L - 10K = 0$$

Αυτό αποτελεί ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους, L, K και λ, προς επίλυση. Συνεπώς:

$$\frac{5K^{1/2}}{4L^{1/2}} = \frac{5L^{1/2}}{10K^{1/2}}$$

Επομένως: $50K = 20L$ και $L = \frac{5}{2}K$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $100 - 4L - 10K = 0$

Επομένως $100 - 4L - 10K = 0$ και αντικαθιστώντας όπου: $L = \frac{5}{2}K$ προκύπτει: $10K + 10K = 100$, απ' όπου προκύπτει: $K = 5$.

Έτσι, ο συνδυασμός $K = 5$ και $L = 12{,}5$ μεγιστοποιεί την παραγωγή. Επίσης, ως λύση του προβλήματος προκύπτει ότι $\lambda = 0{,}79$.

Ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων στο μέγιστο είναι $(K = 5, L = 12{,}5) = 79{,}06$.

Ο ***πολλαπλασιαστής Lagrange (λ)***, είναι επίσης γνωστός και ως ***σκιώδης τιμή (shadow price)***. Δείχνει κατά πόσο μεταβάλλεται το βέλτιστο Q, όταν η συνθήκη αρθεί κατά 1 μονάδα.

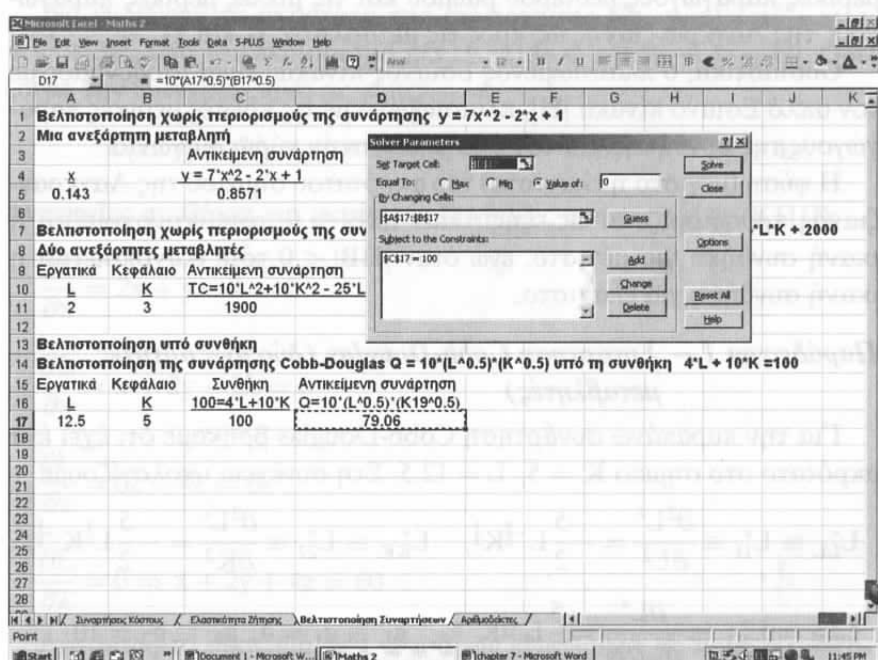
Στο ανωτέρω παράδειγμα $\lambda = 0{,}79$. Συνεπώς, αν η σταθερά της συνθήκης αυξηθεί από 100 σε 101, το βέλτιστο επίπεδο της παραγωγής θα αυξηθεί κατά 0,79 μονάδες σε $Q^* = 79{,}85$.

Σημειώνεται, όταν $\lambda = 0$, ***η συνθήκη δεν είναι δεσμευτική (non-binding constraint)***. Δηλαδή δεν επηρεάζει τη λύση του προβλήματος.

Το παραπάνω παράδειγμα της υπό συνθήκη βελτιστοποίησης της συνάρτησης παραγωγής μορφής Cobb-Douglas, $Q = 10L^{1/2}K^{1/2}$, μπορεί να λυθεί με χρήση του ***Excel.*** Η εξίσωση της αντικείμενης

συνάρτησης ορίζεται στο κελί d17 του φύλλου εργασίας του Excel, όπως φαίνεται στο Γράφημα 8.2. Οι τιμές εισόδου των L και K εισάγονται στα κελιά a17 και b17, αντίστοιχα. Η εξίσωση της συνθήκης ορίζεται στο κελί c17 ως = 4*A17 + 10*B17. Ακολούθως, επιλέγοντας το «Add» ανοίγει ένα άλλο κουτί διαλόγου με τίτλο «Add Constraint», το οποίο επιτρέπει την προσθήκη της συνθήκης στον Solver (δεν φαίνεται στο Γράφημα 8.2). Σ' αυτό το κουτί εισάγουμε κάτω από τον τίτλο «Cell Reference» το κελί c17, κάτω από τον τίτλο «Constraint» εισάγουμε 100, και επιλέγουμε «<=». Οι παραπάνω διαδικασίες εισάγουν τη μαυρισμένη περιοχή στην περιοχή «Subject to the Constraints» του κουτιού διαλόγου που βλέπουμε στο Γράφημα 8.2. Τέλος, επιλέγοντας το Solve στο κουτί διαλόγου παράγει τις λύσεις που φαίνονται στα κελιά a17, b17 και d17 για τα L, K και Q. Οι τιμές αυτές επαληθεύουν τις λύσεις που βρήκαμε προηγουμένως

ΓΡΑΦΗΜΑ 8.2: *Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη στο Excel μέσω του Solver*



8.11.2 Λαγκρανζιανή και Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου (ΚΔΠ)

Κατ' αναλογία με τα ***αδέσμευτα (χωρίς συνθήκες) προβλήματα βελτιστοποίησης (unconstrained optimization problems)***, τα ΚΔΠ χρειάζεται να ληφθούν υπ' όψιν στα προβλήματα βελτιστοποίησης υπό συνθήκη για να προσδιοριστεί η φύση των ακρότατων σημείων της Λαγκρανζιανής συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε ότι η $f(\underline{x})$ είναι η αντικείμενη συνάρτηση και η $g(\underline{x}) = c$ είναι η συνθήκη όπου $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Ο ακόλουθος ***Περιορισμένος ή Πλαισιωμένος Εσιανός Πίνακας (Bordered Hessian)*** καθορίζει την καμπυλότητα της Λαγκρανζιανής συνάρτησης

$$L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) + \lambda[c - g(\underline{x})]$$

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad |HB| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}$$

όπου g_1, g_2 συμβολίζουν τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης της συνθήκης $g(\underline{x}) = c$ και L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21} συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους δευτέρου βαθμού και τις μικτές μερικές παραγώγους της Λαγκρανζιανής ως προς τις μεταβλητές x_1 και x_2.

Ουσιαστικά, ο πλαισιωμένος Εσιανός πίνακας είναι ισοδύναμος με τον απλό Εσιανό πίνακα $|H|$, πλαισιωμένο με τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνθήκης και τον όρο μηδέν στην κύρια διαγώνιο.

Η φύση (μέγιστο ή ελάχιστο) του ακρότατου σημείου της Λαγκρανζιανής προσδιορίζεται ως εξής: Όταν $|HB| > 0$, τότε ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για μέγιστο, ενώ όταν $|HB| < 0$ τότε ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για ελάχιστο.

Παράδειγμα 1 – Συνάρτηση Cobb-Douglas (δύο ανεξάρτητες μεταβλητές)

Για την παραπάνω συνάρτηση Cobb-Douglas βρήκαμε ότι έχει ένα ακρότατο στο σημείο K = 5, L = 12,5. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$L^*_{LL} \equiv L^*_{11} \equiv \frac{\partial^2 L^*}{\partial L^2} = -\frac{5}{2}L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}, \quad L^*_{KK} \equiv L^*_{22} \equiv \frac{\partial^2 L^*}{\partial K^2} = -\frac{5}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}},$$

$$L^*_{LK} = L^*_{KL} \equiv \frac{\partial L^*}{\partial L \partial K} = \frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}, \quad g_L \equiv g_1 = 4, \; g_K \equiv g_2 = 10$$

Έτσι, ο περιορισμένος Εσιανός είναι:

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & -\frac{5}{2}L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} \\ 10 & \frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} & -\frac{5}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix}$$

$$|HB| = 0 - 4\left[4\left(-\frac{5}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}}\right) - 10\frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$+ 10\left[4\frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} - \left(-10\frac{5}{2}L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= 40\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{3}{2}}} + 250\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}} + \frac{200}{L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}} > 0$$

Επομένως, το ακρότατο είναι μέγιστο.

Παράδειγμα 2 – Συνάρτηση με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές

Να ευρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + 3z^2$, υπό τον περιορισμό $g(x, y, z) = c$: $x + 2y + 4z = 60$. Ορίζουμε την Λαγκρανζιανή ως εξής:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + \lambda(60 - x - 2y - 4z)$$

Αναγκαίες συνθήκες για ακρότατο: Συνθήκες πρώτης τάξης (ΚΠΠ):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2y - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6z - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x + 2y + 4z = 60$$

Λύνοντας το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές x, y, z και λ προκύπτει:

$$x = 0,\quad y = \frac{90}{7},\quad z = \frac{60}{7},\quad \lambda = \frac{90}{7}$$

Ικανές συνθήκες για ακρότατο:

Όσον αφορά στα ΚΠΔ, ορίζεται στη συνέχεια ο Περιορισμένος ή Περιφραγμένος Εσιανός Πίνακας ως εξής:

$$L_{xx} \equiv L_{11} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2,\quad L_{yy} \equiv L_{22} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2,\quad L_{zz} \equiv L_{33} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 6$$

$$g_x \equiv g_1 \equiv \frac{\partial g}{\partial x} = 1,\quad g_y \equiv g_2 \equiv \frac{\partial g}{\partial y} = 2,\quad g_z \equiv g_3 \equiv \frac{\partial g}{\partial z} = 4,$$

$$L_{xy} \equiv L_{12} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1,\quad L_{xz} \equiv L_{13} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0,\quad L_{yz} \equiv L_{23} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$$

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|HB_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (1 - 4) = -6 < 0$$

$$|HB_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

(ανάπτυγμα 4ης στήλης)

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Η τελευταία ορίζουσα έχει ήδη υπολογισθεί και ισούται με –4. Για τις υπόλοιπες λαμβάνουμε το ανάπτυγμα με τα στοιχεία της 1ης γραμμής. Έτσι:

$$|HB_3| = -4 \cdot [1 \cdot (2 - 0) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 4) + 1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 4)]$$
$$-2 \cdot [0 - 1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 4) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 4)] + 6 \cdot (-4)$$
$$= -4[2 + 8 - 4] - 2[2 - 14] + 6(-4)$$
$$= -24 + 24 - 24 = -24 < 0$$

Επομένως ικανοποιείται η ικανή συνθήκη για ελάχιστο.

ΚΔΠ για συνάρτηση με n ανεξάρτητες μεταβλητές

Γενικεύοντας, για μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και μια συνθήκη $g(x_1, \ldots, x_n) = c$ με n μεταβλητές, ο πλαισιωμένος Εσιανός πίνακας λαμβάνει τη μορφή

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & f_{11} + \lambda g_{11} & f_{12} + \lambda g_{12} & \ldots & f_{1n} + \lambda g_{1n} \\ g_2 & f_{21} + \lambda g_{21} & f_{22} + \lambda g_{22} & \ldots & f_{2n} + \lambda g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & f_{n1} + \lambda g_{n1} & f_{n2} + \lambda g_{n2} & \ldots & f_{nn} + \lambda g_{nn} \end{vmatrix}$$

Ικανές συνθήκες:

Το ακρότατο σημείο (όταν ικανοποιούνται τα ΚΠΠ) είναι:

• ***Μέγιστο***, όταν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες ορίζουσες του |HB| με βαθμό μεγαλύτερο του δύο εναλλάσσονται στο πρόσημο, ξεκινώντας από θετική τιμή:

$$|HB_2| > 0,\quad |HB_3| < 0,\quad |HB_4| > 0,\ \ldots$$

• ***Ελάχιστο***, όταν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες ορίζουσες του $|HB|$ με βαθμό μεγαλύτερο του δύο είναι αρνητικά:

$$|HB_2| < 0, \quad |HB_3| < 0, \quad |HB_4| < 0, \ \ldots$$

ΚΔΠ σε πρόβλημα με δύο περιορισμούς

Είναι δυνατόν να υπάρχουν αρκετές συνθήκες σ' ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό συνθήκη. Για παράδειγμα, ζητείται η βελτιστοποίηση της $f(x_1, x_2, x_3)$ δεδομένων των περιορισμών $g_1(x_1, x_2, x_3) = c_1$ και $g_2(x_1, x_2, x_3) = c_2$, όπου ο αριθμός των περιορισμών (έστω m) είναι μικρότερος απ' τον αριθμό των μεταβλητών (έστω n). Στην περίπτωση αυτή η Λαγκρανζιανή λαμβάνει της εξής μορφή:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1[c_1 - g_1(x_1, x_2, x_3)] + \lambda_2[c_2 - g_2(x_1, x_2, x_3)]$$

ΚΠΠ (αναγκαίες συνθήκες) είναι:

$$L_{x1} = 0, \ L_{x2} = 0, \ L_{x3} = 0, \ L_{\lambda 1} = 0, \ L_{\lambda 2} = 0$$

ΚΔΠ (ικανές συνθήκες): Εξετάζεται η ορίζουσα του ακόλουθου περιορισμένου Εσιανού πίνακα

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{1x_1} & g_{1x_2} & g_{1x_3} \\ 0 & 0 & g_{2x_1} & g_{2x_2} & g_{2x_3} \\ g_{1x_1} & g_{2x_1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_{1x_2} & g_{2x_2} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_{1x_3} & g_{2x_3} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

Όταν $|HB| > 0$ υπάρχει ελάχιστο, ενώ όταν $|HB| < 0$ υπάρχει μέγιστο.

Πιο πολύπλοκα προβλήματα μπορούν να εξεταστούν με περισσότερες από δύο συνθήκες. Επίσης, προβλήματα βελτιστοποίησης υπό συνθήκη είναι ενδιαφέροντα σε πρακτικές εφαρμογές όπου η συνθήκη είναι ανισότητα, αντί για ισότητα, της μορφής $g(\underline{x}) \leq c$. Αυτά είναι προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού, τα οποία μπορεί να είναι γραμμικής ή μη γραμμικής μορφής. Στην πρώτη περίπτωση η αντικείμενη συνάρτηση και ο περιορισμός είναι γραμμικής μορφής συναρτήσεις, ενώ στη δεύτερη περιλαμβάνονται μη γραμμικές συναρτήσεις. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να λυθούν στο Excel ή χρησιμοποιώντας ειδικό λογισμικό για Η/Υ.

Ασκήσεις για λύση

1) Να ευρεθούν οι z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx} της συνάρτησης: $z_x = e^{x+y}(\text{συνx} + \text{ημy})$.

2) Να ευρεθούν οι z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx} των συναρτήσεων των
- **a)** $z = e^{x^2+y^2}$.
- **b)** $z = \ln(x^2 + y^2)$.
- **c)** $z = \ln(\sin x + \cos y)$ όπου $\sin x = \text{ημx}$ και $\cos y = \text{συνy}$.

3) Να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα ακραία σημεία της συνάρτησης:

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

4) Μια εταιρία παιχνιδιών εκτιμά ότι ο αριθμός των μονάδων (παιγνιδιών) που πωλούνται ανά έτος (z) εξαρτάται από τα έξοδά της για τηλεοπτική διαφήμιση x (σε €1.000) και ραδιοφωνική διαφήμιση y (σε €1.000) μέσω της ακόλουθης συνάρτησης:

$$z = 50.000x + 40.000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

- **a)** Ποιες είναι οι πωλήσεις της εταιρίας αν δαπανούνται €20.000 ($y = 20$) για ραδιοφωνική και €40.000 ($x = 40$) για τηλεοπτική διαφήμιση;
- **b)** Χρησιμοποιώντας μερικές παραγώγους, να συγκριθεί η επίδραση στις ετήσιες πωλήσεις, αν δαπανηθούν €1.000 επιπλέον για τηλεοπτική διαφήμιση και €1.000 επιπλέον για ραδιοφωνική διαφήμιση (σε σχέση με το τωρινό ποσό δαπανών των €40.000 και €20.000). Έχει το ραδιόφωνο ή η τηλεόραση μεγαλύτερη επίδραση στις πωλήσεις;
- **c)** Τι ποσό θα πρέπει να δαπανηθεί για ραδιοφωνική και τηλεοπτική

διαφήμι[illegible] μονάδων [illegible] βρεθεί ο αριθμός [illegible] μέγιστο.

5) Οι παρά[illegible] b_1 και b_2, της ευθείας παλινδρόμησης $Y_i = b_1 +$ [illegible] $, \ldots, n\}$, εξάγοντα[illegible] των αποκλίσεων [illegible] $_1 + b_2X_i)$, όπως αυτ[illegible]. Να εξαχθούν οι [illegible] αυτών.

6) Δίνεται η [illegible] function) ενός καταναλωτή

$$U = U(x, y) = 4x^{1/2}y^{1/2}, \quad x, y > 0$$

Όπου x και y αναφέρονται στις ποσότητες που καταναλώνει από δύο αγαθά. Έστω επίσης ότι το χρηματικό εισόδημα του καταναλωτή ανέρχεται σε 100 χρηματικές μονάδες, ενώ οι τιμές των αγαθών είναι αντίστοιχα $p_x = 2$ και $p_y = 4$. Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας.

7) Να βρεθούν οι συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για τα ακρότατα της συνάρτησης $2x^2 - 6y^2$ υπό τον περιορισμό $x + 2y = 6$. Σε ποιο σημείο η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο και τι είδους;

8) Έστω τα διανύσματα X, B και ο πίνακας A

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα ακρότατα, αν υπάρχουν, της συνάρτησης $y = X'AX + B'X$.

9) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα δεσμευμένα στάσιμα (ακρότατα) της συνάρτησης $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = x + y^2$ υπό τον περιορισμό $2x^2 + y^2 = 1$, καθώς και η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange για κάθε ακρότατο σημείο. Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ σε κάθε ακρότατο σημείο; Ποια η ερμηνεία της τιμής του πολλαπλασιαστή Lagrange;

10) Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_2x_3$$

με βάση τον περιορισμό $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$.

11) Έστω ότι η συνάρτηση

$$q = 3 - 5Pq + 3Py + 4I$$

αντιπροσωπεύει την καμπύλη ζήτησης για το αγαθό q (ηλεκτρική ενέργεια), όπου:

P_q είναι η τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας,
P_y είναι η τιμή ενός εναλλακτικού αγαθού y (φυσικό αέριο), και
I είναι το εισόδημα των καταναλωτών.

a) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι του q ως προς τα P_q, P_y, I.
b) Να υπολογιστούν οι ελαστικότητες της ζήτησης επί της τιμής, επί του εισοδήματος και η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης.
c) Ποιες είναι οι τιμές των ε_{pq}, ε_I, ε_{qy}, όταν $P_q = 1$, $P_y = 1$, $I = 1$;
i) Τι φανερώνει το ε_{pq} για την ελαστικότητα της καμπύλης ζήτησης για ηλεκτρική ενέργεια σε αυτό το σημείο;
ii) Με βάση το ε_I, το αγαθό q (ηλεκτρική ενέργεια) είναι φυσιολογικό ή κατώτερο αγαθό;
iii) Με βάση το ε_{qy}, τα αγαθά q (ηλεκτρική ενέργεια) και y (φυσικό αέριο) είναι συμπληρωματικά ή υποκατάστατα αγαθά;
d) Ποια είναι η τιμή της ελαστικότητας της καμπύλης ζήτησης για ένα διαφορετικό συνδυασμό τιμών των P_q, P_y, I – πιο συγκεκριμένα, ποιά είναι η τιμή του ε_{pq}, όταν:

$$P_q = \frac{4}{5}, \; P_y = 1, \; I = 1$$

Εξακολουθεί αυτή η καμπύλη ζήτησης να είναι μοναδιαίως ελαστική; Αν όχι, τι είναι;

12) Έστω το διάνυσμα γραμμή

$$r' = [10\% \quad 20\% \quad 5\%]$$

στο οποίο εμφανίζονται οι ετήσιες αποδόσεις της μετοχής A, της μετοχής B και ενός τραπεζικού λογαριασμού. Ο πίνακας διακύμαν-

σης-συνδιακύμανσης των αποδόσεων της μετοχής Α, της μετοχής Β και του τραπεζικού λογαριασμού, ο οποίος εκφράζει των κίνδυνο από τη διακράτηση των επενδυτικών προϊόντων αυτών, είναι:

$$X = \begin{bmatrix} 1\% & 1,5\% & 0 \\ 1,5\% & 9\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω το διάνυσμα

$$\Pi' = [\alpha \quad \beta \quad 1-\alpha-\beta]$$

που αποτυπώνει το ποσοστό του κεφαλαίου ενός επενδυτή που έχει τοποθετηθεί στις μετοχές Α και Β και στην τράπεζα.

Να βρεθούν οι τιμές του διανύσματος που μεγιστοποιούν την ακόλουθη συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή

$$f(\alpha,\ \beta) = \Pi' r - \lambda \Pi' X \Pi$$

Δηλαδή, που μεγιστοποιούν την απόδοση του χαρτοφυλακίου υπό τον περιορισμό του κινδύνου που υφίσταται από τη διακράτηση του χαρτοφυλακίου.

Όπου λ ένας θετικός πραγματικός αριθμός που αποτυπώνει τις προτιμήσεις του επενδυτή ως προς τον κίνδυνο – ο συντελεστής αποστροφής του κινδύνου. Όσο μικρότερος (μεγαλύτερος) ο συντελεστής λ, τόσο περισσότερο (λιγότερο) κίνδυνο είναι διατεθειμένος να αναλάβει ο επενδυτής.

9 Ανάλυση ΙΙ: Ολοκλήρωση – Ολοκληρωτικός Λογισμός (Calculus II: Integration – Integral Calculus)

9.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο του βιβλίου, η παράγωγος (derivative) μιας συνάρτησης δεικνύει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης της. Αν θέλουμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία, και να εξάγουμε από το ρυθμό μεταβολής την αρχική συνάρτηση, πρέπει να εφαρμόσουμε ***ολοκλήρωση (integration)*** στη συνάρτηση της παραγώγου. Έτσι, μαθηματικά, η ολοκλήρωση είναι το αντίστροφο της παραγώγισης. Επομένως, τα ολοκληρώματα (integrals) είναι επίσης γνωστά και ως ***αντιπαράγωγοι (antiderivatives)***.

Συμπερασματικά,

- Αν $y = f(x)$ είναι η αρχική συνάρτηση,
- η πράξη $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ αποτελεί παραγώγιση της $f(x)$ ως προς το x.
- Η πράξη $\int f'(x)\,dx$ αποτελεί ολοκλήρωση της $f'(x)$ ως προς το x.

Παράδειγμα:

Η παράγωγος της $y = x^3$ είναι $f'(x) = 3x^2$. Επομένως, η αντιπαράγωγος της $f'(x)$ είναι $\int f'(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3$.

Ωστόσο, η παράγωγος και της $y = x^3 + 2$ είναι $f'(x) = 3x^2$ πάλι. Όμως, η αντιπαράγωγος της $f'(x) = 3x^2$ είναι $\int f'(x)dx = \int 3x^2\,dx = x^3$ και όχι $x^3 + 2$

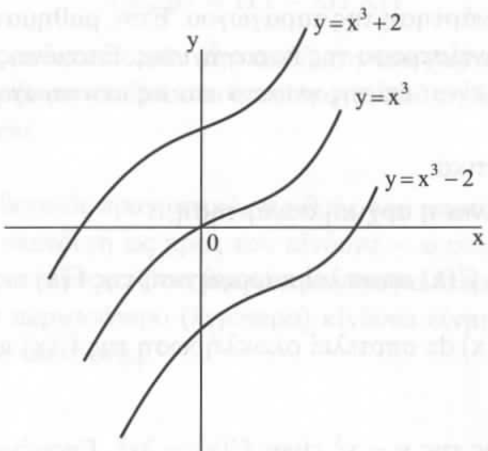
Αυτό ισχύει επειδή, όταν παραγωγίζουμε την $x^3 + 2$, ο ρυθμός μεταβολής της σταθεράς είναι μηδέν και εξαφανίζεται με την παραγώγιση (η παράγωγος μιας σταθεράς είναι 0). Έτσι, όταν εφαρμόζεται η ολοκλήρωση, χρειάζεται να προστεθεί μια σταθερά (γνωστή ως σταθε-

ρά της ολοκλήρωσης), έστω c. Για να βρεθεί η τιμή της c, απαιτούνται περαιτέρω πληροφορίες. Συνεπώς, κατά την ολοκλήρωση πρέπει να γράψουμε

$$y = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

Η συνάρτηση $y = x^3 + c$ δεν είναι μία, αλλά ένα σύνολο συναρτήσεων το οποίο εξαρτάται από την τιμή του c. Όταν το $c = 0$, $y = x^3$ και παριστάται γραφικά από τη μεσαία καμπύλη στο Διάγραμμα 9.1. Όταν $c = -2$, $y = x^3 - 2$, ενώ όταν $c = 2$, $y = x^3 + 2$. Οι γραφικές παραστάσεις των δύο τελευταίων συναρτήσεων φαίνονται επίσης στο Διάγραμμα 9.1, εκατέρωθεν της καμπύλης $y = x^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, το σημείο (0, 0).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.1: ***Οι συναρτήσεις του ολοκληρώματος $y = x^3 + c$***



Αν γνωρίζαμε επίσης ότι όταν $x = 1$, $y = 3$, αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση και λύνοντας ως προς c θα μας έδινε την τιμή του c. Δηλαδή, η αντικατάσταση στην $y = x^3 + c$ δίνει $3 = 1^3 + c$. Επομένως, $c = 2$. Η περαιτέρω αυτή πληροφόρηση που μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της τιμής του c λέγεται και **αρχική συνθήκη (initial condition ή boundary condition).**

Γενικά, κατά τη διαδικασία της ολοκλήρωσης πρέπει να προστεθεί

μία σταθερά στην αντιπαράγωγο της $f'(x)$, για να ληφθεί η αρχική συνάρτηση:

$$\int f'(x)\,dx = F(x) + c = f(x)$$

Αυτό είναι γνωστό και ως ***αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral)*** της συνάρτησης $f'(x)$.

9.2 Κανόνες ολοκλήρωσης – Αόριστο ολοκλήρωμα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε μια σειρά κανόνων, τους οποίους χρειάζεται να θυμόμαστε για την παραγώγιση συναρτήσεων. Ομοίως, στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε μια σειρά κανόνων, τους οποίους πρέπει να θυμόμαστε για την ολοκλήρωση συναρτήσεων. Οι πιο σημαντικοί είναι:

9.2.1 Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

$$\int a\,dx = ax + c \qquad a,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\int 1dx \equiv \int dx = x + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad \text{όπου} \quad n \neq -1$$

$$\int ax^n\,dx = a\int x^n\,dx = a\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad \text{όπου} \quad n \neq -1$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad (n = -1)$$

$$\int ax^{-1}\,dx = \int a\frac{1}{x}\,dx = a\ln|x| + c \qquad (n = -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|(f(x))| + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{(n+1)} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \kappa^{ax} dx = \frac{\kappa^{ax}}{a \ln \kappa} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c, \quad \text{καθώς } \ln e = 1$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \equiv \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \equiv \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

Ολοκλήρωση Αθροισμάτων, Διαφορών

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int (ax^n \pm bx^m) dx = \int ax^n dx \pm \int bx^m dx = a\int x^n dx \pm b \int x^m dx = a\frac{1}{(n+1)}x^{n+1} \pm b\frac{1}{(m+1)}x^{m+1} + c$$

Παραδείγματα

$$\int 3dx = 3x + c$$

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + c$$

$$\int 6x^3 dx = \frac{6}{4}x^4 + c$$

$$\int \frac{6}{x} dx = 6\ln|x| + c$$

$$\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + c$$

$$\int 5^{7x} dx = \frac{5^{7x}}{7 \ln 5} + c$$

$$\int (6x+3)^7 dx = \frac{1}{6 \cdot 8}(6x+3)^8 + c = \frac{1}{48}(6x+3)^8 + c$$

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

$$\int \frac{3x^2}{x^3} dx = \ln|x^3| + c$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$$

$$\int (5x^3 - 6x^4 + 10) dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{6}{5}x^5 + 10x + c$$

Σημείωση: Σ' ένα πρόβλημα ολοκλήρωσης μπορεί να επαληθευθεί η απάντηση παραγωγίζοντας τη λύση.

9.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση (Integration by Substitution)

Η ολοκλήρωση με αντικατάσταση αποτελεί την αντίστροφη διαδικασία του αλυσωτού κανόνα κατά την παραγώγιση συναρτήσεων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του γινομένου (ή του λόγου) δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων του x, όπως της $\int 3x^2(x^3-3)dx$.

Κανένας από τους κανόνες που έχουν οριστεί πιο πάνω δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Έστω η συνάρτησηση u(x) και η παράγωγός της $\frac{du}{dx}$, τότε

$$\int f(x)dx = \int u du = F(u) + c$$

Παραδείγματα:

1. Για την εύρεση του $\int 3x^2(x^3-3)dx$

Έστω $u = x^3 - 3$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$ και $dx = \frac{du}{3x^2}$

$$\int 3x^2(x^3-3)dx = \int 3x^2 \cdot u\frac{du}{3x^2} = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + c$$
$$= \frac{1}{2}(x^3-3)^2 + c$$

Η απάντηση μπορεί να ελεγχθεί παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα που μόλις βρήκαμε:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(x^3-3)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3x^2(x^3-3) = 3x^2(x^3-3)$$

Παρατηρούμε ότι στην αρχική συνάρτηση προς ολοκλήρωση – την $3x^2(x^3-3)$ – η $3x^2$ αποτελεί την παράγωγο της (x^3-3).

2. $\int \frac{x^2}{(2x^3-4)^2}dx = \int x^2(2x^3-4)^{-2}dx$

Έστω $u = 2x^3 - 4$, $\frac{du}{dx} = 6x^2$ και $dx = \frac{du}{6x^2}$

Έτσι, $\int x^2u^{-2}\frac{du}{6x^2} = \frac{1}{6}\int u^{-2}du = -\frac{1}{6}u^{-1} + c = -\frac{1}{6(2x^3-4)} + c$

3. $\int -3x(x-2)^3dx$

Έστω $u = x - 2$, $\frac{du}{dx} = 1$ και $dx = du$

$$\int -3x(x-2)^3dx = \int -3xu^3du = -3\int xu^3du$$

Η μέθοδος της αντικατάστασης δεν είναι χρήσιμη στην περίπτωση αυτή. Ο λόγος είναι ότι η αρχική συνάρτηση προς ολοκλήρωση δεν είναι δυνατόν να μετατραπεί σε σταθερό πολλαπλάσιο του $u\frac{du}{dx}$, ώστε να απαλοιφθεί και να καταστεί δυνατή η ολοκλήρωσή της.

9.2.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (Integration by parts)

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες αποτελεί την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων.

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης λαμβάνουμε

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Παραδείγματα:

1. $\int -3x(x-2)^3dx$

Είναι βολικό να χρησιμοποιηθεί η u(x) για την πιο απλή συνάρτηση

και η $v'(x)$ για την πιο πολύπλοκη. Εδώ $u(x) = -3x$, $v'(x) = (x-2)^3$,

$u'(x) = -3$ και $v(x) = \int (x-2)^3 dx = \frac{1}{4}(x-2)^4 + c_1$

Έτσι έχουμε

$$\int -3x(x-2)^3 dx = -3x\left[\frac{1}{4}(x-2)^2 + c_1\right] - \int \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 + c_1\right](-3)dx$$

$$= -\frac{3}{4}x(x-2)^2 - 3c_1x + \frac{3}{4}\int (x-2)^4 dx + 3c_1 \int dx$$

$$= -\frac{3}{4}x(x-2)^2 - 3c_1x + \frac{3}{20}(x-2)^5 + 3c_1x + c$$

$$= -\frac{3}{4}x(x-2)^2 + \frac{3}{20}(x-2)^5 + c$$

2. $\int 2xe^{x-1}dx$

Έστω $u(x) = 2x$, $v'(x) = e^{x-1}$

Τότε $u'(x) = 2$, $v(x) = \int e^{x-1}dx = e^{x-1} + c_1$

Αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο λαμβάνουμε:

$$\int 2xe^{x-1}dx = 2x[e^{x-1} + c_1] - \int (e^{x-1} + c_1)2dx$$

$$= 2xe^{x-1} + 2c_1x - 2e^{x-1} - 2c_1x + c$$

$$= 2xe^{x-1} - 2e^{x-1} + c = 2e^{x-1}(x-1) + c$$

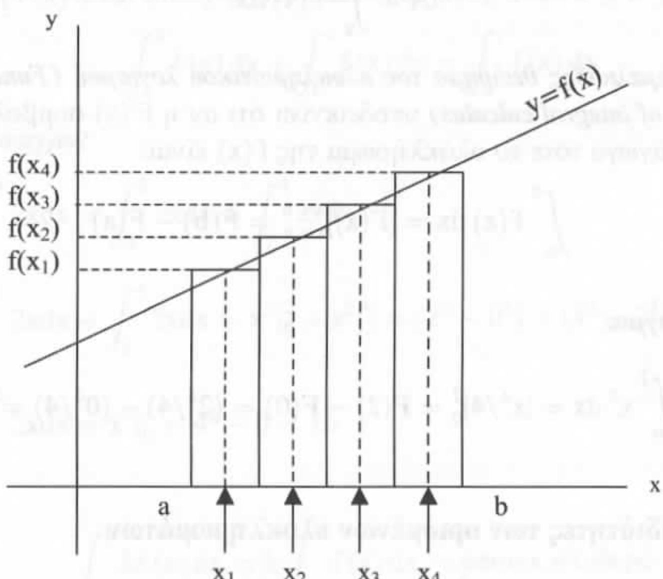
Οι παραπάνω κανόνες ολοκλήρωσης μπορεί να μην μπορούν να εφαρμοστούν σε περιπτώσεις πιο σύνθετων συναρτήσεων. Προχωρημένα βιβλία μαθηματικών και ειδικά λογισμικά ηλεκτρονικών υπολογιστών περιέχουν πίνακες ολοκληρωμάτων για ένα πολύ μεγάλο αριθμό συναρτήσεων.

9.3 Ορισμένο ολοκλήρωμα (Definite Integral)

9.3.1 Ολοκλήρωση ως διαδικασία αθροίσματος

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης της διαδικασίας της ολοκλήρωσης είναι ως η περιοχή μεταξύ του άξονα των x στο Καρτεσιανό πεδίο και της γραφική παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Ακόμη ένας τρόπος, είναι ως το άθροισμα όλων των χωρίων μεταξύ της καμπύλης, του άξονα x και δύο τιμών του x, έστω των a και b, στο Διάγραμμα 9.2.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.2: ***Ολοκλήρωση ως διαδικασία αθροίσματος***



Συνεπώς, στο Διάγραμμα 9.2:

1. Διαιρούμε το εύρος των τιμών του x μεταξύ των σημείων a και b της συνάρτησης $y = f(x)$ σε n υποδιαστήματα, μεγέθους Δx το καθένα.

2. Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο του μέσου του κάθε υποδιαστήματος, έστω $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

3. Αθροίζουμε τα εμβαδά των παραλληλόγραμμων $f(x_i)\Delta x$.

Αυτό συνεπάγεται ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι:

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

4. Έστω $\Delta x \to 0$ και ως αποτέλεσμα $n \to \infty$. Τότε:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Το όριο αυτό ονομάζεται ***ορισμένο ολοκλήρωμα (Definite integral)*** της $f(x)$ από το κατώτερο όριο a έως το ανώτερο όριο b, και συμβολίζεται με:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Το ***θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (Fundamental theorem of integral calculus)*** υποδεικνύει ότι αν η $F(x)$ συμβολίζει την αντιπαράγωγο τότε το ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Παράδειγμα:

$$\int_0^2 x^3\,dx = [x^4/4]_0^2 = F(2) - F(0) = (2^4/4) - (0^4/4) = 4$$

9.3.2 Ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων

- $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Παράδειγμα:

Να δειχθεί ότι $\int_2^4 3x^2dx = -\int_4^2 3x^2dx$

$$\int_2^4 3x^2dx = [x^3]_2^4 = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

$$-\int_4^2 3x^2dx = [-x^3]_4^2 = -2^3 - (-4^3) = -8 + 64 = 56$$

Επομένως, οι δύο τρόποι υπολογισμού δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

- $$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

Παράδειγμα:

$$\int_2^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 2^2) = 0$$

- Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα [a, c], όπου $a \le b \le c$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Παράδειγμα:

$$\int_0^4 2xdx = \int_0^2 2xdx + \int_2^4 2xdx$$

$$\int_0^2 2xdx + \int_2^4 2xdx = x^2|_0^2 + x^2|_2^4 = (2^2 - 0^2) + (4^2 - 2^2) = 16$$

$$\int_0^4 2xdx = x^2|_0^4 = 4^2 - 0 = 16$$

- $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{όπου κ σταθερό}$$

Παράδειγμα:

$$\int_0^1 3(x-1)dx = \frac{3}{2}(x-1)^2|_0^1 = \frac{3}{2}(1-1)^2 - \frac{3}{2}(0-1)^2$$

$$= 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 3(x-1)dx = 3\int_0^1 (x-1)dx = 3\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_0^1$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}(1-1)^2 - \frac{1}{2}(0-1)^2\right] = 3\left(0-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Παράδειγμα:

Έστω: $f(x) = 3x,\ g(x) = x^2$

$$\int_0^1 (3x+x^2)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{3}\cdot 0^2 = \frac{11}{6}$$

$$\int_0^1 3xdx + \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{3}{2}\cdot 0^2\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = \frac{11}{6}$$

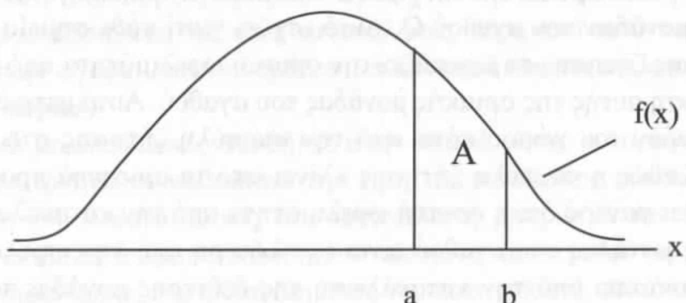
9.4 Εφαρμογές

9.4.1 Υπολογισμός πιθανοτήτων

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται στη στατιστική στον υπολογισμό πιθανοτήτων συνεχών κατανομών, όπως για παράδειγμα στην κανονική κατανομή. Στο Διάγραμμα 9.3 παρουσιάζεται η κατανομή $f(x)$ της μεταβλητής x. Η πιθανότητα να λάβει η μεταβλητή x μια τιμή στο διάστημα a με b (συμβολιζόμενη ως $P(a \le x \le b)$) υπολογίζεται ως το εμβαδόν (A), μεταξύ του άξονα x της καμπύλης της κατανομής ($f(x)$) και των σημείων a και b. Το εμβαδόν αυτό υπολογίζεται ως εξής:

$$A = P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.3: ***Υπολογισμός πιθανοτήτων με ολοκλήρωση***



Παράδειγμα:

Η συνάρτηση πιθανότητας που περιγράφει το χρόνο αναμονής σε ταμείο ενός πολυκαταστήματος ως συνάρτηση του χρόνου σε λεπτά είναι $f(x) = \frac{1}{64}x^3$, όπου $0 \le x \le 4$. Η πιθανότητα αναμονής στην ουρά μεταξύ 2 και 3 λεπτών υπολογίζεται ως εξής:

$$P(2 \le x \le 3) = \int_2^3 \frac{1}{64}x^3dx = \left[\frac{1}{256}x^4\right]_2^3 = \frac{1}{256}(3^4 - 2^4) = 0{,}2539$$

Δηλαδή η πιθανότητα αναμονής μεταξύ 2 και 3 λεπτών στην ουρά είναι 25,39%

9.4.2 Πλεόνασμα καταναλωτή και παραγωγού (Consumer and producer surplus)

Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι η χρήση της αγοράς για την ανταλλαγή αγαθών έχει πλεονεκτήματα, τα οποία απολαμβάνονται και από τους καταναλωτές αλλά και από τους παραγωγούς που τροφοδοτούν την αγορά. Αυτά μπορεί να μετρηθούν με τη χρήση ολοκληρωμάτων.

Ας εξετάσουμε την πιο απλή μορφή του διαγράμματος της αγοράς, όπου οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς περιγράφονται από ευθείες γραμμές. Στο Διάγραμμα 9.4 το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης ζήτησης, του άξονα των ποσοτήτων (Q), και της ποσότητας ισορροπίας

στην αγορά (Q^e) (δηλαδή η περιοχή $A0Q^eB$ στο διάγραμμα) παρουσιάζει τη συνολική ωφελιμότητα για τον καταναλωτή από την κατανάλωση Q^e μονάδων του αγαθού Q. Αυτό ισχύει γιατί κάθε σημείο επί της καμπύλης ζήτησης παρουσιάζει την οριακή ωφελιμότητα από την κατανάλωση αυτής της οριακής μονάδας του αγαθού. Αυτό μετριέται από το εμβαδόν του χώρου κάτω από την καμπύλη ζήτησης στο σημείο αυτό. Καθώς η καμπύλη ζήτησης κλίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, είναι φανερό ότι η οριακή ωφελιμότητα από την κατανάλωση της πρώτης μονάδας του αγαθού είναι υψηλότερη από την ωφελιμότητα που προκύπτει από την κατανάλωση της δεύτερης μονάδας του αγαθού, κλπ. Αυτός είναι ο νόμος της φθίνουσας οριακής ωφελιμότητας του καταναλωτή, εξ' ου και η φθίνουσα κλίση της καμπύλης ζήτησης.

Το άθροισμα λοιπόν όλων των οριακών αυτών χώρων, δηλαδή το εμβαδόν του χώρου κάτω από την καμπύλη ζήτησης μεταξύ του 0 και του Q^e, αντιπροσωπεύει τη συνολική ωφελιμότητα από την κατανάλωση Q^e μονάδων του αγαθού. Όταν αφαιρεθεί από αυτό το εμβαδόν, το εμβαδόν της περιοχής P^e0Q^eB (το οποίο μπορεί να υπολογιστεί ως $P^e \times Q^e$, δαπάνη για το αγαθό που καταναλώνεται– το εναπομένον

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.4: ***Καμπύλες προσφοράς και ζήτησης και διαφοροποίηση στην τιμή***

εμβαδόν όπου P^e είναι η τιμή ισορροπίας) –που αντιπροσωπεύει τη συνολική (δηλαδή ο χώρος AP^eB) δείχνει την επιπρόσθετη ωφελιμότητα που προκύπτει για τους καταναλωτές, πέρα από αυτό που πλήρωσαν στην αγορά. Αυτό ονομάζεται ***πλεόνασμα του καταναλωτή (Consumer's surplus)***.

Υπό μονοπωλιακές συνθήκες στην αγορά, όπου ο παραγωγός έχει τη δυνατότητα να καθορίσει την τιμή του προϊόντος που πουλάει, η γνώση του πλεονάσματος του καταναλωτή μπορεί να τον βοηθήσει στην επιβολή διαφορετικών τιμών πώλησης του αγαθού με σκοπό να αποκτήσει μέρος του πλεονάσματος του καταναλωτή. Αυτό ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι οι αγορές στις οποίες πωλείται το προϊόν μπορεί να διαχωριστούν μεταξύ τους. Υπό άλλες συνθήκες θα δημιουργούνταν κερδοσκοπικό εμπόριο του αγαθού μεταξύ των δυο αγορών, με αποτέλεσμα να εξισωθούν οι τιμές μεταξύ τους. Έτσι, ο παραγωγός με μονοπωλιακή δύναμη μπορεί, αντί να πωλήσει στην τιμή P^e όλες τις μονάδες του αγαθού που ανταλλάσσονται στην αγορά (Q^e), να θέσει διαφορετικές τιμές για το ίδιο προϊόν. Την P_1, P_2 και P^e, ας πούμε, πωλώντας αντίστοιχα Q_1, Q_1Q_2 και Q_2Q^e ποσότητες στις τρεις ξεχωριστές αγορές. Ως αποτέλεσμα, ένα μεγάλο μέρος από το πλεόνασμα του καταναλωτή περνάει στον παραγωγό. Αυτό αποτελείται από το άθροισμα των χωρίων P_2CFP^e και P_1P_2ED. Αυτές οι περιοχές, υπό συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού στην αγορά, όπου ανταλλάσσεται η ποσότητα Q^e στην ενιαία τιμή που ορίζεται από την ανταγωνιστική αγορά P^e, ανήκουν στον καταναλωτή.

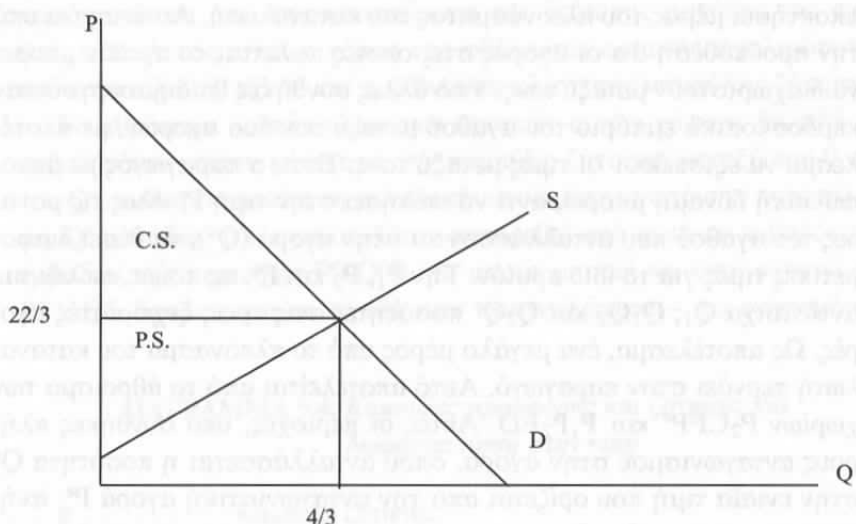
Το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης προσφοράς, του άξονα των ποσοτήτων και της ποσότητας ισορροπίας, δείχνει το συνολικό κόστος (περιλαμβανομένου και του κέρδους) της παραγωγής Q^e μονάδων του προϊόντος Q. Το συνολικό έσοδο που λαμβάνουν οι παραγωγοί μπορεί να παρασταθεί ως το εμβαδόν $P^e \times Q^e$. Η διαφορά μεταξύ συνολικού εσόδου και συνολικού κόστους αντιπροσωπεύει το επιπλέον έσοδο που λαμβάνουν οι παραγωγοί, πέραν του ότι είναι διατεθειμένοι να προσφέρουν για το προϊόν. Αυτό είναι γνωστό και ως ***πλεόνασμα του παραγωγού (producer's surplus)***.

Το άθροισμα του πλεονάσματος του καταναλωτή και του παραγωγού μετράει τα οφέλη από τη χρήση της αγοράς για την ανταλλαγή του υπό συζήτηση αγαθού.

Παράδειγμα:

Έστω ότι η ζήτηση για κάποιο αγαθό περιγράφεται από τη συνάρτηση $P_d = 10 - 2Q$, ενώ η προσφορά για το ίδιο αγαθό περιγράφεται από τη συνάρτηση $P_s = 2 + 4Q$. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 9.5.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.5: ***Πλεόνασμα του παραγωγού και πλεόνασμα του καταναλωτή***



Η ισορροπία της αγοράς υφίσταται στο: $P^d = P^s = P$ Δηλαδή, $10 - 2Q = 2 + 4Q$.

Συνεπώς, ανταλλάσσονται στην αγορά $Q^e = 4/3$ μονάδες του προϊόντος, στην τιμή $P^e = 22/3$. Τα ποσό που εισπράττει ο παραγωγός και πληρώνει ο καταναλωτής για τη συναλλαγή αυτή στην αγορά είναι $Q^e \times P^e = 4/3 \times 22/3 = 88/9$.

Το πλεόνασμα του καταναλωτή υπολογίζεται ως εξής:

$$CS = \int_0^{4/3} (10 - 2Q)\, dQ - (4/3)(22/3)$$

$$= [10Q - Q^2]_0^{4/3} - 88/9 = 1{,}78$$

Επίσης, το πλεόνασμα του παραγωγού υπολογίζεται ως:

$$PS = (88/9) - \int_0^{4/3} (2 + 4Q)\, dQ$$

$$= (88/9) - [2Q + 2Q^2]_0^{4/3} = 3{,}56$$

Το συνολικό όφελος της κοινωνίας από τη χρήση της αγοράς ισούται με:

$$CS + PS = 1{,}78 + 3{,}56 = 5{,}34$$

Σημείωση: Στο παραπάνω παράδειγμα τα πλεονάσματα του καταναλωτή και παραγωγού θα μπορούσαν να είχαν υπολογιστεί με απλές γεωμετρικές μεθόδους, ως τα εμβαδά των σχετικών τριγώνων στο Διάγραμμα 8.5. Όμως, για εκπαιδευτικούς λόγους επιλέχθηκε η παρουσίαση των υπολογισμών μέσω της χρήσης ολοκληρωμάτων. Η μέθοδος αυτή γενικεύεται για καμπύλες προσφοράς και ζήτησης οιονδήποτε σχήματος.

9.4.3 Υπολογισμός συνολικού (εσόδου/κόστους) από οριακό (έσοδο/κόστος) – (Deriving totals from marginals, Revenue/Cost)

Ξέρουμε από την οικονομική θεωρία (και το προηγούμενο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού) ότι το οριακό έσοδο (MR), είναι η παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού εσόδου (TR). Επομένως, η αντιπαράγωγος της συνάρτησης του MR δίνει τη συνάρτηση του TR.

Ομοίως, το οριακό κόστος (MC), είναι η παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού κόστους (TC). Επομένως, η αντιπαράγωγος της συνάρτησης του MC δίνει τη συνάρτηση του TC.

Παράδειγμα:

Έστω $MC = 100 + x$

$$TC = \int MC\, dx = \int (100 + x)\, dx$$

$$TC = 100x + (1/2)x^2 + c$$

Εάν γνωρίζουμε επιπλέον ότι $TC = 40.000$, όταν $x = 100$, τότε αντι-

καθιστώντας στην τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$40.000 = 100(100) + (1/2)100^2 + c$$

Επομένως:

$$c = 40.000 - 10.000 - 5.000 = 25.000$$

Άρα:

$$TC = (1/2)x^2 + 100x + 25.000$$

9.4.4 Υπολογισμός σωρευτικών ποσών από αύξουσες και φθίνουσες διαδικασίες (Calculating cumulative totals from growth and decay processes)

Παράδειγμα:

Τα ετήσια κόστη συντήρησης (σε χιλιάδες ευρώ) για ένα στόλο αυτοκινήτων αυξάνουν εκθετικά καθώς η ηλικία του στόλου (t), αυξάνεται, σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$f(t) = 100e^{0,08t}$$

1. Τι ετήσια κόστη συντήρησης θα εμφανιστούν κατά τη διάρκεια του πέμπτου έτους λειτουργίας;
2. Ποιο είναι το συνολικό κόστος συντήρησης στα πρώτα 5 έτη λειτουργίας;

Απαντήσεις:

1. *Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη κόστους του Διαγράμματος 9.6 μεταξύ t = 4 και t = 5 εκτιμά το κόστος κατά τη διάρκεια του πέμπτου έτους λειτουργίας. Επομένως,*

$$C = \int_4^5 100e^{0,08t} = [1250e^{0,08t}]_4^5$$

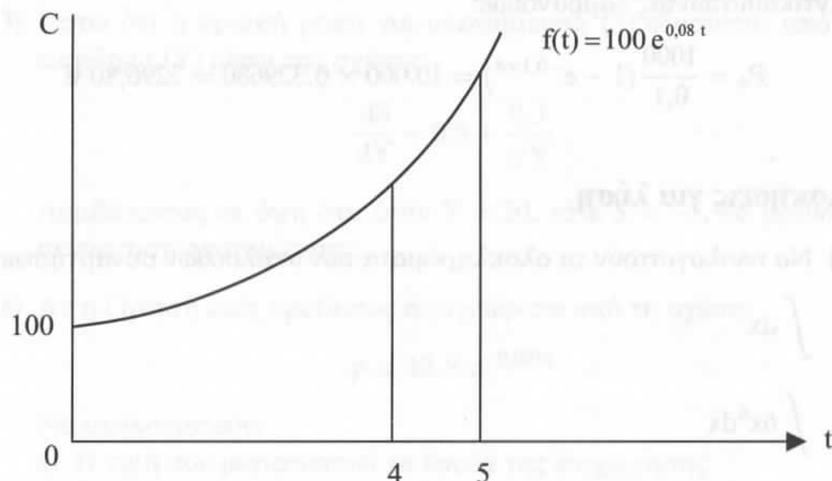
$$= (1864,8 - 1721,4) = €143,4 \text{ χιλιάδες}$$

2. *Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη κόστους μεταξύ t = 0 και t = 5 εκτιμά το κόστος λειτουργίας στα πρώτα 5 έτη. Επομένως,*

$$C = \int_0^5 100e^{0,08t} = [1250e^{0,08t}]_0^5$$

$$= (1864,8 - 1250) = €614,8 \text{ χιλιάδες}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.6: ***Καμπύλη κόστους συντήρησης του στόλου αυτοκινήτων***



9.4.5 Υπολογισμός Παρούσας Αξίας Χρηματοροών

Η παρούσα αξία ενός ποσού (P) λαμβανομένου μετά από t περιόδους (π.χ. έτη) στο μέλλον, με διαρκή προεξόφληση, υπολογίζεται ως $P = Se^{-rt}$, όπου P = παρούσα αξία του ποσού, S = μελλοντική αξία του ποσού, r = επιτόκιο προεξόφλησης, t = χρόνια.

Παράδειγμα:

1. S = € 1.000 λαμβανόμενα σε t = 4 έτη, δεδομένου ότι το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης για την περίοδο είναι r = 10%, έχουν σημερινή αξία $P = Se^{-rt} \Rightarrow P = 1.000e^{-0,1\times4} = 1.000 \times 0,67032 = €\ 670,32$

2. Η παρούσα αξία μιας ροής € 1.000 ανά έτος για 4 έτη υπολογίζεται ως εξής:

Απαντήσεις:

$$P_n = \int_0^n Se^{-rt}dt = S\int_0^n e^{-rt}dt = S\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^n = -\frac{S}{r}\left[e^{-rt}\right]_0^n$$

$$= -\frac{S}{r}(e^{-rn} - e^{r(0)}) = \frac{S}{r}(1 - e^{-rn})$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$P_4 = \frac{1000}{0,1}(1 - e^{-0,1\times 4}) = 10.000 \times 0,329680 = 3296,80\ €$$

Ασκήσεις για λύση

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα των ακόλουθων συναρτήσεων:

$\int dx$

$\int 6x^6 dx$

$\int 7x^{-1} dx$

$\int (3x+2)^{10} dx$

$\int \frac{8x^7}{x^8} dx$

$\int (6x^3 - 7x^2 + 3x + 1)dx$

$\int_1^4 5x^3 dx$

$\int_{-1}^1 (2x+3)dx$

2) Έστω οι ακόλουθες συναρτήσεις οριακού κόστους

$$MC = 2 + 0,4Q$$

$$MC = 2 - 4Q + 3Q^2$$

Να βρεθεί το συνολικό κόστος όταν η παραγωγή είναι (a) 4 και (b) 10.

3) Έστω ότι η οριακή ροπή για αποταμίευση (S) εξαρτάται από το εισόδημα (Y) μέσω της σχέσης:

$$\frac{dS}{dY} = 0,5 + \frac{0,3}{\sqrt{Y}}$$

Λαμβάνοντας υπ όψη ότι, όταν Y = 30, τότε S = –5, να βρεθεί η συνάρτηση αποταμίευσης.

4) Αν η ζήτηση ενός προϊόντος περιγράφεται από τη σχέση:

$$p = 12,50e^{-0,005q}$$

Να υπολογιστούν:

a) Η τιμή που μεγιστοποιεί τα έσοδα της επιχείρησης.
b) Τα μέγιστα έσοδα της επιχείρησης.
c) Η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.
d) Το πλεόνασμα του καταναλωτή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

5) Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού (P) μιας πόλης είναι $1 + 3\sqrt{t}$ κάτοικοι τον χρόνο. Ο σημερινός πληθυσμός είναι 10.000 κάτοικοι. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της πόλης σε 10 χρόνια;

6) Η συνάρτηση οριακού κόστους (MC) για την παραγωγή Q μονάδων προϊόντος είναι $MC = -4Q^{-2} - 0,3 + Q$, και το μέσο κόστος (AC) για την παραγωγή 1 μονάδας προϊόντος είναι 6,2. Να υπολογιστεί η συνάρτηση συνολικού κόστους (TC).

7) Η ζήτηση για ένα προϊόν x καθορίζεται από την εξίσωση $y^d = 25 - 6x$ και η προσφορά για το ίδιο προϊόν είναι $y^s = 2 + 7x$.

a) Να βρεθεί η λύση ώστε να υπάρχει ισορροπία στην αγορά.

b) Να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού και του καταναλωτή στην αγορά.

8) Εάν οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός αγαθού είναι αντίστοιχα

$$P = 10 - Q - Q^2$$
$$P = Q + 2$$

να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή και παραγωγού στην τιμή ισορροπίας.

ΔΕ (ΚΕΦ 11) κλειστ

σελ 417 Παραδείγματα (κάτω-κάτω) 1. και 2.

σελ 427 Παράδειγμα 3.

ΔΕ (ΚΕΦ 10)

σελ 393 (κάτω-κάτω) – 396 (πριν 10.6)

Παράδειγμα 2 – εξέταση: Δεύτερης ισορροπίας στο υπόδειγμα.

σελ 388 Παράδειγμα – Εφαρμογή 1: Προσδιορισμός της εξίσωσης

10 Διαφορικές Εξισώσεις (Differential Equations)

10.1 Εισαγωγή

Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν ευρεία εφαρμογή στις επιχειρήσεις και στα οικονομικά. Εφόσον είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής μια συνάρτησης, μπορεί να εξαχθεί η (αρχική) συνάρτηση από την οποία προήρθε ο ρυθμός μεταβολής. Παραδείγματα αποτελούν: Ο προσδιορισμός της συνάρτησης ζήτησης ενός προϊόντος από την ελαστικότητα της ζήτησης του προϊόντος αυτού. Ο προσδιορισμός των συναρτήσεων συνολικών εξόδων και εσόδων από τις συναρτήσεις οριακών εξόδων και εσόδων, αντίστοιχα. Μέσω διαφορικών εξισώσεων μπορεί να καθοριστεί η δυναμική ευστάθεια μικροοικονομικών υποδειγμάτων ισορροπίας της αγοράς για ένα προϊόν. Στα μακροοικονομικά, η τροχιά του ρυθμού ανάπτυξης μιας οικονομίας μπορεί να προσδιοριστεί μέσω διαφορικών εξισώσεων. Σε επιχειρηματικά προβλήματα, ενδιαφέρει τη διοίκηση μιας επιχείρησης ο διαχρονικός ρυθμός μεταβολής της ζήτησης για το προϊόν το οποίο παράγει. Για παράδειγμα, είναι χρήσιμο να γνωρίζει ένα ορυχείο το ρυθμό εξάντλησης των ορυκτών πόρων –της πρώτης ύλης– που εκμεταλλεύεται. Επίσης, ενδιαφέρει τους επενδυτές να καταλάβουν το ρυθμό ενσωμάτωσης της πληροφορίας που εμφανίζεται στην αγορά στις τιμές των μετοχών. Μαθηματικά, οι ***ρυθμοί αυτοί των μεταβολών (rates of change)*** περιγράφονται μέσω διαφορικών εξισώσεων.

10.2 Εισαγωγικοί ορισμοί και έννοιες

Μια εξίσωση ονομάζεται ***διαφορική εξίσωση*** όταν εκφράζει μια άμεση ή έμμεση σχέση μεταξύ μιας συνάρτησης, έστω $y = f(t)$, και μιας ή περισσότερων παραγώγων της ή των διαφορικών της. Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι ακόλουθες συναρτησιακές σχέσεις:

$$\frac{dy}{dt} = 4t + 2 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 10 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 6 = y \qquad (3)$$

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - 3t = 6 \qquad (4)$$

$$2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^6 + 7\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^5 + 18t = 0 \qquad (5)$$

Μια διαφορική εξίσωση η οποία περιέχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται ***συνήθης ή απλή διαφορική εξίσωση (ordinary differential equation)***. Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν παραδείγματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπου σε κάθε περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, t.

Η μεταβλητή y είναι γνωστή και ως ***μεταβλητή κατάστασης (state variable)*** διότι περιγράφει την κατάσταση του φαινομένου που εκφράζει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Η ***τάξη (order)*** της διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της υψηλότερης παραγώγου ή του διαφορικού που εμφανίζεται στην εξίσωση. Για παράδειγμα, η τάξη της διαφορικής εξίσωσης (1) ισούται με 1 – είναι 1ης τάξης, ενώ η διαφορική εξίσωση (2) είναι 2ης τάξης. Η εξίσωση (1) επομένως αποτελεί μια συνήθη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, ενώ η (2) αποτελεί επίσης μια συνήθη διαφορική εξίσωση, όμως 2ης τάξης.

Ο ***βαθμός (degree)*** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η παράγωγος της μεγαλύτερης τάξης της διαφορικής εξίσωσης. Για παράδειγμα: Οι διαφορικές εξισώσεις (1) και (2) είναι 1ου βαθμού, ενώ η εξίσωση (3) είναι 2ου βαθμού. Η εξίσωση (4) είναι επίσης 1ου βαθμού καθώς η παράγωγος της μεγαλύτερης τάξης $\frac{d^2y}{dt^2}$ είναι υψωμένη στη δύναμη 1 (ένα). Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) είναι 1ης τάξης και 1ου βαθμού. Η (2) είναι 2ης τάξης και 1ου βαθμού, η (5) είναι 3ης τάξης και 5ου βαθμού, κλπ.

Ως ***γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (first-order linear differential equation)*** ορίζεται η διαφορική εξίσωση στην οποία οι όροι $\frac{dy}{dt}$ και y είναι πρώτου βαθμού και δεν εμφανίζονται γινόμενα της μορφής $y\frac{dy}{dt}$, δηλαδή είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους της.

Διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιέχουν το γινόμενο του y και του $\frac{dy}{dt}$ (όπως το γινόμενο $y\frac{dy}{dt}$) ή τη μεταβλητή y υψωμένη σε κάποια δύναμη (διαφορετική από το 1), είναι ***μη γραμμικές***. Για παράδειγμα, οι ακόλουθες εξισώσεις αποτελούν μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dy}{dt} = y^2t \qquad (6)$$

$$t^3dy + y^3dt = 0 \qquad (7)$$

Η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση ν-οστής τάξης με ***σταθερούς συντελεστές*** είναι της μορφής:

$$\frac{d^\nu y}{dt} + a_1\frac{d^{(\nu-1)}y}{dt} + \ldots + a_{\nu-1}\frac{dy}{dt} + a_\nu y = g(t) \qquad (8)$$

Οι συντελεστές a_i $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$ μπορεί να είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t, οπότε λέγεται ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση ν-οστής τάξης με μεταβλητούς συντελεστές. Για παράδειγμα, η ακόλουθη εξίσωση αποτελεί διαφορική εξίσωση ν-οστής τάξης με μεταβλητούς συντελεστές.

$$\frac{d^\nu y}{dt} + a_1(t)\frac{d^{\nu-1}y}{dt} + \ldots + a_{\nu-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_\nu(t)y = g(t) \qquad (9)$$

Εφόσον $g(t) = 0$ στην εξίσωση (8), λέγεται ότι έχουμε μια ***ομογενή (homogeneous)*** διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Δηλαδή

$$\frac{d^{\nu}y}{dt} + a_1\frac{d^{\nu-1}y}{dt} + \ldots + a_{\nu-1}\frac{dy}{dt} + a_{\nu}y = 0 \qquad (10)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (2) και (3) αποτελούν παραδείγματα ομογενών διαφορικών εξισώσεων. Οι διαφορικές εξισώσεις (1), (4) και (5) είναι μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και τις μερικές παραγώγους τους, ονομάζονται ***μερικές (partial)*** διαφορικές εξισώσεις. Παράδειγμα μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης αποτελεί η ακόλουθη εξίσωση:

$$y\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial y} - ku = 0 \qquad (11)$$

όπου k σταθερά και $u(y, t)$ συνάρτηση των μεταβλητών y και t.

Όταν η μεταβλητή t εμφανίζεται απευθείας ως ανεξάρτητη μεταβλητή σε μια διαφορική εξίσωση, τότε η διαφορική εξίσωση ονομάζεται ***μη αυτόνομη (non-autonomous)***. Οι εξισώσεις (1), (4) και (5) είναι μη αυτόνομες. Εφόσον η μεταβλητή t εμφανίζεται στην εξίσωση μέσω της y, ως y(t), η διαφορική εξίσωση ονομάζεται ***αυτόνομη (autonomous)***. Η εξίσωση (3) είναι αυτόνομη.

10.3 Διαφορικές εξισώσεις και ολοκληρώματα

Ας δούμε την έννοια των διαφορικών εξισώσεων μέσω μιας εφαρμογής τους και πώς συνδέονται με την έννοια της ολοκλήρωσης των συναρτήσεων που έχουμε δει στο βιβλίο αυτό. Ας υποθέσουμε ότι χρειάζεται να υπολογιστεί το συνολικό ποσό (του κεφαλαίου) που συσσωρεύεται σε ένα διάστημα χρόνου, έστω από $t = t_0$ σε $t = t_n$. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος του ρυθμού μεταβολής από τη χρονική στιγμή $t = t_0$ στην $t = t_n$, το οποίο προκύπτει ως εξής:

Η συνολική ποσότητα Q που συσσωρεύεται κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος Δt είναι περίπου ίση με $\frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta t = \Delta Q$.

Δηλαδή, ισχύει:

(Ρυθμός Μεταβολής) × (Διάστημα του Χρόνου) = Μεταβολή στο Q

Η σωρευτική αξία του Q στη χρονική στιγμή t_n προκύπτει ως το άθροισμα των ποσοτήτων που συσσωρεύονται σε κάθε μικρό διάστημα χρόνου $\Delta t_0, \Delta t_1, \ldots, \Delta t_n$. Έτσι

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta Q}{\Delta t_i}\Delta t_i$$

Η ακριβής ποσότητα που συσσωρεύεται μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας ότι τα χρονικά διαστήματα γίνονται απειροελάχιστα, ώστε το $n \to \infty$. Έτσι, στα παραπάνω μπορεί να αντικατασταθεί ο τελεστής άθροισης $\sum$ με το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int$ και προκύπτει:

$$\text{Συνολική ποσότητα } Q = \int_{t=t_1}^{t=t_n} (\text{Ρυθμός μεταβολής } Q) \times dt = \int_{t=t_1}^{t=t_n} \frac{dQ}{dt}dt$$

Επομένως, η συνολική ποσότητα (που συσσωρεύεται) μεταξύ δύο χρονικών σημείων μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής μεταξύ των δύο χρονικών σημείων.

Παράδειγμα 1 – Εφαρμογή: Κατανάλωση καυσίμου για δεξαμενόπλοιο:

Με βάση τις τεχνικές προδιαγραφές του, ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμου (σε τόνους) για ένα νεότευκτο δεξαμενόπλοιο, σε μηνιαία βάση, δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\text{Μηνιαίος Ρυθμός Κατανάλωσης Καυσίμου} = \frac{dQ}{dt} = 1.000e^{0,02\,t},$$

όπου t = μήνες.

α. Δείξτε σε γράφημα το ρυθμό κατανάλωσης καυσίμου για δύο έτη – δηλαδή, για $0 \leq t \leq 24$.

β. Ποιά εξίσωση περιγράφει την κατανάλωση καυσίμου, δεδομένου ότι για $t = 0$, $Q = 0$;

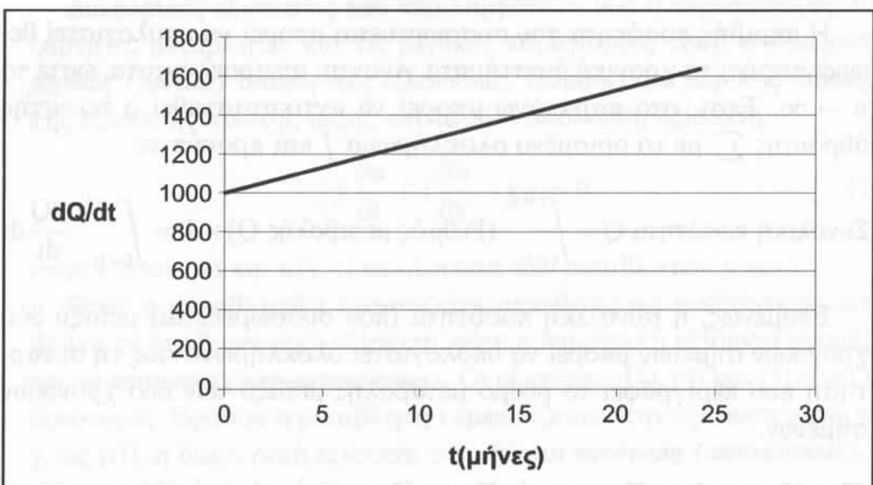
γ. Να υπολογιστεί η συνολική κατανάλωση καυσίμου στο πρώτο έτος λειτουργίας του δεξαμενόπλοιου.

δ. Ποιά η κατανάλωση καυσίμου στο δεύτερο έτος λειτουργίας του και ποιά η συνολική κατανάλωση στα δύο έτη;

Απάντηση:

α. *Η κατανάλωση καυσίμου ανά μήνα εμφανίζεται στο Διάγραμμα 1.*

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.1: Μηνιαίος Ρυθμός Κατανάλωσης καυσίμου για δεξαμενόπλοιο



β. *Η εξίσωση που θα περιγράφει την κατανάλωση καυσίμου ονομάζεται* ***ορισμένη λύση*** *της διαφορικής εξίσωσης* $\frac{dQ}{dt} = 1.000\, e^{0,02\,t}$. *Για την εύρεση της υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα της παραπάνω εξίσωσης. Έτσι:*

$$\int \frac{dQ}{dt} dt = \int 1.000\, e^{0,02\,t} dt \Rightarrow Q = 50.000\, e^{0,02\,t} + c$$

όπου c η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Για τον υπολογισμό της ορισμένης λύσης χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη, όπου για t = 0, Q = 0. Έτσι, με αντικατάσταση προκύπτει:

$$0 = 50.000 e^{0,02(0)} + c \Rightarrow c = -50.000 \;\; \text{και}$$

$$Q = 50.000 e^{0,02t} - 50.000 \Rightarrow Q = 50.000(e^{0,02t} - 1)$$

γ. *Η συνολική κατανάλωση καυσίμου στους πρώτους 12 μήνες λειτουργίας του πλοίου είναι:*

$$\int_{t=0}^{t=12} \frac{dQ}{dt} dt = \int_{t=0}^{t=12} 1.000\, e^{0,02\,t} dt = 50.000(e^{0,02\,t} - 1)\Big|_{t=0}^{t=12}$$

$$= 50.000\,[e^{0,02(12)} - e^{0,02(0)}] = 13.562,46 \text{ τόνοι καυσίμου}$$

δ. *Η συνολική κατανάλωση καυσίμου στο δεύτερο έτος (δηλαδή, από τον 13ο έως τον 24ο μήνα συμπεριλαμβανομένου) υπολογίζεται ως:*

$$\int_{t=12}^{t=24} 1.000\, e^{0,02t} dt = 50.000(e^{0,02t} - 1)\Big|_{t=12}^{t=24} = 50.000\,[e^{0,02(24)} - e^{0,02(12)}]$$

$$= 30.803,72 - 13.562,46 = 17.241,26 \text{ τόνοι καυσίμου}$$

Η συνολική κατανάλωση καυσίμου στα δύο έτη είναι

$$30.803,72 (= 13.562,46 + 17.241,26) \text{ τόνοι καυσίμου}$$

Παράδειγμα 2 — Εφαρμογή: Προσδιορισμός του συνολικού κόστους από το οριακό κόστος παραγωγής ενός αγαθού

Το οριακό κόστος (marginal cost) παραγωγής ενός αγαθού δίνεται από την εξίσωση

$$MC = \frac{100}{Q} = 100Q^{-1},$$

όπου Q οι μονάδες παραγωγής του αγαθού αυτού.

α. Ποιά η διαφορική εξίσωση του συνολικού κόστους παραγωγής, ως προς την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος Q;

β. Ποιά η εξίσωση του συνολικού κόστους (TC), εάν είναι γνωστό ότι όταν Q = 100, το συνολικό κόστος είναι TC = 5.000;

Απάντηση:

α. *Αξιοποιώντας τον ορισμό του οριακού κόστους, η διαφορική εξίσωση του συνολικού κόστους είναι:*

$$MC = \frac{100}{Q} \Rightarrow MC = \frac{d(TC)}{dQ} = \frac{100}{Q}$$

β. *Για την εύρεση της εξίσωσης του συνολικού κόστους πρέπει να επιλυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση.*

$$\frac{d(TC)}{dQ} = \frac{100}{Q} \Rightarrow \int \frac{d(TC)}{dQ} dQ = \int (MC) dQ = \int \frac{100}{Q} dQ$$

$$\Rightarrow TC = 100ln(Q) + c$$

*Η παραπάνω αποτελεί τη **γενική λύση** όπως λέγεται της διαφορικής εξίσωσης.*

*Για την εύρεση της **ορισμένης λύσης** αξιοποιείται η συνθήκη $TC = 5.000$ όταν $Q = 100$, και με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση προκύπτει:*

$$5.000 = 100ln(100) + c \Rightarrow c = 5.000 - 460{,}52 = 4.539{,}48$$

Επομένως, η εξίσωση του συνολικού κόστους είναι:

$$TC = 100ln(Q) + 4.539{,}48$$

Έχοντας δει μέσω απλών οικονομικών εφαρμογών την έννοια των διαφορικών εξισώσεων, τη σύνδεσή τους με την έννοια της ολοκλήρωσης και εκείνη της λύσης τους, θα διερευνήσουμε στη συνέχεια το ευρύτερο αντικείμενο των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.

10.4 Λύσεις διαφορικών εξισώσεων

Η ***λύση (solution) ή το ολοκλήρωμα (integral)*** μιας διαφορικής εξίσωσης αποτελεί μια νέα εξίσωση η οποία δεν περιέχει παραγώγους ή διαφορικά και η οποία ικανοποιεί την αρχική διαφορική εξίσωση, για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής σε ένα διάστημα τιμών. Ας δούμε πρώτα κάποιες απλές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 – Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής, $\frac{dy}{dt} = k$, όπου k μια σταθερά

Για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} = 2$, για τις συναρτήσεις y(t) οι οποίες ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση, λαμβάνουμε το ολοκλήρωμα και των δύο πλευρών της εξίσωσης ως εξής:

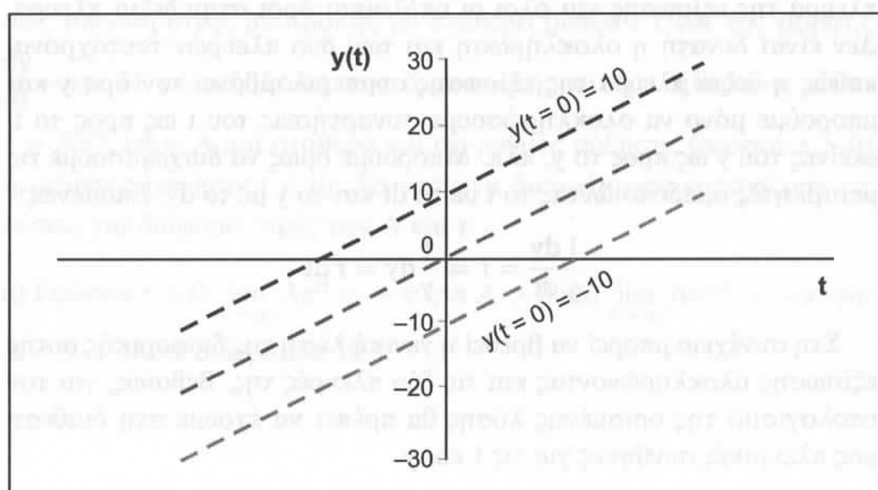
$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int 2dt \Rightarrow \int dy = \int 2dt \Rightarrow y(t) = 2t + c$$

όπου c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Εφόσον ο όρος c δεν έχει οριστεί υπάρχουν άπειρες λύσεις στην παραπάνω εξίσωση και λέμε ότι έχουμε βρει τη ***γενική (general) λύση*** της διαφορικής εξίσωσης.

Γραφικά, η γενική λύση αποτελεί μια οικογένεια καμπυλών, γνωστές ως ***καμπύλες ολοκλήρωσης (integral curves)***, οι οποίες διαφέρουν ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει η παράμετρος c (c = – 10, 0 και 10, στο διάγραμμα 2) και οι οποίες στην περίπτωση αυτή καθορίζουν τα σημεία τομής με τον κάθετο άξονα, όπως στο Διάγραμμα 2. Δεδομένου του ότι αναλύουμε μια συνάρτηση του χρόνου (t) οι καμπύλες αυτές λέγονται και ***τροχιές (trajectories)***.

Εφόσον οριστεί μια συγκεκριμένη τιμή, γνωστή ως ***πλευρική (boundary) ή αρχική (initial) συνθήκη (condition)***, για το σταθερό συντελεστή της ολοκλήρωσης (c), τότε έχουμε μια ***ορισμένη (definite ή***

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.2: Η γενική λύση $y(t) = 2t + c$ της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dt} = 2$ και οι τροχιές ολοκλήρωσης



particular) λύση της διαφορικής εξίσωσης. Δεδομένου του ότι χρησιμοποιείται μια συνάρτηση χρόνου, συνήθως η αρχική συνθήκη ορίζεται ως $t_0 = 0$, οπότε προσδιορίζεται η τιμή της συνάρτησης y(t) στην αρχή της χρονικής στιγμής (της ανάλυσης) t.

Για παράδειγμα, εφόσον η αρχική συνθήκη στο τελευταίο παράδειγμα είναι $y(0) = 10$, η ***ορισμένη λύση*** προκύπτει αντικαθιστώντας τις τιμές στη γενική λύση και λύνοντας ως προς c. Έτσι, $10 - 2(0) + c \Rightarrow c = 10$.

Επομένως, με αντικατάσταση, η ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = 2t + 10$$

Περίπτωση 2 – Απλές ή συνήθεις διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, της μορφής $\frac{dy}{dt} = r\,y$, όπου r σταθερά

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει λύσεις διαφορικών εξισώσεων της μορφής $\frac{dy}{dt} = f(t)$. Στην περίπτωση όπου καλούμαστε να λύσουμε διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dt} = r\,y$ γράφουμε κατ' αρχάς την εξίσωση στη μορφή $\frac{dy}{dt} = \ldots$, όπου ο όρος $\frac{dy}{dt}$ εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης και όλοι οι υπόλοιποι όροι στην δεξιά πλευρά. Δεν είναι δυνατή η ολοκλήρωση και των δύο πλευρών ταυτόχρονα, καθώς η δεξιά πλευρά της εξίσωσης συμπεριλαμβάνει τον όρο y και μπορούμε μόνο να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις του t ως προς το t, εκείνες του y ως προς το y, κλπ. Μπορούμε όμως να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές ομαδοποιώντας το t με το dt και το y με το dy. Επομένως:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \Rightarrow \frac{1}{y}dy = r\,dt$$

Στη συνέχεια μπορεί να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές της. Βεβαίως, για τον υπολογισμό της ορισμένης λύσης θα πρέπει να έχουμε στη διάθεση μας πλευρικές συνθήκες για τις t και y.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} - 0{,}08y = 0$, δεδομένης της ακόλουθης αρχικής συνθήκης, $y = 1.000$ όταν $t = 0$.

Απάντηση:

Τα ακόλουθα βήματα οδηγούν καταρχάς στη γενική λύση:

1. $\frac{dy}{dt} - 0{,}08y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -0{,}08 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -0{,}08dt$

2. $\int \frac{1}{y}dy = \int -0{,}08\,dt \Rightarrow \ln y = -0{,}08\,t + c \Rightarrow y = e^{-0{,}08t + c}$

$$\Rightarrow y = A\,e^{-0{,}08t}, \text{ όπου } A = e^{c}.$$

3. *Από την παραπάνω γενική λύση μπορούμε να βρούμε την ορισμένη λύση αξιοποιώντας την πλευρική συνθήκη $y = 1.000$ όταν $t = 0$. Έτσι,*

$$1.000 = A\,e^{-0{,}08(0)} \Rightarrow A = 1.000$$

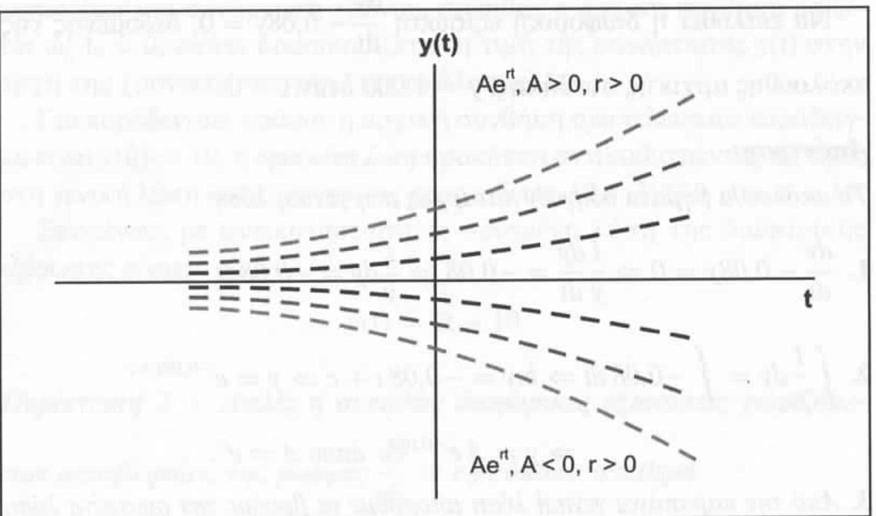
και με αντικατάσταση στη γενική λύση προκύπτει η εξής ορισμένη λύση

$$y = 1.000\,e^{-0{,}08t}.$$

Γενικότερα, διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν καταστάσεις απεριόριστης μεταβολής με σταθερό ρυθμό r είναι της μορφής $\frac{dy}{dt} = ry$. Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι $y = Ae^{rt}$, όπου A μια σταθερά και r ο ρυθμός αύξησης (εφόσον $r > 0$) ή μείωσης (εφόσον $r < 0$). Τα επόμενα διαγράμματα εμφανίζουν τις λύσεις για διάφορες τιμές των A και r.

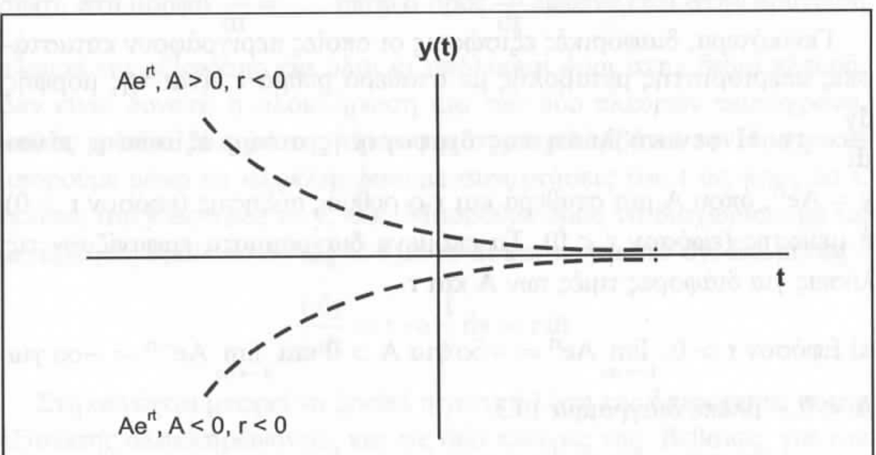
α) Εφόσον $r > 0$: $\lim_{t \to \infty} Ae^{rt} = +\infty$ για $A > 0$ και $\lim_{t \to \infty} Ae^{-rt} = -\infty$ για $A < 0$ – βλέπε διάγραμμα 10.3.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.3: Γραφική παράσταση της $y = Ae^{rt}$, $r > 0$



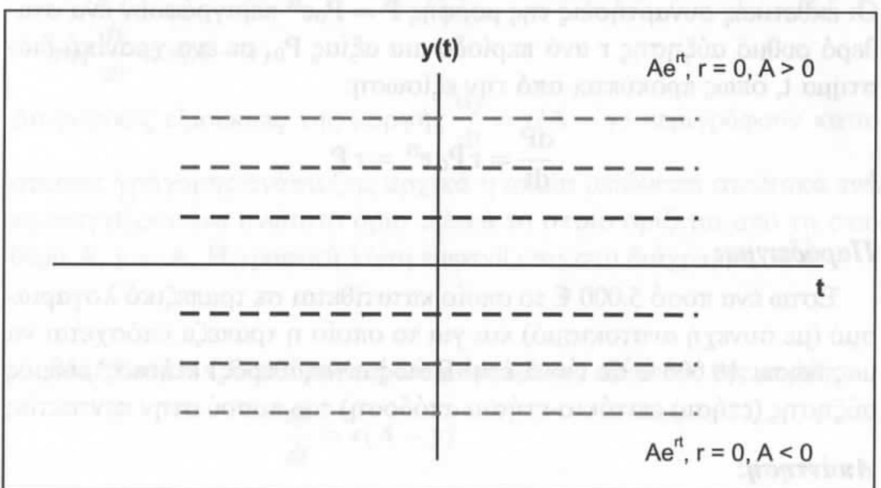
β) Για $r < 0$: $\lim_{t\to\infty} Ae^{rt} = 0$ – βλέπε διάγραμμα 10.4.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.4: Γραφική παράσταση της $y = Ae^{rt}$, $r < 0$



γ) Για $r = 0$: $Ae^{rt} = c$, όπου c μια σταθερά – βλέπε διάγραμμα 10.5.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.5: Γραφική παράσταση της $y = Ae^{rt}$, $r = 0$



Παρατηρήσεις

Όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελεί μια οικογένεια από καμπύλες, οι οποίες εξαρτώνται από τις παραμέτρους r και A.

Εφόσον οι παράμετροι αυτές λάβουν συγκεκριμένες τιμές, έχουμε την ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, $\frac{dy}{dt} = ry$ εφόσον $r \neq 0$, οδηγεί ποιοτικά στις ίδιες λύσεις θετικής ($A > 0$) ή αρνητικής ($A < 0$) αύξησης (εφόσον $r > 0$) ή μείωσης (εφόσον $r < 0$), οι οποίες διαφέρουν μόνο κατά το μέγεθος των σταθερών r και A. Κατά συνέπεια, λέγεται ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ***ευσταθής (stable)***. Εάν $r = 0$ οποιαδήποτε αλλαγή θα οδηγήσει ποιοτικά σε διαφορετικές λύσεις. Λέγεται ότι το σημείο $r = 0$ αποτελεί ***σημείο διακλάδωσης (bifurcation point)*** για την οικογένεια των εξισώσεων της παραμέτρου r.

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης (ΕΒΑ) επένδυσης με συνεχή ανατοκισμό

Οι εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $P = P_0e^{rt}$ περιγράφουν ένα σταθερό ρυθμό αύξησης r ανά περίοδο μια αξίας P_0, σε ένα χρονικό διάστημα t, όπως προκύπτει από την εξίσωση:

$$\frac{dP}{dt} = r P_0 e^{rt} = r P$$

Παράδειγμα:

Έστω ένα ποσό 5.000 € το οποίο κατατίθεται σε τραπεζικό λογαριασμό (με συνεχή ανατοκισμό) και για το οποίο η τράπεζα υπόσχεται να μας δώσει 10.000 € σε t = 5 έτη. Ποιός ο (σταθερός) ετήσιος ρυθμός αύξησης (ετήσιο επιτόκιο-ετήσια απόδοση) του ποσού στην πενταετία;

Απάντηση:

Η ετήσια αύξηση του ποσού των 5.000 € περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dP}{dt} = r P = r P_0 e^{rt}$$

Λαμβάνοντας ολοκληρώματα των δύο πλευρών προκύπτει η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης ως εξής:

$$\int \frac{dP}{dt} dt = \int r P_0 e^{rt} dt \Rightarrow P = P_0 e^{rt}$$

Με χρήση της αρχικής συνθήκης $P(t = 0) = 5.000$ προκύπτει η ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

$$5.000 = P_0 e^{r(0)} \Rightarrow P_0 = 5.000$$

και με αντικατάσταση

$$10.000 = 5.000 e^{r(5)} \Rightarrow 2 = e^{r(5)} \Rightarrow r = \frac{ln2}{5} = 0,1386 = 13,86\%$$

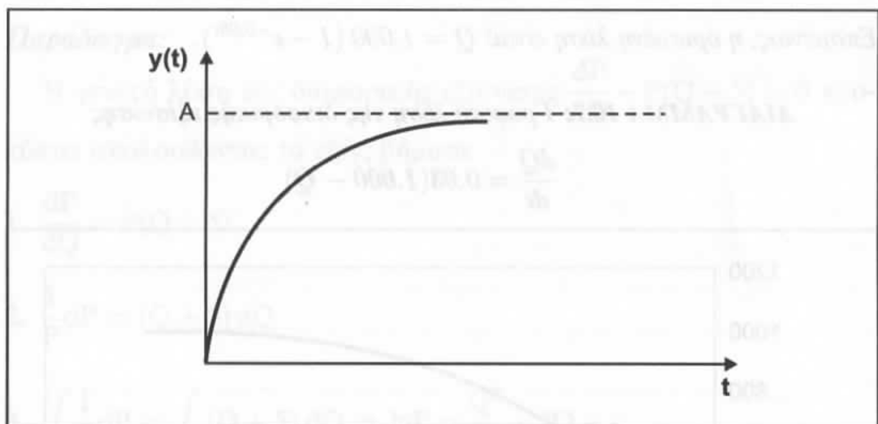
ανά έτος.

Η ετήσια αυτή απόδοση είναι γνωστή και ως Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης (ΕΒΑ) της επένδυσης με συνεχή ανατοκισμό.

2. Γρήγορη ανάπτυξη με ανώτατο όριο – Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dt} = r(A - y)$

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dt} = r(A - y)$ περιγράφουν καταστάσεις γρήγορης ανάπτυξης αρχικά η οποία μειώνεται σταδιακά ενώ προσεγγίζουν ένα ανώτατο όριο τελικά το οποίο ορίζεται από τη σταθερά A, y = A. Η γραφική λύση εμφανίζεται στο διάγραμμα 10.6.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.6: Γραφική λύση διαφορικής εξίσωσης της μορφής $\frac{dy}{dt} = r(A - y)$



Παράδειγμα:

Ο ρυθμός αύξησης των πωλήσεων (Q) ενός προϊόντος αυξάνεται μετά από μια εντατική διαφημιστική εκστρατεία και περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $\frac{dQ}{dt} = 0,08\,(1.000 - Q)$. Επίσης, είναι γνωστό ότι Q = 0 όταν t = 0, όπου Q οι μονάδες πώλησης του προϊόντος

και t ο χρόνος σε εβδομάδες. Ζητείται η εξίσωση που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη των πωλήσεων.

Απάντηση:

Ακολουθούμε τα βήματα:

1. $\frac{dQ}{dt} = 0{,}08\,(1.000 - Q)$

2. $\frac{1}{1.000 - Q}\,dQ = 0{,}08\,dt$

3. $\int \frac{1}{1.000 - Q}\,dQ = \int 0{,}08\,dt \Rightarrow -ln(1.000 - Q) = 0{,}08\,t + c$

$$\Rightarrow Q = 1.000 - A\,e^{-0{,}08t}, \text{όπου } A = e^{-c}$$

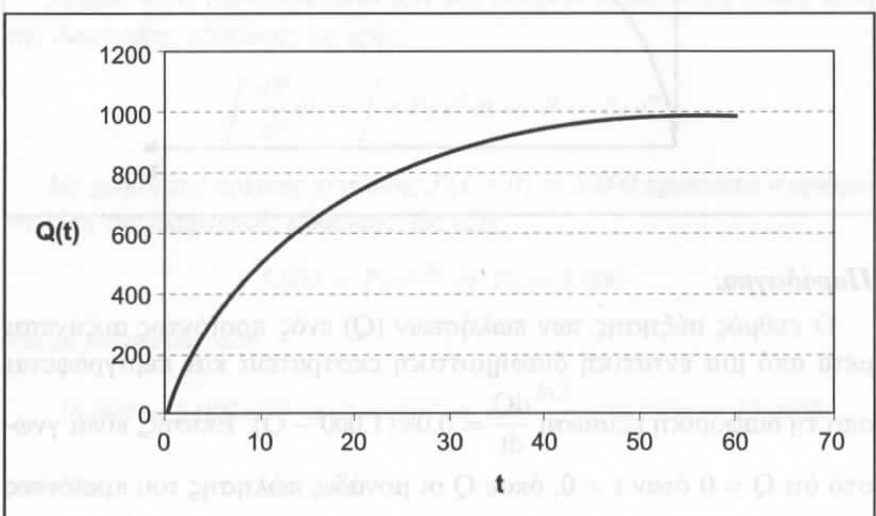
Από την παραπάνω γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, με αξιοποίηση της αρχικής συνθήκης $Q = 0$ για $t = 0$, προκύπτει:

$$0 = 1.000 - A\,e^{-0{,}08(0)} \Rightarrow A = 1.000$$

Επομένως, η ορισμένη λύση είναι: $Q = 1.000\,(1 - e^{-0{,}08t})$.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.7: Γραφική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}08(1.000 - Q)$$



Η γραφική παράσταση της τελευταίας εξίσωσης εμφανίζεται στο διάγραμμα 10.7. Είναι σαφές ότι στις πρώτες εβδομάδες μετά τη διαφημιστική εκστρατεία υπάρχει μεγάλη αύξηση των πωλήσεων, η οποία όμως βαίνει μειούμενη, ώσπου προσεγγίζει το άνω όριο των 1.000 μονάδων ανά εβδομάδα, μετά από 50-60 εβδομάδες πωλήσεων.

Περίπτωση 3 – Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών, της μορφής $\frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση περιλαμβάνει το γινόμενο δύο συναρτήσεων. Η δεξιά πλευρά της εξίσωσης μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο των συναρτήσεων του t, f(t) και συναρτήσεων του y, g(y). Στη συνέχεια, με διαχωρισμό των μεταβλητών στις δύο πλευρές της εξίσωσης μπορούμε να προχωρήσουμε σε ολοκλήρωση της κάθε πλευράς ώστε να φτάσουμε στη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα:

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dP}{dQ} - P(Q+5) = 0$ προκύπτει ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. $\frac{dP}{dQ} = P(Q+5)$

2. $\frac{1}{P}dP = (Q+5)\,dQ$

3. $\int \frac{1}{p}dP = \int (Q+5)\,dQ \Rightarrow \ln P = \frac{Q^2}{2} + 5Q + c$

$$\Rightarrow P = e^{0{,}5Q^2+5Q+c} \Rightarrow P = A\,e^{0{,}5Q^2+5Q}, \text{ όπου } A = e^c$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα – Εφαρμογή 1: Προσδιορισμός της εξίσωσης της ζήτησης ενός αγαθού με μοναδιαία ελαστικότητα ζήτησης

Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή για ένα αγαθό είναι μοναδιαία, $\varepsilon = -1$.

α. Ποιά διαφορική εξίσωση συσχετίζει την ποσότητα της ζήτησης (Q) με την τιμή του αγαθού (P);

β. Ποιά η εξίσωση ζήτησης Q = f(P), εάν είναι γνωστό ότι όταν P = 6, Q = 24;

Απάντηση:

α. *Αξιοποιώντας τον ορισμό της ελαστικότητας της ζήτησης ως προς την τιμή προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας συσχετίζεται η ποσότητα που ζητείται με την τιμή του αγαθού:*

$$\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -1 \Rightarrow \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P} \quad ή \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{P}$$

β. *Για να βρεθεί η εξίσωση της ζήτησης λύνουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση*

$$\frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P} \Rightarrow \frac{1}{Q}dQ = -\frac{1}{P}dP \Rightarrow \int \frac{1}{Q}dQ = -\int \frac{1}{P}dP$$

$$\Rightarrow lnQ = -lnP + c$$

όπου c η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Εφόσον P = 6, Q = 24, αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$ln24 = -ln6 + c \Rightarrow c = 4{,}97$$

Επομένως,

$$lnQ = -lnP + 4{,}97 \quad ή$$

$$Q = e^{-lnP+4{,}97} \Rightarrow Q = -144P$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση αποτελεί τη ζητούμενη εξίσωση της ζήτησης.

Παράδειγμα – Εφαρμογή 2: Προσδιορισμός της εξίσωσης της ζήτησης ενός αγαθού εφόσον είναι γνωστή η σταθερή ελαστικότητα ζήτησής του

Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή για ένα αγαθό είναι σταθερά και ίση με $\varepsilon = -k$.

α) Ποιά η συνάρτηση της ζήτησης του αγαθού;

β) Ποιά η συνάρτηση της ζήτησης εάν η ελαστικότητα ισούται με $\varepsilon = -1{,}5$;

γ) Ποιά η ειδική συνάρτηση ζήτησης εφόσον, όταν P = 3, Q = 12;

Απάντηση:

α. $\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -k \Rightarrow \frac{dQ}{dP} = -k\frac{Q}{P} \Rightarrow \frac{1}{Q}dQ = -k\frac{1}{P}dP$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{Q}dQ = -k\int \frac{1}{P}dP \Rightarrow lnQ = -klnP + c$$

$$\Rightarrow QP^k = c \Rightarrow Q = \frac{c}{P^k}$$

Επομένως, η συνάρτηση της ζήτησης είναι $Q = cP^{-k}$ και βρέθηκε ως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dQ}{dP} = -k\frac{Q}{P}$.

β. *Για $\varepsilon = -1{,}5$, με αντικατάσταση στη συνάρτηση ζήτησης προκύπτει $Q = c\,P^{-1{,}5}$.*

γ. *Για P = 3, Q = 12, μπορεί να βρεθεί η ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης ως εξής:*

$$Q\,P^{-1{,}5} = c \Rightarrow 12 \times 3^{-1{,}5} = 2{,}31$$

Επομένως, η εξίσωση της ζήτησης είναι: $Q = 2{,}31P^{-1{,}5}$.

Παράδειγμα – Εφαρμογή 3: Προσδιορισμός της εξίσωσης της ζήτησης ενός αγαθού από τη μη-σταθερά ελαστικότητα της ζήτησης του

Η ελαστικότητα της ζήτησης για μια συνάρτηση ζήτησης Q = f(P) δίνεται από τον τύπο $\varepsilon = -(P + 3P^2)/Q$. Επίσης, είναι γνωστό ότι εφόσον P = 10, Q = 100. Ποιά η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού;

Απάντηση:

Από τον ορισμό της ελαστικότητας της ζήτησης προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -\frac{P + 3P^2}{Q} \Rightarrow \frac{dQ}{dP} = -\frac{P + 3P^2}{Q}\frac{Q}{P}$$

Με ολοκλήρωση και των δύο πλευρών λαμβάνουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή την ακόλουθη εξίσωση της ζήτησης για το αγαθό.

$$\int dQ = \int -(1 + 3P)\, dP \Rightarrow Q = -P - 1{,}5P^2 + c$$

όπου c η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ορισμένη λύση, με βάση και τις πλευρικές συνθήκες που δόθηκαν στην εκφώνηση του παραδείγματος. Δηλαδή:

Για $P = 10,\ Q = 100 \Rightarrow c = 100 + 10 + 1{,}5 \times 10^2 \Rightarrow c = 260$

Επομένως, η εξίσωση της ζήτησης είναι: $Q = -1{,}5P^2 - P + 260$

Στη συνέχεια του κεφαλαίου προτείνεται ένας γενικός τύπος υπολογισμού της λύσης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ο οποίος θα βοηθήσει στον προσδιορισμό των πιθανών λύσεων των εξισώσεων αυτών και κάποιων ειδικών μορφών τους. Επιπλέον, η προσέγγιση αυτή επιτρέπει τη διερεύνηση της δυναμικής πορείας των μεταβλητών που ερευνούνται και της ευστάθειας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων που εξηγούν των πορεία των μεταβλητών από ένα σημείο ισορροπίας σε κάποιο άλλο, εφόσον υπάρχει.

10.5 Γενικός τύπος υπολογισμού της λύσης των διαφορικών εξισώσεων πρώτης-τάξης (first-order linear differential equations)

Έστω οι σταθερές ή οι συναρτήσεις του χρόνου v και z στην ακόλουθη ***γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης***:

$$\frac{dy}{dt} + vy = z \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dt} + v(t)y = z(t)$$

Η ***γενική λύση της εξίσωσης*** αυτής δίνεται από τον τύπο:

$$y(t) = e^{-\int v dt}\left(A + \int z e^{\int v dt} dt\right) = \left(e^{-\int v dt} A\right) + \left(e^{-\int v dt} \int z e^{\int v dt} dt\right)$$

$$= e^{-vt}(A + \int z e^{vt} dt) = e^{-vt}(A + \frac{z}{v}e^{vt}) = A e^{-vt} + \frac{z}{v}$$

όπου A μια σταθερά.

Ανάλυση ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις αποσκοπούν στην «ποιοτική» ανάλυση ευστάθειας/αστάθειας και αφορά όλες τις διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών (difference equations), που αναλύονται σε ξεχωριστό κεφάλαιο του βιβλίου.

1. Η παραπάνω λύση των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης αποτελείται από τα ακόλουθα δύο μέρη.

α) Τη ***συμπληρωματική συνάρτηση (complementary function,*** $y_c =$***)*** $e^{-\int v dt} A$ και

β) την ***ορισμένη συνάρτηση (particular function)*** ή ***ορισμένο (ή ειδικό) ολοκλήρωμα (particular integral,*** $y_p =$***)*** $e^{-\int v dt} \int z e^{\int v dt} dt$.

2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα y_p ισούται με το ***διαχρονικό – μακροχρόνιο – επίπεδο ισορροπίας (intertemporal equilibrium level)*** της συνάρτησης y(t), ενώ η συμπληρωματική (complementary) συνάρτηση y_c αντιπροσωπεύει την απόκλιση $[y(t) - y_p]$ από το σημείο ισορροπίας.

3. Η συνάρτηση y(t) λέγεται ότι είναι ***δυναμικά ευσταθής (dynamically stable)*** – ισοδύναμα, ότι υπάρχει ***δυναμική σύγκλιση (dynamic convergence)*** στο επίπεδο ισορροπίας, εφόσον ο όρος y_c τείνει στο μηδέν (0) όταν ο χρόνος t τείνει στο άπειρο ($y_c \to 0$ όταν $t \to \infty$ δηλαδή $\lim_{t\to\infty} y_c = 0$). Αυτό συμβαίνει όταν στη συνάρτηση της μορφής e^{kt} η σταθερά k είναι αρνητικός αριθμός.

4. Ο ορισμός αυτός της ευστάθειας περιλαμβάνει:

α) τις περιπτώσεις όπου το σύστημα είναι εκτός ισορροπίας, που όμως συγκλίνει στην ισορροπία μακροχρόνια.

β) Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, μια διαταραχή το θέτει

προσωρινά εκτός ισορροπίας, όμως επιστρέφει δυναμικά στη θέση ισορροπίας.

6. Περαιτέρω, μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ ***τοπικής (local)*** και ***ολικής (global) ευστάθειας***. Έτσι:

Όταν οι συνθήκες ευστάθειας ικανοποιούνται: α) για αρχικές τιμές y(0) κοντά στο σημείο ισορροπίας και β) για μικρές διαταραχές από το σημείο ισορροπίας, η ***ευστάθεια είναι τοπική***.

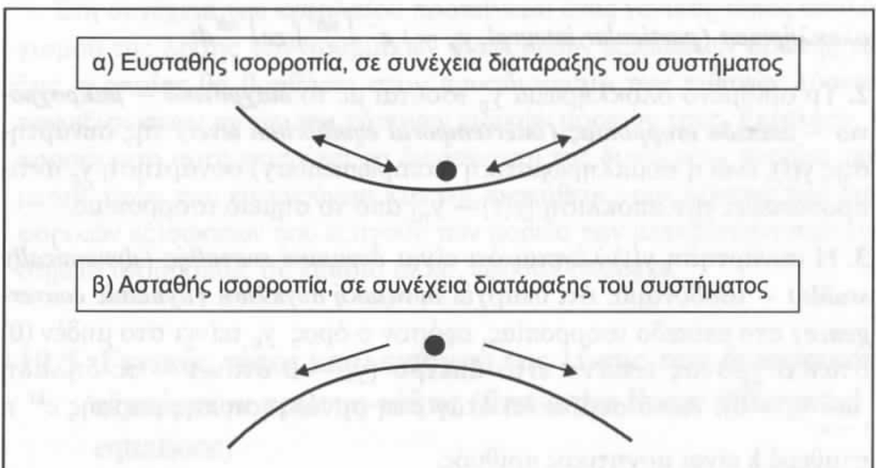
Όταν οι συνθήκες ευστάθειας ικανοποιούνται: α) για οποιεσδήποτε αρχικές τιμές και β) για οποιουδήποτε μεγέθους διαταραχές, υπάρχει ***ολική ευστάθεια*** στο σύστημα.

7. Το σύστημα λέγεται ***ασταθές (unstable)*** όταν ύστερα από μια διαταραχή στην ισορροπία δεν επιστρέφει σε αυτήν.

8. Επίσης, το σύστημα είναι ***δυναμικά ασταθές (dynamically/asymptotically) unstable***, όταν δε συγκλίνει στην ισορροπία.

Γραφικά, οι καταστάσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας εμφανίζονται, αντίστοιχα, ως περιπτώσεις α και β στο Διάγραμμα 10.8.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.8: Ευσταθής και ασταθής ισορροπία



Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί η γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dt} + 4y = 12$$

Απάντηση:

*Η εξίσωση είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, με σταθερές v = 4 και z = 12. Με αντικατάσταση στον παραπάνω γενικό τύπο προκύπτει η ακόλουθη **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης.*

$$y(t) = e^{-\int 4dt}\left(A + \int 12e^{\int 4dt}dt\right)$$

Καθώς $\int 4\,dt = 4t + c$ *και η σταθερά της ολοκλήρωσης c μπορεί να απορροφηθεί από τη σταθερά A, προκύπτει:*

$$y(t) = e^{-4t}\left(A + \int 12\,e^{4t}dt\right) = e^{-4t}(A + 3\,e^{4t}) = A\,e^{-4t} + 3$$

Προσδιορισμός της ευστάθειας:

Για να προσδιοριστεί εάν η συνάρτηση y(t) είναι δυναμικά ευσταθής εξετάζουμε στη συνέχεια τον όρο $y_c = Ae^{-4t}$, *όταν* $t \to \infty$.

Έτσι, όταν $t \to \infty$, $y_c = Ae^{-4t} \to 0$ *και η* $y(t) \to 3$, *δηλαδή* $y_p = 3$. *Επομένως, η συνάρτηση y(t) είναι δυναμικά ευσταθής. Το σημείο y(t) = 3 είναι το διαχρονικό - μακροχρόνιο (intertemporal) σημείο ισορροπίας.*

Έλεγχος ορθότητας της λύσης:

Μπορούμε να ελέγξουμε εάν η παραπάνω γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ορθή παραγωγίζοντας τη λύση. Έτσι

$$\frac{dy(Ae^{-4t} + 3)}{dt} = -4Ae^{-4t}$$

Από το αρχικό πρόβλημα γνωρίζουμε ότι $\frac{dy}{dt} = 12 - 4y$.

$$\text{Επομένως, } \frac{dy}{dt} = 12 - 4\left(Ae^{-4t} + 3\right) = -4Ae^{-4t}$$

Παράδειγμα 2 – Εφαρμογή: Δυναμική ισορροπία στο κλασσικό μικροοικονομικό υπόδειγμα ζήτησης – προσφοράς για ένα αγαθό

Έστω η εξίσωση ζήτησης για ένα προϊόν $Q_d = a + bP$ και η αντίστοιχη εξίσωση προσφοράς $Q_s = c + dP$. Η συνθήκη ισορροπίας στην αγορά είναι $Q_d = Q_s$ και επομένως η τιμή ισορροπίας για το

προϊόν στην αγορά είναι:

$$a + bP^e = c + dP^e \Rightarrow P^e = \frac{a-c}{d-b}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής στην αγορά είναι θετική συνάρτηση της υπερβάλλουσας ζήτησης, $(Q_d - Q_s)$, ούτως ώστε:

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_d - Q_s), \quad \text{όπου } k > 0$$

Κάτω από ποιες συνθήκες θα επικρατήσει δυναμική ισορροπία στην αγορά; Δηλαδή να προσδιοριστούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες, όταν $t \to \infty$, P(t) θα συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας, P^e.

Απάντηση:

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις ζήτησης και προσφοράς στη τελευταία διαφορική εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{dP}{dt} = k(a + bP - c - dP)$$

Διατάσσοντας τους όρους της εξίσωσης, σε μορφή όμοια με εκείνη της γενικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης προκύπτει:

$$\frac{dP}{dt} + k(d-b)P = k(a-c)$$

Έστω $v = k(d-b)$ και $z = k(a-c)$, *όπως στη γενική μορφή, τότε η **γενική λύση** της εξίσωσης είναι:*

$$P(t) = e^{-\int vdt}\left(A + \int ze^{\int vdt}dt\right) = Ae^{-vt} + \frac{z}{v}$$

Για $t = 0$, $P(t=0) = A + \frac{z}{v} \Rightarrow A = P(0) - \frac{z}{v}$

και με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{z}{v}\right]e^{-vt} + \frac{z}{v}$$

Εφόσον $v = k(d-b)$ και $z = k(a-c)$, *με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση προκύπτει:*

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{a-c}{d-b}\right]e^{-k(d-b)t} + \frac{a-c}{d-b} = [P(0) - P^e]e^{-k(d-b)} + P^e$$

Διερεύνηση ευστάθειας:

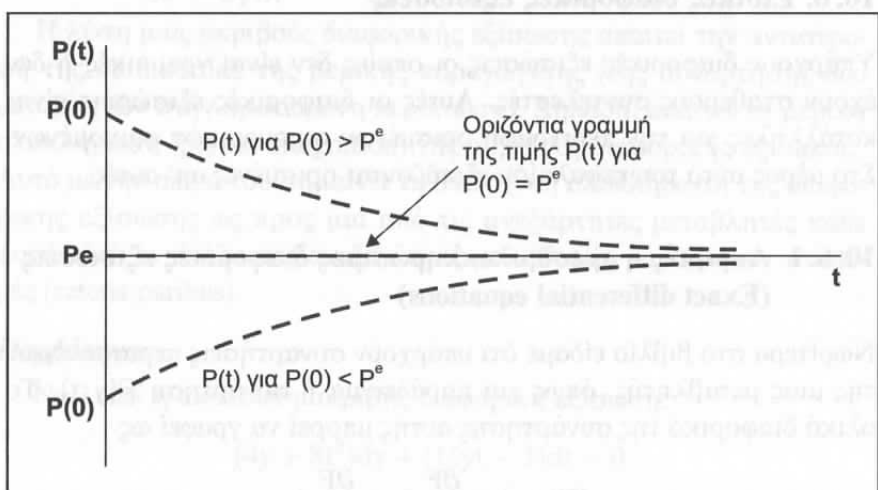
Εφόσον P(0), P^e, k > 0, μακροχρόνια – δηλαδή καθώς $t \to \infty$, ο πρώτος όρος στην τελευταία εξίσωση συγκλίνει στο μηδέν (0) και κατά συνέπεια η τιμή P(t) θα συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας P^e μόνον εφόσον (d – b) > 0. Εάν οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς έχουν αρνητική και θετική κλίση, αντίστοιχα, b < 0 και d > 0, και επομένως θα υπάρχει δυναμική ισορροπία. Γενικά, όταν d > b θα υπάρχει δυναμική σύγκλιση. Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και αν η καμπύλη ζήτησης είναι θετική ή η καμπύλη προσφοράς αρνητική.

Διερεύνηση της δυναμικής του συστήματος:

Περαιτέρω μπορούμε να διερευνήσουμε τη ***δυναμική του συστήματος*** (των εξισώσεων προσφοράς και ζήτησης) για διάφορες τιμές του P(0), δηλαδή της αρχικής τιμής του προϊόντος. Ας δούμε διάφορες περιπτώσεις εξετάζοντας τη λύση της διαφορικής εξίσωσης που αναπτύξαμε, δηλαδή την

$$P(t) = [P(0) - P^e]e^{-k(d-b)t} + P^e$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.9: Δυναμική ισορροπία στο υπόδειγμα ζήτησης – προσφοράς



α. *Έστω $P(0) = P^e$, δηλαδή η αρχική τιμή ισούται με την τιμή ισορροπίας της αγοράς. Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει, $P(t) = P^e$. Δηλαδή, η προσαρμογή της τιμής χρονικά είναι άμεση. Γραφικά μπορεί να παρασταθεί η λύση με την οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής ισορροπίας, P^e, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 10.9.*

β. *Έστω ότι η αρχική τιμή είναι μεγαλύτερη από την τιμή ισορροπίας, δηλαδή $P(0) > P^e$. Κατά συνέπεια, $[P(0) - P^e] > 0$ και επομένως, $P(t) > P^e$, όπως προκύπτει εξετάζοντας την παραπάνω εξίσωση. Εφόσον λοιπόν $t \to \infty$, ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης τείνει στο μηδέν, δηλαδή $\lim_{t\to\infty} \frac{P(0) - P^e}{e^{k(d-b)t}} = 0$ και η τιμή του προϊόντος συγκλίνει σταδιακά από πάνω στην τιμή ισορροπίας, Pe. Γραφικά, βλέπουμε στο διάγραμμα 10.9 τη γραμμή $P(t)$ να συγκλίνει από πάνω προς τον οριζόντιο άξονα.*

γ. *Εφόσον η αρχική τιμή του προϊόντος είναι χαμηλότερη από την τιμή ισορροπίας, δηλαδή $P(0) < P^e$, τότε $[P(0) - P^e] < 0$. Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης επομένως είναι εμφανές ότι ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης συγκλίνει στο μηδέν (0) και η τιμή $P(t)$ συγκλίνει στην τιμή ισορροπίας από κάτω – βλέπε διάγραμμα 10.9.*

10.6. Ειδικές διαφορικές εξισώσεις

Υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις οι οποίες δεν είναι γραμμικές ή δεν έχουν σταθερούς συντελεστές. Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις είναι κατάλληλες για την περιγραφή ορισμένων οικονομικών φαινομένων. Στο μέρος αυτό του κεφαλαίου εξετάζονται ορισμένες απ' αυτές.

10.6.1 Ακριβείς ή άμεσα ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις (Exact differential equations)

Νωρίτερα στο βιβλίο είδαμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις περισσοτέρων της μιας μεταβλητής, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $F(y,t)$. Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης αυτής μπορεί να γραφεί ως

$$dF(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

ή

$$dF(y,t) = M\,dy + N\,dt, \quad \text{όπου } M = \frac{\partial F}{\partial y},\ N = \frac{\partial F}{\partial t}$$

Εφόσον το ολικό διαφορικό στην παραπάνω εξίσωση είναι μηδέν (0), η εξίσωση λέγεται ***ακριβής διαφορική εξίσωση,*** καθώς στην περίπτωση αυτή η αριστερή πλευρά της εξίσωσης ισούται ακριβώς με το διαφορικό της ***πρωτογενούς (primitive) συνάρτησης*** $F(y,t)$. Δηλαδή, η μορφή της ακριβούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$Mdy + Ndt = 0$$

Για μια ακριβή διαφορική εξίσωση ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{Ισοδύναμα,} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$$

Το παραπάνω προκύπτει εύκολα με αξιοποίηση του ***θεωρήματος του Young***, σύμφωνα με το οποίο:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial t}$$

$$\text{Καθώς } \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial t} \text{ και } \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Η λύση μιας ακριβούς διαφορικής εξίσωσης απαιτεί την αντιστροφή της διαδικασίας της μερικής παραγώγισης (της συνάρτησης δύο μεταβλητών στην προκειμένη περίπτωση). Δηλαδή, απαιτεί τη μερική ολοκλήρωση (partial integration) της ακριβούς διαφορικής εξίσωσης. Αυτό με την σειρά του σημαίνει τη διαδοχική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης ως προς μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές κάθε φορά, ενώ οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές (ceteris paribus).

Παράδειγμα:

Να λυθεί η ακόλουθη ακριβής διαφορική εξίσωση:

$$(4y + 8t^2)dy + (16yt - 3)dt = 0$$

Απάντηση:

1. *Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως* $Mdy + Ndt = 0$, *όπου* $M = 4y + 8t^2$ *και* $N = 16yt - 3$.

Εφόσον $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$, *τότε η παραπάνω θα είναι μια ακριβής διαφορική εξίσωση.*

Έτσι, καθώς $\frac{\partial M}{\partial t} = 16t$ *και* $\frac{\partial N}{\partial y} = 16t$ *έχουμε μια «ακριβή» διαφορική εξίσωση.*

2. *Καθώς ο όρος* $\frac{\partial M}{\partial t}$ *αποτελεί μερική παράγωγο, αντιστρέφοντας τη διαδικασία λαμβάνουμε το μερικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης M ως προς το y, θεωρώντας ότι η t είναι σταθερά, και προσθέτουμε τη συνάρτηση Z(t). Η τελευταία αυτή συνάρτηση λαμβάνει υπόψη της ότι κατά την αρχική μερική παραγώγιση ως προς την y μπορεί να υπήρχαν όροι της t που μπορεί να απαλείφτηκαν από την διαδικασία της παραγώγισης. Έτσι, η αρχική συνάρτηση προκύπτει ως εξής:*

$$F(y,t) = \int (4y + 8t^2)\partial y + Z(t) = 2y^2 + 8t^2 y + Z(t)$$

3. *Μερική διαφοροποίηση της* $F(y, t)$ *ως προς το t δίνει* $\frac{\partial F}{\partial t} = 16ty + Z'(t)$, *όπου* $Z'(t)$ *η παράγωγος της* $Z(t)$.

Εξισώνοντας με την N, όπου $\frac{\partial F}{\partial t} = N = 16yt - 3$ *δίνει*

$$16ty + Z'(t) = 16yt - 3 \Rightarrow Z'(t) = -3$$

4. *Ολοκληρώνοντας την* $Z'(t)$ *ως προς το t δίνει*

$$Z(t) = \int Z'(t)dt = \int -3dt = -3t$$

5. *Αντικαθιστώντας την τελευταία λύση στην εξίσωση της* $F(y, t)$ *και προσθέτοντας τη σταθερά της ολοκλήρωσης c, προκύπτει:*

$$F(y,t) = 2y^2 + 8t^2 y - 3t + c$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη λύση της ακριβούς διαφορικής εξίσωσης, κάτι το οποίο μπορεί να ελεγχθεί με παραγώγισή της.

10.6.2 Μη ακριβείς ή μη-άμεσα ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις και παράγοντες ολοκλήρωσης (integrating factors)

Υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις οι οποίες δεν είναι ακριβείς, που όμως θα μπορούσαν να μετατραπούν σε άρτια ολοκληρώσιμες ακριβείς διαφορικές εξισώσεις πολλαπλασιάζοντας τις με κάποιον ***παράγοντα ολοκλήρωσης (integrating factor)***, ο οποίος στη συνέχεια επιτρέπει την ολοκλήρωση της εξίσωσης.

Παράδειγμα:

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$5yt\,dy + (5y^2 + 8t)dt = 0$$

1. Πρώτα ελέγχουμε αν η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής, γράφοντας την στη μορφή

$$M\,dy + N\,dt = 0, \quad \text{όπου } M = 5yt \text{ και } N = 5y^2t + 8t^2$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ακριβής, εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$.

Ας το ελέγξουμε:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 5y \quad \text{ενώ} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 10y$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής.

2. Μπορούμε όμως, πολλαπλασιάζοντας την αρχική εξίσωση με έναν παράγοντα ολοκλήρωσης t, να τη μετατρέψουμε σε άμεσα ολοκληρώσιμη. Έτσι,

$$5yt^2dy + (5y^2t + 8t^2)dt = 0$$

Ας δούμε τώρα τις πρώτες μερικές παραγώγους της

$$Mdy + Ndt = 0 \text{ όπου } M = 5yt^2 \text{ και } N = 5y^2t + 8t^2.$$

Αυτές είναι:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 10y\,t \quad \text{και} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 10y\,t$$

Η εξίσωση τώρα είναι ακριβής και επιλύεται στη συνέχεια όπως έχουμε δείξει προηγουμένως.

3. $F(y,t) = \int 5yt^2 \partial y + Z(t)$, όπου $Z(t)$ η συνάρτηση της μερικής ολοκλήρωσης

$$\Rightarrow F(y,t) = 2{,}5y^2t^2 + Z(t).$$

4. $\frac{\partial F}{\partial t} = 5y^2t + Z'(t)$.

Όμως, $\frac{\partial F}{\partial t} = N = 5y^2t + 8t^2$.

Έτσι, $5y^2t + Z'(t) = 5y^2t + 8t^2 \Rightarrow Z'(t) = 8t^2$

5. $Z(t) = \int 8t^2 dt = \frac{8}{3}t^3$

6. $F(y,t) = 2{,}5y^2t^2 + 2{,}67t^3 + c$

10.6.2.1 Προσδιορισμός του παράγοντα ολοκλήρωσης (integrating factor) σε μια μη ακριβή διαφορική εξίσωση

Τα ακόλουθα θεωρήματα είναι χρήσιμα στον προσδιορισμό του παράγοντα ολοκλήρωσης (integrating factor) σε μια μη άρτια ολοκληρώσιμη διαφορική εξίσωση, υπό την προϋπόθεση βεβαίως ότι υφίσταται τέτοιος παράγοντας.

Εφόσον μια διαφορική εξίσωση είναι μη ακριβής ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial t} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$$

Θεώρημα 1.

Εφόσον $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = f(y)$, δηλαδή η $f(y)$ αποτελεί συνάρτηση του y μόνο, τότε ο όρος $e^{\int f(y)dy}$ αποτελεί παράγοντα ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 2.

Εφόσον $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) = g(t)$, δηλαδή η $g(t)$ είναι συνάρτηση του t μόνο, τότε ο όρος $e^{\int g(t)dt}$ αποτελεί παράγοντα ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα:

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$(7y + 4t^2)dy + 4tydt = 0 \quad \text{ή}$$

$$Mdy + Ndt = 0, \;\text{ όπου } M = 7y + 4t^2 \text{ και } N = 4ty$$

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\partial M}{\partial t} = 8t \neq \frac{\partial N}{\partial y} = 4t$

Επομένως, η εξίσωση είναι μη ακριβής.

Για την επίλυση της απαιτείται ο προσδιορισμός ενός παράγοντα ολοκλήρωσης, ο οποίος μπορεί να βρεθεί ως εξής. Σύμφωνα με το θεώρημα 1

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{1}{4ty}(8t - 4t) = \frac{4t}{4ty} = \frac{1}{y} = f(y) \text{ μόνο}$$

Επομένως, ο παράγοντας ολοκλήρωσης είναι:

$$e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$$

Πολλαπλασιάζοντας την αρχική διαφορική εξίσωση με τον παράγοντα ολοκλήρωσης y προκύπτει:

$$(7y^2 + 4yt^2)dy + 4ty^2dt = 0$$

Ισοδύναμα:

$$Mdy + Ndt = 0,$$

όπου τώρα $M = 7y^2 + 4yt^2$, $N = 4ty^2$.

Μπορούμε να ελέγξουμε εάν πρόκειται για ακριβή διαφορική εξίσωση εξετάζοντας την ισοδυναμία των πρώτων μερικών παραγώγων $\frac{\partial M}{\partial t}$ και $\frac{\partial N}{\partial y}$.

Καθώς $\frac{\partial M}{\partial t} = 8yt$ και $\frac{\partial N}{\partial y} = 8yt$, επαληθεύεται ότι ο παράγοντας ολοκλήρωσης y έχει μετατρέψει την αρχική μη ακριβή διαφορική εξίσωση σε μια ακριβή διαφορική εξίσωση, η οποία μπορεί να επιλυθεί με το συνήθη τρόπο, ως εξής:

1. $F(y,t) = \int (7y^2 + 4yt^2)\partial y + Z(t) = \frac{7}{3}y^3 + 2y^2t^2 + Z(t)$

2. $\frac{\partial F}{\partial t} = 4y^2t + Z'(t)$

3. Εφόσον $\frac{\partial F}{\partial t} = N = 4y^2t \Rightarrow 4y^2t + Z'(t) = 4y^2t \Rightarrow Z'(t) = 0$ και $Z(t)$ είναι μια σταθερά.

4. Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι:

$$F(y,t) = \frac{7}{3}y^3 + 2y^2t^2 + c$$

10.6.3 Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές (Separated Variables)

Μια διαφορική εξίσωση της ακόλουθης μορφής

$$M(y)dy + N(t)dt = 0,$$

όπου η M είναι συνάρτηση μόνο του y και η N αποτελεί συνάρτηση μόνο του t, λέγεται ότι έχει χωριζόμενες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με απλή ολοκλήρωση. Παραδείγματα τέτοιων διαφορικών εξισώσεων είδαμε και στο μέρος 3 του κεφαλαίου αυτού.

Παράδειγμα 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$t^2dy + y^3dt = 0 \text{ ή } Mdy + Ndt = 0, \text{ όπου } M = t^2,\ N = y^3.$$

Έτσι $M \neq f(y)$ και $N \neq f(t)$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με τον όρο $\frac{1}{t^2y^3}$ μπορούν να χωριστούν οι μεταβλητές ως εξής.

$$\frac{1}{y^3}dy + \frac{1}{t^2}dt = 0 \quad \text{ή} \quad y^{-3}dy + t^{-2}dt = 0$$

$$\Rightarrow \int y^{-3}dy + \int t^{-2}dt = -\frac{1}{2}y^{-2} - t^{-1} + c$$

$$\Rightarrow F(y,t) = -\frac{1}{2}y^{-2} - t^{-1} + c$$

Παράδειγμα 2

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} = \frac{t^5}{y^4}$.

Απάντηση:

Αρχικά γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $M(y)dy + N(t)dt$.

Έτσι $y^4dy - t^5dt = 0$.

Με ολοκλήρωση του κάθε όρου ξεχωριστά προκύπτει:

$$\int y^4dy = \frac{1}{5}y^5 + c_1, \qquad \int t^5dt = \frac{1}{6}t^6 + c_2$$

Έτσι $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}t^6 = c_0$, *όπου* $c_0 = c_1 + c_2$

$\Rightarrow 6y^5 - 5t^6 = 30c_0$ *ή* $6y^5 - 5t^6 = c$, *όπου* $c = 30c_0$

Παράδειγμα 3 – Εφαρμογή: Προσδιορισμός των συνθηκών ευστάθειας σε μια «κλειστή» οικονομία.

Έστω μια κλειστή οικονομία (χωρίς εξωτερικό εμπόριο), στην οποία δεν υπάρχει οικονομική παρέμβαση της κυβέρνησης με τη μορφή κυβερνητικών επενδύσεων ή φορολογίας. Η ακόλουθη εξίσωση περιγράφει το εθνικό εισόδημα/προϊόν (Y) ως συνάρτηση της ιδιωτικής κατανάλωσης (C) και των ιδιωτικών επενδύσεων I:

$$Y(t) = C(t) + I(t),$$

όπου Y, C και I αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου t.

Επίσης, έστω Y^e, C^e και I^e τα επίπεδα ισορροπίας των Y, C και I, αντίστοιχα. Επομένως, οι αποκλίσεις σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή των μεταβλητών Y, C και I από τα αντίστοιχα επίπεδα ισορροπίας τους ορίζονται ως:

$$YD(t) = Y(t) - Y^e, \; CD(t) = C(t) - C^e \quad \text{και} \quad ID(t) = I(t) - I^e$$

Θα υποθέσουμε ότι:

α) το εθνικό προϊόν μεταβάλλεται διαχρονικά με ένα ρυθμό μεταβολής a ο οποίος είναι ανάλογος της υπερβάλλουσας ζήτησης $(C + I - Y)$ στην οικονομία. Δηλαδή

$$\frac{dYD(t)}{dt} = a(CD + ID - YD) \text{ και}$$

β) οι αποκλίσεις των επενδύσεων και της κατανάλωσης από το επίπεδο ισορροπίας τους είναι συναρτήσεις των αποκλίσεων του εθνικού προϊόντος από το επίπεδο ισορροπίας του, ως εξής:

$$ID(t) = bYD(t), \; CD(t) = cYD(t)$$

όπου οι σταθεροί ρυθμοί μεταβολής b και c είναι γνωστοί στα μακροοικονομικά ως οριακή ροπή επένδυσης (marginal propensity to invest) και οριακή ροπή κατανάλωσης (marginal propensity to consume), αντίστοιχα, και οι τιμές τους όπως και του a βρίσκονται μεταξύ 0 και 1. Δηλαδή, $0 < a, b, c < 1$.

Γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις στην πρώτη και, για λόγους απλούστευσης, αγνοώντας το t στις παρενθέσεις, λαμβάνουμε:

$$\frac{dYD}{dt} = a(c + b - 1)YD \Rightarrow \frac{dYD}{YD} = a(c + b - 1)dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{YD} dYD = \int a(c + b - 1)dt$$

$$\Rightarrow \ln YD = a(c + b - 1)t + c_0$$

όπου c_0 η σταθερά της ολοκλήρωσης.

$$\Rightarrow YD = Ae^{a(c+b-1)t}, \text{ όπου } A = e^{c_0}.$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης χρησιμοποιούμε τη συνθήκη $t = 0$, $YD = Y(0) - Y^e = A$, και με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση προκύπτει:

$$YD = [Y(0) - Y^e]e^{a(c+b-1)t}$$

Καθώς $YD = Y(t) - Y^e$, $Y(t) = Y^e + YD$

και επομένως: $\quad Y(t) = Y^e + [Y(0) - Y^e]e^{a(c+b-1)t}$

Ανάλυση Ευστάθειας

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη διαδρομή που ακολουθεί το εθνικό προϊόν εφόσον υπάρξει μια διαταραχή στην οικονομία και βρεθεί εκτός ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι, όταν $t \to \infty$, $Y(t) \to Y^e$ μόνον εφόσον $c + b < 1$, δηλαδή μόνον εφόσον το άθροισμα της οριακής ροπής κατανάλωσης και της οριακής ροπής της επένδυσης είναι μικρότερο του 1.

10.6.4 Εξισώσεις Bernoulli

Μια διαφορική εξίσωση της ακόλουθης μορφής είναι γνωστή ως εξίσωση Bernoulli:

$$\frac{dy}{dt} + a\,y = by^n \tag{1}$$

όπου a και b αποτελούν σταθερές ή συναρτήσεις της μεταβλητής t, και $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Εάν οι παράγοντες a και b αποτελούν συναρτήσεις του t η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)y^n \tag{2}$$

Έστω, $w = y^{1-n}$, η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί σε όρους $\frac{dw}{dt}$. Για να επιτευχθεί αυτό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με y^{-n}, οπότε $\frac{dy}{dt}y^{-n} + a\,y^{1-n} = b$.

Ισοδύναμα, $\frac{dy}{dt}y^{-n} + a\,w = b$

2. Αναγνωρίζοντας τώρα ότι n w είναι συνάρτηση του t, μέσω του y, και εφόσον $w = y^{1-n}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dt} = (1-n)y^{-n}(by^n - awy^n)$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = (1-n)b - (1-n)aw$$

Επομένως:

$$\frac{dw}{dt} + (1-n)aw = (1-n)b \quad ή$$

$$\frac{dw}{dt} + vw = z, \text{ όπου } v = (1-n)a,\ z = (1-n)b.$$

Η εξίσωση αυτή τώρα αποτελεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση της οποίας η λύση, έχουμε δει, έχει ως εξής:

$$w(t) = e^{-\int v dt}\left(A + \int z e^{\int v dt} dt\right)$$

Παράδειγμα:

$$\frac{dy}{dt} - 2y = ty^3$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι της μορφής Bernoulli με $a = -2$, $b = t$ και $n = 3$.

Έτσι, $w = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$

$$\frac{dw}{dt} + (1-n)aw = (1-n)b \Rightarrow \frac{dw}{dt} + 4w = -2t$$

Η παραπάνω αποτελεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dw}{dt} + vw = z$, όπου $v = 4$ και $z = -2t$.

Έτσι, αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο λύσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με $v = 4$, $z = -2t$, προκύπτει:

$$w(t) = e^{-\int 4dt}\left(A + \int -2te^{\int 4dt}dt\right) = e^{-4t}\left(A - 2\int te^{4t}dt\right)$$

Για τον υπολογισμό του $\int te^{4t}dt$, απαιτείται ολοκλήρωση κατά παράγοντες, με τις μεθόδους που έχουμε δείξει νωρίτερα στο βιβλίο.

Υπενθύμιση γενικού κανόνα: $\int uv'dt = uv - \int vu'dt$

Εδώ, έστω

$$u = t \Rightarrow u' = 1 \quad και \quad v' = e^{4t} \Rightarrow v = \int e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t} + c_1$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\int te^{4t}dt = t\left(\frac{1}{4}e^{4t} + c_1\right) - \int\left(\frac{1}{4}e^{4t} + c_1\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}te^{4t} + tc_1 - \frac{1}{16}e^{4t} - c_1 t + c_2$$

Επομένως,

$$w(t) = e^{-4t}\left[A - 2\left(\frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t}\right)\right]$$

Καθώς $w(t) = y(t)^{-2}$, με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση, προκύπτει:

$$y(t) = e^{-4t}\left[A - \frac{1}{2}te^{4t} + \frac{1}{8}e^{4t}\right]^{-2} \Rightarrow y(t) = \left(Ae^{-4t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\right)^{-2}$$

Παράδειγμα Εφαρμογή – Το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Solow

Στα μακροοικονομικά ένα σημαντικό πρόβλημα προς διερεύνηση αποτελεί η οικονομική μεγέθυνση της οικονομίας. Εάν λάβουμε υπόψη μας ότι το εισόδημα ή παραγόμενο προϊόν (Q) αποτελεί συνάρτηση του κεφαλαίου (K) και του εργατικού δυναμικού (L) που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή, μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$Q = f(K, L)$$

Σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ένα παράδειγμα μια τέτοιας συνάρτησης παραγωγής, τη συνάρτηση Cobb – Douglas. Στην περίπτωση αυτή

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \text{ όπου } A > 0,\ 0 < \alpha,\ \beta < 1.$$

Επίσης, ο βαθμός ομογένειας τη συνάρτησης ορίζεται από το άθροισμα $\alpha + \beta$. Έτσι, για $\alpha + \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha + \beta > 1$, έχουμε αντί-

στοιχα, φθίνουσες, σταθερές και αύξουσες οικονομίες κλίμακας. Το μαθηματικό υπόδειγμα που ανέπτυξε ο Robert Solow αποτελεί τη βάση τέτοιων υποδειγμάτων ανάπτυξης ή οικονομικής μεγέθυνσης. Στη γενική του μορφή περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$Q(t) = f[K(t), L(t)] \tag{1}$$

Υποθέσεις του υποδείγματος είναι ότι:

α) Το παραγόμενο προϊόν Q(t) αποτελεί γραμμική ομογενή συνάρτηση του κεφαλαίου και του εργατικού δυναμικού που χρησιμοποιείται στην παραγωγή του.

β) Επενδύεται ένα (σταθερό) ποσοστό g του προϊόντος (εισοδήματος). Μαθηματικά, $\frac{dK}{dt} = g\,Q$.

γ) Η προσφορά εργασίας εξελίσσεται εκθετικά με ένα σταθερό ποσοστό, $r > 0$. Μαθηματικά, $L = L_0 e^{rt}$.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = g\,f(K, L) = g\,f(K, L_0 e^{rt}) \tag{2}$$

η οποία περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του κεφαλαίου για να διατηρηθεί σε πλήρη εργασία το εργατικό δυναμικό.

Ας υποθέσουμε ότι $z = \frac{K}{L}$, τότε $K = z(t) L_0 e^{rt}$.

Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = z(t)\, r L_0 e^{rt} + L_0 e^{rt} \frac{dz}{dt} = \left[z(t) r + \frac{dz}{dt}\right] L_0 e^{rt} \tag{3}$$

Εξισώνοντας την (2) και την (3) προκύπτει:

$$g\,f(K, L_0 e^{rt}) = \left(z\,r + \frac{dz}{dt}\right) L_0 e^{rt}$$

Αξιοποιώντας τη γραμμική ομοιογένεια της συνάρτησης παραγωγής μπορούμε να γράψουμε

$$g\,f\left(\frac{K}{L_0 e^{rt}}, 1\right) = z\,r + \frac{dz}{dt}$$

και με τη χρήση του $z = \frac{K}{L} = \frac{K}{L_0 e^{rt}}$ προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dz}{dt} = g\,f(z, 1) - z\,r \tag{4}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη δυναμική (τροχιά) της μεταβλητής z, δηλαδή του λόγου κεφαλαίου προς εργασία, $\frac{K}{L}$, που θα διατηρήσει τους συντελεστές παραγωγής σε πλήρη εργασία (full employment).

Ας δούμε την εφαρμογή στη συνάρτηση **Cobb-Douglas** υπό την υπόθεση σταθερών οικονομιών κλίμακας, δηλαδή $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$ και έτσι

$$Q = K^{\alpha} L^{1-\alpha} = L\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = L z^{\alpha}, \text{ όπου } z = K/L \text{ ή}$$

στη γενική της μορφή $Q = Lf(z, 1)$ και $z^{\alpha} = f(z, 1)$.

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την εξίσωση (4) προκύπτει:

$$\frac{dz}{dt} + r\,z = g\,z^{\alpha}$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής Bernoulli, όπου $n = \alpha$. Έτσι $w = z^{1-\alpha}$, $\alpha = r$, $\beta = g$.

Επομένως $\frac{dw}{dt} + (1-\alpha)\, r\, w = (1-\alpha)\, g$

Αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο όπου $v = (1-\alpha)\, r$ και $z = (1-\alpha)\, g$ προκύπτει

$$w(t) = e^{-\int (1-\alpha) r dt}\left[A + \int (1-\alpha)\, g\, e^{\int (1-\alpha) r dt} dt\right] = A\,e^{-(1-\alpha) rt} + \frac{g}{r}$$

Για $t = 0$, $w(0) = A + \frac{g}{r} \Rightarrow A = w(0) - \frac{g}{r}$

Επομένως, $w(t) = \left[w(0) - \frac{g}{r}\right] e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}$

Εφόσον $w(t) = z^{1-\alpha} \Rightarrow z^{1-\alpha} = \left[z(0)^{1-\alpha} - \frac{g}{r}\right] e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Ας δούμε στη συνέχεια τη ***δυναμική της εξίσωσης***:

Δεδομένου ότι $0 < \alpha < 1$, $1 - \alpha > 0$ και επίσης $r > 0$, το όριο της τελευταίας εξίσωσης όταν $t \to \infty$ είναι:

$$\lim_{t\to\infty} z^{1-\alpha} = \lim_{t\to\infty}\left\{\left[z(0)^{1-\alpha} - \frac{g}{r}\right] e^{-1(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}\right\} \Rightarrow z^{1-\alpha} \to \frac{g}{r}$$

$$\Rightarrow z \to \left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης αποτελεί το επίπεδο (τιμή) ισορροπίας του λόγου κεφαλαίου - εργασίας $z = K/L$.

Παρατηρούμε ότι ο σχετικός αυτός λόγος χρήσης κεφαλαίου προς εργασία είναι ανάλογος του ρυθμού αύξησης των επενδύσεων (ή αποταμίευσης) ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογος με το ρυθμό αύξησης της προσφοράς εργασίας (r) στην οικονομία.

10.7 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, της μορφής $\frac{d^2y}{dt^2} = k$, όπου k σταθερά

Στο μέρος αυτό του κεφαλαίου παρουσιάζεται μια απλή μορφή διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης και η λύση της, παρόλο που δεν αποτελεί σκοπό του βιβλίου να αναπτύξει διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dt^2} = 8$ και η ορισμένη λύση της για τις ακόλουθες πλευρικές (ή αρχικές) συνθήκες, $y'(2) = 4$ και $y(0) = 10$.

Απάντηση:

Για να υπολογιστεί η γενική λύση λαμβάνουμε το ολοκλήρωμα της κάθε πλευράς της διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

$$\int \frac{d^2y}{dt^2} dt = \int 8\,dt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 8t + c_1 \quad \text{ή} \quad y'(t) = 8t + c_1$$

Για να καταλήξουμε σε συνάρτηση της μεταβλητής y που δεν περιέχει παράγωγο, υπολογίζουμε ξανά τα ολοκληρώματα κάθε πλευράς της τελευταίας εξίσωσης, ως εξής:

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int (8t + c_1)\,dt \Rightarrow y(t) = 4t^2 + c_1 + c_2 \Rightarrow y(t) = 4t^2 + c$$

όπου $c = c_1 + c_2$ και c_1 και c_2 αποτελούν τις σταθερές των ολοκληρωμάτων.

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης «n» τάξης θα συμπεριλαμβάνει «n» σταθερές ολοκλήρωσης.

Για τον υπολογισμό της ορισμένης λύσης αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες στις τελευταίες δύο εξισώσεις, ως εξής:

$$y'(t = 2) = 8(2) + c_1 = 4 \Rightarrow c_1 = -12$$

και

$$y(t = 0) = 4(0^2) + c_1(0) + c_2 = 10 \Rightarrow c_2 = 10$$

Επομένως, η εξίσωση $y(t) = 4t^2 - 12t + 10$ αποτελεί την ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Επομένως, $w(t) = \left[w(0) - \frac{g}{r}\right] e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}$

Εφόσον $w(t) = z^{1-\alpha} \Rightarrow z^{1-\alpha} = \left[z(0)^{1-\alpha} - \frac{g}{r}\right] e^{-(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Ας δούμε στη συνέχεια τη ***δυναμική της εξίσωσης***:

Δεδομένου ότι $0 < \alpha < 1$, $1 - \alpha > 0$ και επίσης $r > 0$, το όριο της τελευταίας εξίσωσης όταν $t \to \infty$ είναι:

$$\lim_{t\to\infty} z^{1-\alpha} = \lim_{t\to\infty}\left\{\left[z(0)^{1-\alpha} - \frac{g}{r}\right] e^{-1(1-\alpha)rt} + \frac{g}{r}\right\} \Rightarrow z^{1-\alpha} \to \frac{g}{r}$$

$$\Rightarrow z \to \left(\frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης αποτελεί το επίπεδο (τιμή) ισορροπίας του λόγου κεφαλαίου - εργασίας $z = K/L$.

Παρατηρούμε ότι ο σχετικός αυτός λόγος χρήσης κεφαλαίου προς εργασία είναι ανάλογος του ρυθμού αύξησης των επενδύσεων (ή αποταμίευσης) ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογος με το ρυθμό αύξησης της προσφοράς εργασίας (r) στην οικονομία.

10.7 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, της μορφής $\frac{d^2y}{dt^2} = k$, όπου k σταθερά

Στο μέρος αυτό του κεφαλαίου παρουσιάζεται μια απλή μορφή διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης και η λύση της, παρόλο που δεν αποτελεί σκοπό του βιβλίου να αναπτύξει διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dt^2} = 8$ και η ορισμένη λύση της για τις ακόλουθες πλευρικές (ή αρχικές) συνθήκες, $y'(2) = 4$ και $y(0) = 10$.

Απάντηση:

Για να υπολογιστεί η γενική λύση λαμβάνουμε το ολοκλήρωμα της κάθε πλευράς της διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

$$\int \frac{d^2y}{dt^2} dt = \int 8\,dt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 8t + c_1 \quad \text{ή} \quad y'(t) = 8t + c_1$$

Για να καταλήξουμε σε συνάρτηση της μεταβλητής y που δεν περιέχει παράγωγο, υπολογίζουμε ξανά τα ολοκληρώματα κάθε πλευράς της τελευταίας εξίσωσης, ως εξής:

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int (8t + c_1)\,dt \Rightarrow y(t) = 4t^2 + c_1 + c_2 \Rightarrow y(t) = 4t^2 + c$$

όπου $c = c_1 + c_2$ και c_1 και c_2 αποτελούν τις σταθερές των ολοκληρωμάτων.

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης «n» τάξης θα συμπεριλαμβάνει «n» σταθερές ολοκλήρωσης.

Για τον υπολογισμό της ορισμένης λύσης αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες στις τελευταίες δύο εξισώσεις, ως εξής:

$$y'(t = 2) = 8(2) + c_1 = 4 \Rightarrow c_1 = -12$$

και

$$y(t = 0) = 4(0^2) + c_1(0) + c_2 = 10 \Rightarrow c_2 = 10$$

Επομένως, η εξίσωση $y(t) = 4t^2 - 12t + 10$ αποτελεί την ορισμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Έξω το 10.6

11 Εξισώσεις Διαφοράς (Difference Equations)

11.1 Εισαγωγή

Σε ξεχωριστό κεφάλαιο του βιβλίου είδαμε ένα πλήθος εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων σε ενδιαφέροντα προβλήματα που αφορούν στη δυναμική των λύσεων επιχειρησιακών και οικονομικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, στη λύση των προβλημάτων αυτών θεωρήσαμε ότι η διαχρονική εξέλιξη τους είναι σε συνεχή χρόνο. Οι ***εξισώσεις διαφοράς (difference equations)*** αφορούν σε υποδείγματα δυναμικών λύσεων, όπου οι μεταβολές των μεταβλητών συμβαίνουν σε διακριτά χρονικά διαστήματα ίσα μεταξύ τους. Λόγου χάρη, ανά λεπτό, ανά ημέρα, ανά εβδομάδα ή ανά μήνα. Έτσι, αν εξετάζουμε την πορεία μιας μεταβλητής σε συνεχή χρόνο αυτό γίνεται μέσω διαφορικών εξισώσεων, ενώ εάν εξηγούμε φαινόμενα όπου η πορεία της μεταβλητής εμφανίζεται σε βήματα σε διακριτά χρονικά διαστήματα τότε γίνεται χρήση εξισώσεων διαφοράς. Όπως και με τις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχουν πολλές εφαρμογές των εξισώσεων διαφοράς σε οικονομικά και επιχειρησιακά προβλήματα.

Παράδειγμα:

Εφόσον τα έσοδα μιας επιχείρησης αυξάνονται κατά 10% σε ετήσια βάση, σε οποιοδήποτε έτος t, το ύψος των εσόδων της επιχείρησης μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_{t+1} = \frac{110}{100} Y_t \Rightarrow Y_{t+1} = 1,1\, Y_t$$

Εναλλακτικά $Y_t = 1,1Y_{t-1}$.

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί παράδειγμα μιας εξίσωσης διαφοράς, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή Y_t είναι συνάρτηση της τιμής της ανεξάρτητης μεταβλητής Y_{t-1}. Δηλαδή η τιμή της μεταβλητής Y στη χρονική περίοδο t (σήμερα) εξαρτάται από την τιμή της (μεταβλητής Y) στη χρονική στιγμή t − 1 (έστω ένα χρόνο πριν).

Γενικότερα, μια εξίσωση διαφοράς μπορεί (στη δεξιά πλευρά της) να περιλαμβάνει μια ή περισσότερες μεταβλητές και η κάθε μια από τις μεταβλητές αυτές να περιλαμβάνει μια ή περισσότερες υστερήσεις, t − 1, t − 2, κ.λ.π.

11.2 Ορολογία

Ας δούμε κάποια χρήσιμη ορολογία η οποία σχετίζεται με τις εξισώσεις διαφοράς. Για μια μεταβλητή Y_t της οποίας οι τιμές είναι συνάρτηση του χρόνου t, η μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής από μια χρονική περίοδο σε μια άλλη (έστω από το ένα έτος στο επόμενο) συμβολίζεται ως $Y_{t+1} - Y_t = \Delta Y_t$. Ισοδύναμα ΔY_t μπορεί να συμβολίζει τη μεταβολή στην τιμή της Y από το προηγούμενο έτος μέχρι σήμερα. Δηλαδή, $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. Αυτή η μεταβολή στην τιμή της Y ονομάζεται ***πρώτη διαφορά (first difference)*** και συμβολίζεται ΔY_t. Το δε σύμβολο Δ ονομάζεται ***τελεστής διαφοράς (difference operator)***.

Έτσι, μπορούν να οριστούν διαδοχικές ***πρώτες διαφορές*** της μεταβλητής Y ως εξής:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$$

$$\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3}, \text{ κ.λ.π.}$$

Αντίστοιχα, η ***δεύτερη διαφορά*** της μεταβλητής Y ορίζεται ως:

$$\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$

$$= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Η ***τρίτη διαφορά*** ορίζεται ως:

$$\Delta^3 Y_t = \Delta(\Delta^2 Y_t) = \Delta(Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}) = Y_t - 3Y_{t-2} - Y_{t-3}$$

Γενικότερα,

$$\Delta^n Y_t = \Delta^{n-1} Y_t - \Delta^{n-1} Y_{t-1} \quad \text{για } n \geq 1$$

Εκτός από τον τελεστή διαφοράς Δ, μπορεί να οριστεί και ο ***τελεστής υστέρησης (lag operator)***, L, ως εξής.

Έστω, L^iY_t, $i = 1, 2, \ldots$, τότε $L^1Y_t = Y_{t-1}$, $L^2Y_t = Y_{t-2}, \ldots$

Έτσι για παράδειγμα, η εξίσωση διαφοράς $Y_t = 1{,}1Y_{t-1}$ που είδαμε παραπάνω, με τη χρήση του τελεστή υστέρησης μπορεί να γραφεί ως:

$$Y_t = 1{,}1L^1Y_t = 1{,}1LY_t$$

Η γενική μορφή μιας ***γραμμικής εξίσωσης διαφοράς με σταθερούς συντελεστές*** a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, έχει ως εξής:

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_n Y_{t-n} = g(t)$$

Αυτή αποτελεί μια εξίσωση διαφοράς ***ν-οστής τάξης***, καθώς ο μέγιστος αριθμός υστερήσεων της μεταβλητής Y είναι n. Επίσης, είναι ***γραμμική*** καθώς η μέγιστη δύναμη της $Y_{t-i}, i = 1, \ldots, n$, είναι το 1 και δεν εμφανίζονται γινόμενα μεταβλητών στην εξίσωση. Τέλος πρόκειται για ***συνήθη εξίσωση διαφοράς***, καθώς η άγνωστη συνάρτηση αποτελεί συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής. Εφόσον η $g(t) = 0$, λέγεται ότι η εξίσωση είναι ***ομογενής (homogeneous)***, ενώ για $g(t) \neq 0$, η εξίσωση είναι ***μη-ομογενής***.

Παραδείγματα

1. $Y_{t+1} - 1{,}1Y_t = 0$ όπου Y_t τα έσοδα μιας επιχείρησης στο έτος t.

2. $Y_{t+1} - 1{,}1Y_t = 600$

3. $Q_{st} = \alpha + \beta P_{t-1}$, όπου Q_{st} η ποσότητα προσφοράς ενός προϊόντος την περίοδο (έτος) t και P_{t-1} η τιμή του προϊόντος την περίοδο (έτος) t – 1, δηλαδή τον προηγούμενο χρόνο.

4. $I_t = 0{,}7I_{t-1} + 0{,}3I_{t-2}$, όπου I_t το ύψος της επένδυσης μιας επιχείρησης στο έτος t, και η οποία προσδιορίζεται ως 70% του ύψους της επένδυσης του προηγούμενου έτους (το έτος t – 1) I_{t-1} και 30% του ύψους της επένδυσης δύο χρόνια πριν, I_{t-2}.

5. $\Delta Y_t = 10Y_t$

Η πρώτη εξίσωση αποτελεί παράδειγμα ομογενούς εξίσωσης διαφοράς πρώτης τάξης.

Η δεύτερη εξίσωση είναι μη-ομογενής, πρώτης τάξης.

Η τρίτη εξίσωση διαφοράς είναι επίσης μη-ομογενής (εφόσον $\alpha \neq 0$) πρώτης τάξης (εφόσον $\beta \neq 0$).

Η τέταρτη εξίσωση είναι παράδειγμα ομογενούς εξίσωσης διαφοράς δεύτερης τάξης.

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Delta Y_t = 10Y_t \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = 10Y_t \Rightarrow -9Y_t - Y_{t-1} = 0$$

$$\Rightarrow Y_t + (1/9)Y_{t-1} = 0$$

Επομένως, πρόκειται για ομογενή εξίσωση πρώτης τάξης.

Περαιτέρω, όλες οι παραπάνω εξισώσεις διαφοράς είναι συνήθεις, γραμμικές, με σταθερούς συντελεστές.

11.3 Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφοράς πρώτης τάξης

Η λύση μιας εξίσωσης διαφοράς ορίζει τη μεταβλητή Y για κάθε τιμή του t και δε συμπεριλαμβάνει κάποιον όρο διαφοράς. Δηλαδή, αναζητούμε τη συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση ταυτοτικά για κάθε τιμή του t. Εφόσον γνωρίζουμε μια οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής Y σε μια περίοδο (π.χ. ένα έτος) – δηλαδή εφόσον έχουμε μια αρχική (ή πλευρική συνθήκη) – μπορεί να βρεθεί η ***ορισμένη*** λύση της εξίσωσης διαφοράς με σταδιακή αντικατάσταση από περίοδο σε περίοδο (από έτος σε έτος). Η μέθοδος επίλυσης ονομάζεται, ***μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων (iterative method)***.

Παράδειγμα:

Να επιλυθεί η εξίσωση διαφοράς $Y_{t+1} = 1{,}1Y_t$ με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων για τα έτη 1, 2, 3, 4, δεδομένου ότι τα έσοδα της επιχείρησης σήμερα, την περίοδο t = 0, είναι 10.000 €. Δηλαδή, εφόσον γνωρίζουμε τα έσοδα της επιχείρησης σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και το σταθερό ετήσιο ρυθμό εξέλιξης των εσόδων, να γίνει πρόβλεψη των εσόδων της επιχείρησης για τα επόμενα τέσσερα χρόνια.

Απάντηση:

Εφόσον $Y_{t+1} = 1{,}1Y_t$, *και* $Y_0 = 10.000$ €, *προκύπτει:*

Έτος 1, $t = 0$: $Y_1 = 1{,}1Y_0 = 1{,}1 \times 10.000 = 11.000$ €

Έτος 2, $t = 1$: $Y_2 = 1{,}1Y_1 = 1{,}1 \times 11.000 = 12.100$ €

Έτος 3, $t = 2$: $Y_3 = 1{,}1Y_2 = 1{,}1 \times 12.100 = 13.310$ €

Έτος 4, $t = 3$: $Y_4 = 1{,}1Y_3 = 1{,}1 \times 13.310 = 14.611$ €

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι δεδομένης της αρχικής συνθήκης, δηλαδή της πληροφορίας ότι $Y_0 = 10.000$ €, οι τιμές της μεταβλητής Y σε επόμενα έτη μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση της αρχικής συνθήκης, $Y_0 = 10.000$ €. Αυτό φαίνεται αντικαθιστώντας διαδοχικά στις παραπάνω εξισώσεις ώστε οι διαδοχικές τιμές του Y_t να είναι συνάρτηση της αρχικής τιμής του Y, Y_0. Έτσι,

$$Y_2 = 1{,}1Y_1 = 1{,}1(1{,}1Y_0) = 1{,}1^2 Y_0$$

$$Y_3 = 1{,}1Y_2 = 1{,}1(1{,}1^2 Y_0) = 1{,}1^3 Y_0$$

$$Y_4 = 1{,}1Y_3 = 1{,}1(1{,}1^3 Y_0) = 1{,}1^4 Y_0$$

Επομένως, για κάθε τιμή του t –δηλαδή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή– η λύση του Y_t είναι:

$$Y_t = 1{,}1^t Y_0$$

και για $Y_0 = 10.000$, $Y_t = 1{,}1^t \times 10.000$

Η χρησιμότητα του γενικού αυτού τύπου, εκτός από το ότι μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής του Y διαχρονικά, έγκειται στο ότι με αντικατάσταση μπορεί να προβλέψει την τιμή του Y σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο μέλλον.

Για παράδειγμα, έστω ότι μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τα έσοδα της επιχείρησης σε 20 χρόνια από σήμερα. Με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$t = 19:\ Y_t = 1{,}1^{19} Y_0 = 6{,}1159 \times 10.000 = 61.159 \text{ €}$$

Γενικότερα, έστω η ***γραμμική ομογενής εξίσωση διαφοράς πρώτης τάξης***

$$Y_t - \beta Y_{t-1} = 0$$

Η ***γενική λύση*** της είναι:

$$Y_t = \beta^t A$$

όπου η τιμή του β προσδιορίζεται από την εξίσωση διαφοράς ενώ A είναι μια σταθερά, της οποίας η τιμή προσδιορίζεται εφόσον υπάρχει κάποια αρχική συνθήκη.

Στο παραπάνω παράδειγμα, η ***γενική λύση*** της εξίσωσης διαφοράς είναι

$$Y_t = A(1{,}1^t)$$

και δεδομένης της αρχικής συνθήκης $Y_0 = 10.000$, η ***ορισμένη λύση*** της εξίσωσης είναι

$$Y_t = 10.000(1{,}1^t)$$

Σημειώνεται ότι με παρόμοιο τρόπο προσδιορίστηκαν και οι γενικές και ορισμένες λύσεις των διαφορικών εξισώσεων.

Γενικότερα, η ***γραμμική μη-ομογενής εξίσωση διαφοράς πρώτης τάξης*** λαμβάνει τη μορφή:

$$Y_t + \beta Y_{t-1} = g(t)$$

Εφόσον $g(t) = \alpha$, η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$Y_t - \alpha - \beta Y_{t-1} = 0 \quad ή \quad Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} \qquad (1)$$

όπου α και β σταθερές.

Η ***γενική λύση της εξίσωσης*** αυτής είναι:

Για $\alpha \neq 0$, δηλαδή για μη ομογενείς εξισώσεις διαφοράς:

Εφόσον $\beta \neq 1$:

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\beta^t + \frac{\alpha}{1-\beta} \qquad (2)$$

ή $Y_t = A\beta^t + c$, όπου $A = \left(Y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)$ και $c = \frac{\alpha}{1-\beta}$

Εφόσον $\beta = 1$:

$$Y_t = Y_0 + \alpha t \ \ ή\ \ A + \alpha t, \quad όπου\ \ A = Y_0 \qquad (3)$$

Για $\alpha = 0$, δηλαδή για ομογενείς εξισώσεις διαφοράς, εύκολα προκύπτει με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (3) αντίστοιχα ότι, οι λύσεις διαμορφώνονται ως εξής:

Εφόσον $\beta \neq 1$:

$$Y_t = A\beta^t, \quad όπου\ A = Y_0 \qquad (4)$$

Εφόσον $\beta = 1$:

$$Y_t = A, \quad όπου\ A = Y_0 \qquad (5)$$

Παραδείγματα:

1. Να επιλυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφοράς $Y_t - 3 - 5Y_{t-1} = 0$, και να βρεθεί η ορισμένη λύση της δεδομένης της συνθήκης $Y_0 = 10$.

Απάντηση:

*Αντικαθιστώντας όπου $\alpha = 3$ και $\beta = 5$ στον τύπο της εξίσωσης (2) προκύπτει η **γενική λύση** της εξίσωσης διαφοράς ως εξής:*

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{3}{1-5}\right)5^t + \frac{3}{1-5} = \left(Y_0 + \frac{3}{4}\right)5^t - \frac{3}{4}$$

Μπορεί να ελεγχθεί η ορθότητα της λύσης αντικαθιστώντας τις τιμές $t = 0$ και $t = 1$ στην παραπάνω εξίσωση. Έτσι,

$$\text{για } t = 0,\ Y_0 = \left(Y_0 + \frac{3}{4}\right)5^0 - \frac{3}{4} = Y_0 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = Y_0$$

$$\text{για } t = 1,\ Y_1 = \left(Y_0 + \frac{3}{4}\right)5^1 - \frac{3}{4} = 5Y_0 + 3$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφοράς τις λύσεις για Y_0 και Y_1 προκύπτει:

$$5Y_0 + 3 = 3 + 5Y_0,$$

το οποίο αποδεικνύει την ορθότητα της λύσης.

*Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας την αρχική συνθήκη $Y_0 = 10$. Η **ορισμένη λύση** της εξίσωσης διαφοράς είναι:*

$$Y_t = \left(10 + \frac{3}{4}\right)5^t - \frac{3}{4} = \frac{43}{4}5^t - \frac{3}{4}$$

2. Να επιλυθεί η εξίσωση διαφοράς $Y_t = 3 + Y_{t-1}$.

Απάντηση:

*Καθώς $\alpha = 3$, $\beta = 1$, πρόκειται για μη-ομογενή εξίσωση διαφοράς. Η **γενική λύση** της εξίσωσης αυτής σύμφωνα με τον τύπο (3) είναι:*

$$Y_t = Y_0 + 3t.$$

*Δεδομένης της αρχικής συνθήκης $Y_0 = 10$, η **ορισμένη λύση** είναι:*

$$Y_t = 10 + 3t$$

3. Να επιλυθεί η εξίσωση διαφοράς $Y_t = Y_{t-1}$.

Απάντηση:

Η εξίσωση διαφοράς $Y_t = Y_{t-1}$ μπορεί να γραφεί και ως $Y_t - Y_{t-1} = 0$.

Επομένως, $\alpha = 0, \beta = 1$ στην εξίσωση (1), και πρόκειται για ομογενή εξίσωση διαφοράς, της οποίας η λύση δίνεται από τον τύπο (5). Επομένως, η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι:

$$Y_t = Y_0.$$

11.4 Δυναμική ευστάθεια (stability) των γραμμικών εξισώσεων διαφοράς

Η δυναμική ευστάθεια των εξισώσεων διαφοράς μπορεί να προσδιοριστεί με τρόπο αντίστοιχο των διαφορικών εξισώσεων. Ας δούμε όμως ακριβώς τι συμβαίνει. Έστω η ακόλουθη γραμμική εξίσωση διαφοράς $Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1}$, της οποίας η λύση είδαμε ότι δίνεται από τον τύπο (2), ο οποίος επαναλαμβάνεται εδώ για ευκολία:

$$Y_t = A\beta^t + c, \text{ όπου } A = \left(Y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right) \text{ και } c = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

1. Το μέρος $A\beta^t$ της λύσης ονομάζεται ***συμπληρωματική συνάρτηση (complementary function)***, ενώ το μέρος c είναι η ***ορισμένη ή ειδική (particular) συνάρτηση*** της λύσης. Δηλαδή, ισχύει:

$$Y_t = \text{Συμπληρωματική Συνάρτηση} + \text{Ορισμένη Συνάρτηση}$$

2. Η ορισμένη λύση (c) στα οικονομικά εκφράζει το διαχρονικό (intertemporal) επίπεδο ισορροπίας της μεταβλητής Y.

Η συμπληρωματική συνάρτηση $A\beta^t (= Y_t - c)$ εκφράζει την απόκλιση από το επίπεδο ισορροπίας, c.

3. Η λύση της εξίσωσης διαφοράς, δηλαδή η Y_t, είναι δυναμικά ευσταθής εφόσον η συμπληρωματική συνάρτηση $A\beta^t \to 0$ όταν $t \to \infty$. Δηλαδή $\lim_{t\to\infty} A\beta^t = 0$. Η τροχιά της λύσης (δηλαδή της μεταβλητής Y_t) εξαρτάται από τη βάση β της συνάρτησης, όπου $-\infty < \beta < +\infty$. Εξετάζουμε διάφορες περιπτώσεις στη συνέχεια:

3α. Για την απλοποίηση της ανάλυσης, ας υποθέσουμε αρχικά ότι $c = 0$, $A = 1$, οπότε εξετάζουμε τις πιθανές τροχιές της εξίσωσης

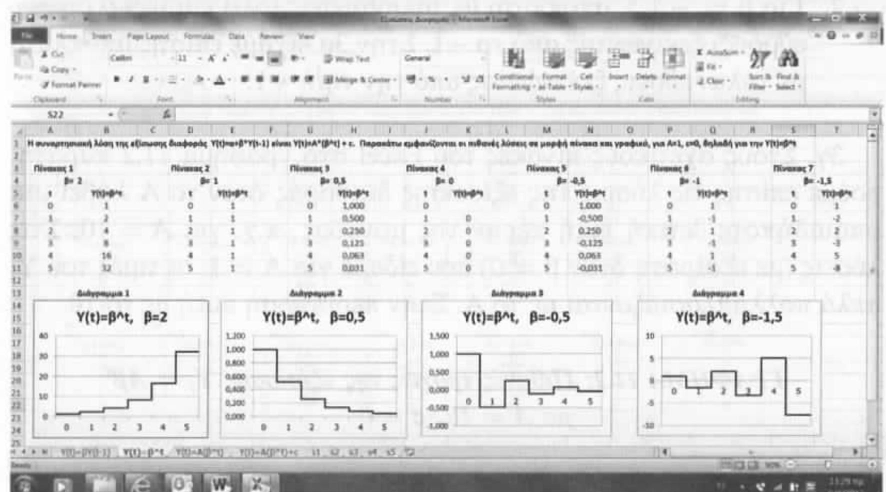
$Y_t = \beta^t$. Διακρίνουμε εφτά (7) περιπτώσεις, οι οποίες αναλύονται παρακάτω. Οι σχετικοί πίνακες των λύσεων όπως επίσης και οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων περιπτώσεων, για ένα εύρος τιμών του t και της Y(t), εμφανίζονται στο γράφημα 11.1.

1. Εφόσον $\beta > 1$ όταν $t \to \infty$, $Y_t = \beta^t$ αυξάνεται και αποκλίνει μονοτονικά στο άπειρο μέσω μιας τροχιάς βημάτων (σαν σκάλα). Δηλαδή, $\lim_{t\to\infty} \beta^t = +\infty$. Η λύση επομένως είναι ασταθής. Προσοχή, η τροχιά δεν είναι συνεχής αλλά αποτελείται από τμήματα, όπως φαίνεται και στον πίνακα 1 και το αντίστοιχο διάγραμμα 1 (για $\beta = 2$), στο γράφημα 11.1.
2. Για $\beta = 1$, $\lim_{t\to\infty} 1^t = 1$. Η τροχιά της λύσης είναι μια οριζόντια γραμμή στο ύψος του +1, και είναι στάσιμη – βλέπε πίνακα 1 στο γράφημα 11.1.
3. Για $0 < \beta < 1$, δηλαδή όταν το β είναι θετικό κλάσμα, η $Y_t = \beta^t$ συγκλίνει μονοτονικά και σταδιακά (σε βήματα) στο μηδέν (0) – στον οριζόντιο άξονα –από θετικές τιμές– βλέπε πίνακα 3 και διάγραμμα 2 (για $\beta = 0,5$), στο γράφημα 11.1.
4. Εφόσον $\beta = 0$, $Y_t = 0$ για κάθε τιμή του t – βλέπε πίνακα 4 στο γράφημα 11.1.
5. Για $-1 < \beta < 0$ το β είναι αρνητικό κλάσμα. Στην περίπτωση αυτή η λύση $Y_t = \beta^t$ συγκλίνει με ταλαντώσεις (oscillatory) στο μηδέν (0), όταν το $t \to \infty$, ξεκινώντας από την τιμή $Y_t = 1$ – βλέπε πίνακα 5 και διάγραμμα 3 (για $\beta = -0,5$), στο γράφημα 11.1.
6. Για $\beta = -1$, όταν το $t \to \infty$ η $Y_t = \beta^t$ ακολουθεί μια τροχιά ταλαντώσεων (oscillations) σταθερού εύρους, ±1, ξεκινώντας από το +1 – βλέπε πίνακα 6 στο γράφημα 11.1.
7. Για $\beta < -1$, όταν το $t \to \infty$ η $Y_t = \beta^t$ αποκλίνει με ταλαντώσεις όλο και μεγαλύτερου εύρους ξεκινώντας από την τιμή +1 – βλέπε πίνακα 7 και διάγραμμα 4 (για $\beta = -1,5$) στο γράφημα 11.1. Η λύση είναι ασταθής.

Σημειώνεται ότι το εύρος των διαδοχικών βημάτων των παραπάνω λύσεων εξαρτάται από την τιμή του β στο εύρος των τιμών του t που ορίζεται.

Όπως είδαμε, οι παραπάνω περιπτώσεις εμφανίζονται στο γράφημα 11.1 σε μορφή πίνακα και σε γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια του Excel για συγκεκριμένες τιμές του β στα διαστήματα που περιγράφονται. Έτσι, βλέπουμε σε μορφή πίνακα τις τιμές της λύσης για $t = 0, 1, \ldots, 5$ και τις εξής τιμές του β: $\beta = 2,\ 1,\ 0{,}5,\ 0,\ -0{,}5,\ -1$ και $-1{,}5$. Αντίστοιχα, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των λύσεων για $\beta = 2,\ 0{,}5,\ -0{,}5$ και $-1{,}5$, όπου επιβεβαιώνονται οι παραπάνω περιγραφές. Δεν εμφανίζουμε γραφικά τις λύσεις για τιμές του $\beta = 1,\ 0$ και -1 καθώς οι γραφικές παραστάσεις τους αποτελούν για όλες τι τιμές του t οριζόντιες γραμμές σε επίπεδα 1, 0 και −1, αντίστοιχα.

ΓΡΑΦΗΜΑ 11.1: Πιθανές τροχιές της εξίσωσης $Y_t = \beta^t$ για $c = 0$, $A = 1$



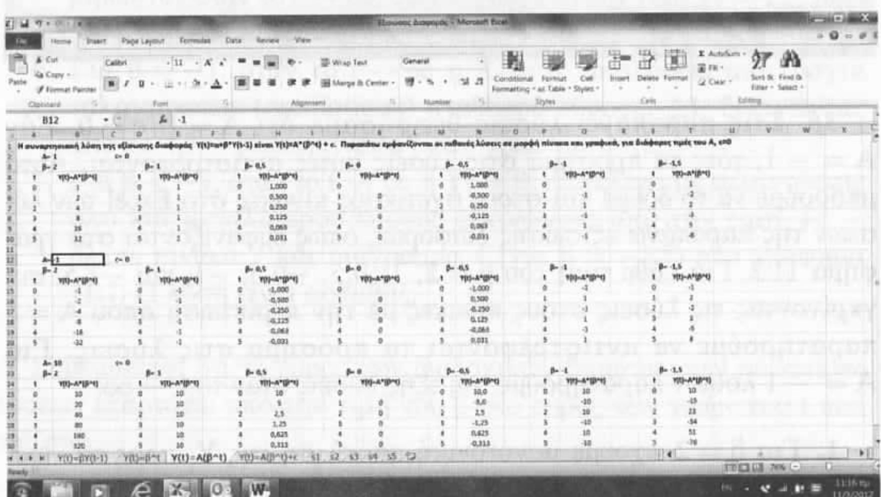
3β. Στις παραπάνω λύσεις θεωρήσαμε ότι $A = 1$, $c = 0$. Εάν $A = -1$, τότε τα πρόσημα στις λύσεις αυτές αντιστρέφονται. Αυτό μπορούμε να το δούμε και στους σχετικούς πίνακες στο Excel των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης διαφοράς, όπως εμφανίζονται στο γράφημα 11.2. Για κάθε τιμή του $\beta = 2,\ 1,\ 0{,}5,\ -0{,}5,\ -1$, και $-1{,}5$, συγκρίνοντας τις λύσεις στους πίνακες με την περίπτωση όπου $A = 1$ παρατηρούμε να αντιστρέφονται τα πρόσημα στις λύσεις. Για $A = -1$ λοιπόν παρατηρούμε, τις εξής λύσεις όταν το $t \to \infty$:

1. Για $\beta = 2$, έχουμε μονοτονική απόκλιση της Y_t προς το $-\infty$. Στην 3α είχαμε απόκλιση στο $+\infty$.

2. Για $\beta = 1$, $Y_t = -1$ για κάθε τιμή του t. Στην 3α είχαμε $Y_t = +1$.
3. Για $\beta = 0{,}5$, έχουμε μονοτονική σύγκλιση της Y_t στο μηδέν (0) από κάτω – από αρνητικές τιμές. Στην 3α είχαμε μονοτονική σύγκλιση στο 0 από θετικές τιμές.
4. Για $\beta = 0$, $Y_t = 0$ για κάθε τιμή του t. Ίδια λύση με την 3α.
5. Για $\beta = -0{,}5$, σύγκλιση της Y_t στο μηδέν (0) με ταλαντώσεις, ξεκινώντας από την τιμή $Y_t = -1$. Στην 3α είχαμε σύγκλιση στο μηδέν με ταλαντώσεις, ξεκινώντας από $Y_t = +1$.
6. Για $\beta = -1$, ταλαντώσεις σταθερού εύρους ένα (1), ξεκινώντας από την τιμή $Y_t = -1$. Στην 3α είχαμε επίσης ταλαντώσεις σταθερού εύρους 1 ξεκινώντας όμως από την τιμή +1.
7. Για $\beta = -1{,}5$, απόκλιση με ταλαντώσεις (όλο και μεγαλύτερου εύρους) ξεκινώντας από το −1. Στην 3α είχαμε επίσης απόκλιση με ταλαντώσεις ξεκινώντας από την τιμή +1.

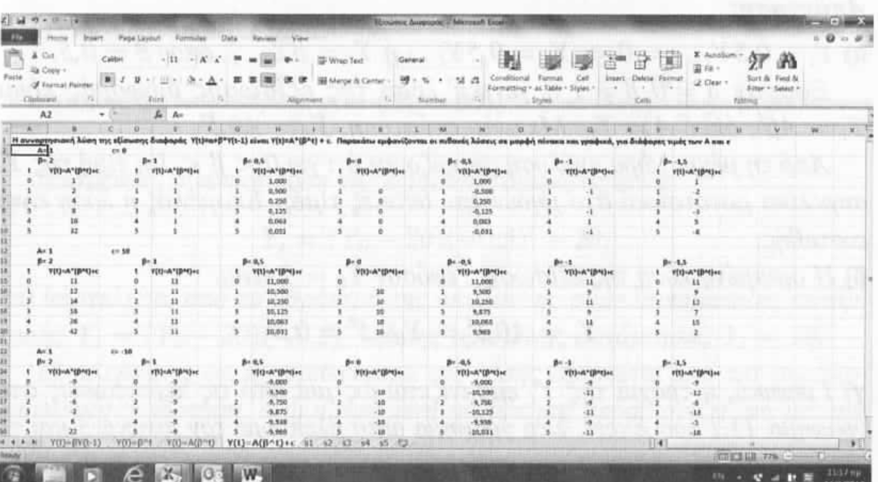
3γ. Στους σχετικούς πίνακες του Excel στο γράφημα 11.2 παρατηρούμε επίσης τις λύσεις της εξίσωσης διαφοράς όταν το A λάβει μια οποιαδήποτε θετική τιμή πέραν της μονάδας, π.χ. για A = 10. Στις λύσεις (με εξαίρεση όταν β = 0) που είδαμε για A = 1, οι τιμές του Y_t απλά πολλαπλασιάζονται με το A. Στην περίπτωση αυτή με το 10.

ΓΡΑΦΗΜΑ 11.2: Πιθανές τροχιές της εξίσωσης $Y_t = A\beta^t$ για $A = 10$, $c = 0$



3δ. Έστω τώρα ότι $c \neq 0$, δηλαδή για μη ομογενείς εξισώσεις διαφοράς, π.χ. για c = 10. Όπως βλέπουμε και στους σχετικούς πίνακες με τις λύσεις στο Excel, στο γράφημα 11.3, στις λύσεις που είδαμε με c = 0, απλά προστίθεται το c. Παραθέτουμε δύο περιπτώσεις λύσεων για c = 10 και c = − 10, προς επιβεβαίωση την παραπάνω. Γραφικά, η τομή της γραφικής παράστασης με τον κάθετο άξονα της Y_t μεταβάλλεται (αυξάνεται ή μειώνεται) ανάλογα με την τιμή του c.

ΓΡΑΦΗΜΑ 11.3: Πιθανές τροχιές της εξίσωσης $Y_t = A\beta^t + c$, $A = 1$, $c = 10$ και $c = -10$



3ε. Συνοπτικά:

- για $|\beta| > 1$ η τροχιά της μεταβλητής Y αποκλίνει
- για $|\beta| < 1$ η τροχιά της μεταβλητής Y συγκλίνει
- για $\beta > 0$ η τροχιά της μεταβλητής Y δεν ταλαντώνεται
- για $\beta < 0$ η τροχιά της μεταβλητής Y ταλαντώνεται

Συνοπτικά, μέσω της μέχρι τώρα ανάλυσης είδαμε ότι επιλύοντας μια εξίσωση διαφοράς που περιγράφει ένα (οικονομικό) φαινόμενο για μια μεταβλητή Y_t, μπορούμε μέσω της συναρτησιακής λύσης της εξίσωσης να προβλέψουμε:

- τις τιμές της μεταβλητής για συγκεκριμένες περιόδους (έστω, έτη) στο μέλλον.

- εάν η μεταβλητή θα συγκλίνει σε κάποιο επίπεδο/τιμή στο μέλλον ή όχι, δηλαδή εάν η λύση είναι ευσταθής ή όχι.
- τη διαχρονική τροχιά της μεταβλητής –το «μονοπάτι» που θα ακολουθήσει η μεταβλητή– για διαφορετικές τιμές του χρόνου.

Παράδειγμα 1:

α) Να επιλυθεί η ομογενής εξίσωση διαφοράς $Y_t - 0{,}5Y_{t-1} = 0$

β) Ποιά η ορισμένη (ή ειδική) λύση της εξίσωσης εάν $Y_0 = 1$;

γ) Δείξτε τη δυναμική της λύσης διαχρονικά (για διαφορικές τιμές του χρόνου t).

Απάντηση:

α) *$Y_t - 0{,}5Y_{t-1} = 0 \Rightarrow Y_t = 0{,}5Y_{t-1}$ ή $Y_t = \beta Y_{t-1}$, όπου $\beta = 0{,}5$.*

Εφόσον $a = 0, \beta \neq 1$ η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι $Y_t = A\beta^t$, όπου $A = Y_0$. Με αντικατάσταση, $Y_t = A0{,}5^t$.

Από τη μέχρι τώρα ανάλυση γνωρίζουμε ότι για $0 < \beta < 1$ η τιμή της Y_t συγκλίνει μονοτονικά στο μηδέν από θετικές τιμές. Επομένως η λύση είναι ευσταθής.

β) *Η ορισμένη λύση της εξίσωσης, εφόσον $Y_0 = 1$ είναι:*

$$Y_t = A0{,}5^t = Y_0 0{,}5^t = 0{,}5^t$$

γ) *Γραφικά, η τροχιά της Y_t εμφανίζεται ως μια από τις περιπτώσεις στο γράφημα 11.1 του Excel. Στο γράφημα αυτό βλέπουμε τον πίνακα 3 και το αντίστοιχο διάγραμμα 2 των σχετικών τιμών της Y_t για $t = 0, 1, \ldots, 5$. Έτσι, για $t = 0$, $Y_0 = 1$, για $t = 1$, $Y_1 = 0{,}5$ για $t = 2$, $Y_2 = 0{,}25$, κ.λ.π. Δηλαδή, σε κάθε επόμενο έτος, η Y_t λαμβάνει τιμή η οποία είναι το ήμισυ εκείνης της προηγούμενης περιόδου. Πολύ γρήγορα λοιπόν στο χρόνο η Y_t πλησιάζει (συγκλίνει) στο μηδέν (0).*

Γενικότερα, σε μια εξίσωσης διαφοράς αυτής της μορφής, όσο μικρότερη η τιμή του β (όπου $0 < \beta < 1$) τόσο γρηγορότερη η σύγκλιση στο επίπεδο ισορροπίας –στο μηδέν– στην περίπτωση αυτή. Για τιμές του β πιο κοντά στο 1 η σύγκλιση στο μηδέν είναι αργή.

Παράδειγμα 2:

α) Να επιλυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση διαφοράς

$$Y_t + 0{,}5Y_{t-1} - 30 = 0$$

β) Ποιά η ορισμένη λύση της εξίσωσης εφόσον είναι γνωστό ότι $Y_3 = 10$;

Απάντηση:

α) *Πρόκειται για τη μη-ομογενή (καθώς $a \neq 0$) εξίσωση διαφοράς $Y_t = -0{,}5Y_t + 30$, με $a = 30$, $\beta = -0{,}5$.*

Η γενική λύση αποτελείται από το άθροισμα της συμπληρωματικής συνάρτησης ($A\beta^t$) και της ορισμένης συνάρτησης (c). Δηλαδή,

$$Y_t = A\beta^t + c,\ \text{όπου}\ A = \left(Y_0 - \frac{a}{1-\beta}\right)Y,\ c = \frac{a}{1-\beta}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$A = Y_0 - \frac{30}{1-(-0{,}5)} = (Y_0 - 20), \quad c = \frac{30}{1-(-0{,}5)} = 20$$

Επομένως, η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι:

$$Y_t = (Y_0 - 20)(-0{,}5)^t + 20,$$

και αποτελείται από το άθροισμα της ακόλουθης συμπληρωματικής συνάρτησης $Y_t = (Y_0 - 20)(-0{,}5)^t$ και της ορισμένης συνάρτησης $Y_t = 20$.

Είναι εμφανές ότι η συμπεριφορά της λύσης εξαρτάται από την συμπληρωματική συνάρτηση, ενώ η ορισμένη συνάρτηση προσδιορίζει μια μετακίνηση της τροχιάς προς τα πάνω, κατά +20. Όπως είδαμε νωρίτερα εφόσον $-1 < \beta < 0$, η τροχιά της Y_t συγκλίνει με ταλαντώσεις στο μηδέν, ξεκινώντας από την τιμή ($Y_0 - 20$).

β) *Η ορισμένη (ή ειδική) λύση της συνάρτησης υπολογίζεται με αντικατάσταση, αξιοποιώντας την πληροφορία από την αρχική συνθήκη ότι για $t = 3$, $Y = 10$. Δηλαδή, $Y_3 = 10$. Επομένως,*

$$Y_3 = (Y_0 - 20)(-0{,}5)^3 + 20 \Rightarrow 10 = -0{,}125Y_0 - 20(-0{,}125) + 20$$

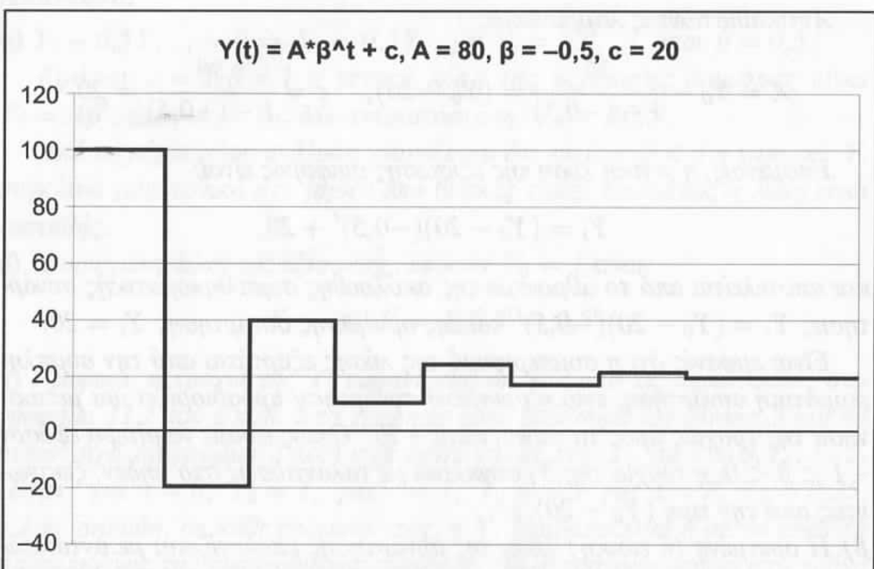
$$\Rightarrow Y_0 = 100.$$

Επομένως, η ακόλουθη εξίσωση αποτελεί την ορισμένη λύση της εξίσωσης διαφοράς.

$$Y_t = 80(-0{,}5)^t + 20.$$

Κατά συνέπεια, η Y_t συγκλίνει με ταλαντώσεις στην τιμή 20. Η γραφική παράσταση της λύσης μπορεί να σχεδιαστεί αντικαθιστώντας σταδιακά διάφορες τιμές του t στην τελευταία εξίσωση. Έτσι, για $t = 0$, $Y = 100$, για $t = 1$, $Y = -20$, για $t = 2$, $Y = 40$, για $t = 3$, $Y = 10$, για $t = 4$, $Y = 25$, κ.λ.π. Η γραφική παράσταση της λύσης εμφανίζεται στο γράφημα 11.4, το οποίο έχει δημιουργηθεί στο Excel.

ΓΡΑΦΗΜΑ 11.4: Γραφική απεικόνιση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης $Y_t + 0{,}5Y_{t-1} - 30 = 0$. Δηλαδή, της συνάρτησης $Y_t = 80(-0{,}5^t) + 20$



Παράδειγμα 3:

α) Να επιλυθεί η μη-ομογενής γραμμική εξίσωση διαφοράς

$$Y_{t-1} - 4Y_t + 36 = 0 \quad ή \quad Y_{t+1} = 4Y_t - 36$$

β) Να ελεγχθεί η λύση για τιμές $t = 0$ και $t = 1$.

γ) Να διερευνηθεί η δυναμική της λύσης.

Απάντηση:

α) *Επιθυμούμε πρώτα να μετατρέψουμε την εξίσωση στη γενική της μορφή $Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1}$.*

Μετακινώντας τις χρονικές περιόδους πίσω κατά μια περίοδο, λαμβάνουμε:

$$Y_t = -36 + 4Y_{t-1} \text{ και επομένως } \alpha = -36 \text{ και } \beta = 4.$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η ακόλουθη ***γενική λύση:***

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{-36}{1-4}\right)(4^t) + \left(\frac{-36}{1-4}\right)$$

$$\Rightarrow Y_t = (Y_0 + 12)(4^t) + 12 = A4^t + 12$$

όπου $A = Y_0 + 12$ και $c = 12$.

β) *Για $t = 0$, $Y_0 = (Y_0 + 12) + 12 = Y_0 + 24$*

Για $t = 1$, $Y_1 = (Y_0 + 12)4 + 12 = 4Y_0 + 60$

Αντικαθιστώντας στην $Y_{t+1} = 4Y_t - 36$ προκύπτει:

$$4Y_0 + 60 = 4(Y_0 + 24) - 36 \Rightarrow 4Y_0 + 60 = 4Y_0 + 60.$$

Επομένως, ικανοποιείται η λύση.

γ) *Η δυναμική της λύσης εξαρτάται από τη συμπληρωματική συνάρτηση, η οποία εδώ είναι $Y_t = A4^t$.*

Δεδομένου ότι $\beta = 4$, γνωρίζουμε ότι για $\beta > 1$ η λύση είναι ασταθής και η μεταβλητή Y_t αποκλίνει μονοτονικά στο άπειρο όταν $t \rightarrow \infty$.

11.5 Οικονομικές Εφαρμογές των εξισώσεων διαφοράς

11.5.1 Επένδυση ποσού χρημάτων και η μελλοντική του αξία

Ένα ποσό χρημάτων P_0 επενδύεται με ετήσιο επιτόκιο r%.

α) Ποιά εξίσωση μπορεί να περιγράψει την αξία της επένδυσης στο τέλος οποιουδήποτε έτους;

β) Να προσδιοριστεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς.

Απάντηση:

α) $P_{t+1} = P_t + rP_t = (1 + r)P_t$

Σε μορφή $Y_t = a + \beta Y_{t-1}$ η παραπάνω γίνεται $P_t = (1+r)P_{t-1}$.

Ισοδύναμα, $P_t = \beta P_{t-1}$, όπου $\beta = (1+r)$ και $a = 0$.

β) *Η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς ευρίσκεται αντικαθιστώντας στον τύπο της λύσης (δηλαδή στην εξίσωση (4) $Y_t = A\beta^t$, όπου $A = Y_0$), όπου $a = 0$ και $\beta = 1 + r$ ως εξής:*

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

Όπως είναι γνωστό, εφόσον $(1+r) > 1$, η μεταβλητή P_t αποκλίνει μονοτονικά στο άπειρο. Δηλαδή το ποσό των χρημάτων στο λογαριασμό αυξάνεται στο άπειρο.

11.5.2 Το υπόδειγμα του ιστού της αράχνης (cobweb model) για ισορροπία στην αγορά των νεότευκτων πλοίων

Έστω ότι απαιτείται ένα έτος για την παραγγελία και κατασκευή ενός πλοίου. Η παραγγελία του πλοίου βασίζεται στις τιμές των πλοίων που επικρατούν στην αγορά ένα χρόνο νωρίτερα για παραδόσεις που θα γίνουν ένα χρόνο μετά. Επομένως, η προσφορά νέας χωρητικότητας (πλοίων) στην αγορά μπορεί να γραφεί ως $Q_{st} = a + bP_{t-1}$, η δε εξίσωση που περιγράφει τη ζήτηση, έστω ότι είναι $Q_{dt} = d + eP_t$.

Η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν $Q_{st} = Q_{dt} = Q^e$. Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$a + bP_{t-1} = d + eP_t \Rightarrow P_t = \frac{a-d}{e} + \frac{b}{e}P_{t-1}$$

$$\Rightarrow P_t = \alpha + \beta P_{t-1}, \text{ όπου } \alpha = \frac{a-d}{e} \text{ και } \beta = \frac{b}{e}.$$

Η παραπάνω εξίσωση διαφοράς περιγράφει την εξέλιξη των τιμών των νεότευκτων πλοίων στην αγορά νέων επενδύσεων.

Η ***γενική λύση*** της εξίσωσης διαφοράς προκύπτει αντικαθιστώντας στο γενικό τύπο –την εξίσωση (2)– της λύσης που είδαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο. Επομένως,

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\beta^t + \frac{\alpha}{1-\beta},$$

όπου $\alpha = \frac{a-d}{e}$, $\beta = \frac{b}{e}$ και $c = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\frac{a-d}{e}}{1-\frac{b}{e}}\right)\left(\frac{b}{e}\right)^t + \left(\frac{\frac{a-d}{e}}{1-\frac{b}{e}}\right)$$

$$= \left(P_0 - \frac{a-d}{e-b}\right)\left(\frac{b}{e}\right)^t + \left(\frac{a-d}{e-b}\right)$$

Εάν η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία $P_t = P_{t-1} = P^e$ και επομένως από τη σχέση ισορροπίας $a + bP_{t-1} = d + eP_t$ προκύπτει:

$$a + bP^e = d + eP^e \Rightarrow P^e = \frac{a-d}{e-b}.$$

Με αντικατάσταση στο γενικό τύπο της λύσης λαμβάνουμε την εξής ***γενική λύση*** της εξίσωσης διαφοράς, η οποία περιγράφει την πορεία των τιμών των πλοίων:

$$P_t = (P_0 - P^e)\left(\frac{b}{e}\right)^t + P^e$$

Ανάλυση ευστάθειας:

Η δυναμική των τιμών των πλοίων επομένως εξαρτάται, όπως έχουμε ήδη αναλύσει, από τη συμπληρωματική συνάρτηση

$$P_t = (P_0 - P^e)\left(\frac{b}{e}\right)^t.$$

Δηλαδή, εξαρτάται από την απόκλιση του σημείου ισορροπίας από την αρχική τιμή της P, P_0, και από το συντελεστή $\left(\frac{b}{e}\right)^t$.

Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τον τελευταίο όρο.

Από τα οικονομικά γνωρίζουμε ότι οι καμπύλες ζήτησης έχουν αρνητική κλίση και επομένως $e < 0$, ενώ οι καμπύλες προσφοράς έχουν θετική κλίση και επομένως $b > 0$. Κατά συνέπεια $\beta = \frac{b}{e} < 0$.

Όπως είδαμε νωρίτερα στην ανάλυση που συνοδεύει το γράφημα

11.1, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των πλοίων ταλαντώνονται. Η ευστάθεια του συστήματος επομένως εξαρτάται από το μέγεθος της αρνητικής τιμής που θα λάβει ο συντελεστής β. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι:

- για $-1 < \beta < 0$, οι τιμές των πλοίων συγκλίνουν σε ένα (νέο) επίπεδο ισορροπίας με ταλαντώσεις, όπως στον πίνακα 5 και διάγραμμα 3 του γραφήματος 11.1.
- για $\beta = -1$, οι τιμές δε συγκλίνουν σε κάποιο σημείο ισορροπίας αλλά ταλαντώνονται διαρκώς μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών, όπως στον πίνακα 6 του γραφήματος 11.1.
- για $\beta < -1$, η λύση είναι επίσης ασταθής και η τροχιά των τιμών αποκλίνει με ταλαντώσεις στο άπειρο, όπως στον πίνακα 7 και διάγραμμα 4 του γραφήματος 11.1.

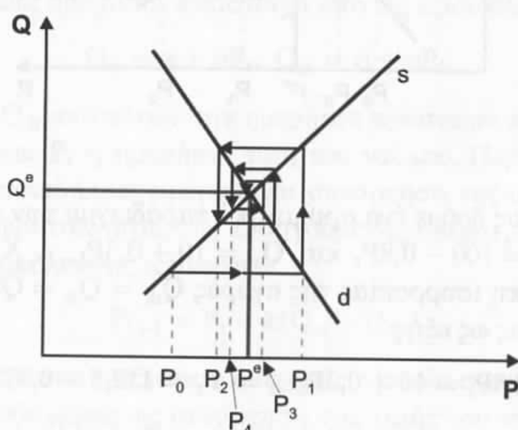
Επομένως, το «μονοπάτι» που ακολουθούν οι τιμές των πλοίων σε συνέχεια κάποιας μεταβολής στην προσφορά ή στη ζήτηση των πλοίων εξαρτάται από την τιμή του β, δηλαδή από τις σχετικές τιμές του b και του e, δηλαδή από τις σχετικές κλίσεις της καμπύλης προσφοράς και της καμπύλης ζήτησης. Ειδικότερα:

- όταν η καμπύλη της προσφοράς έχει σχετικά μικρότερη κλίση (είναι λιγότερο απότομη) από την καμπύλη της ζήτησης $\left(b < e \Rightarrow -1 < \frac{b}{e} < 0\right)$, η δυναμική τροχιά των τιμών των πλοίων στην αγορά είναι ευσταθής.
- Εάν η κλίση της καμπύλης προσφοράς είναι ίση με εκείνη της καμπύλης ζήτησης τότε $b = e$ και $\beta = \frac{b}{e} = -1$. Το σύστημα είναι ασταθές.
- Στην περίπτωση που η κλίση της καμπύλης προσφοράς (b) είναι μεγαλύτερη από εκείνη της καμπύλης ζήτησης (e), πάλι έχουμε αστάθεια στο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των πλοίων αποκλίνουν με ταλαντώσεις στο άπειρο.

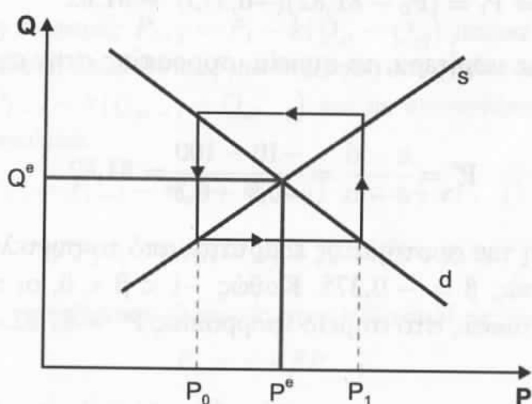
Συμπερασματικά, όταν η καμπύλη προσφοράς έχει μικρότερη κλίση από την καμπύλη της ζήτησης οι τιμές ακολουθούν μια τροχιά ευστάθειας (με ταλαντώσεις) και συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας. Τα διαγράμματα 11.1-11.3 εμφανίζουν τις πιθανές λύσεις – τροχιές της

τιμής P_t από ένα σημείο (μια αρχική τιμή) εκτός ισορροπίας P_0, υπό τις τρεις διαφορετικές συνθήκες που αφορούν στις σχετικές κλίσεις των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης. Στο διάγραμμα 11.1 υπάρχει σύγκλιση τιμών με ταλαντώσεις στο σημείο ισορροπίας. Στα διαγράμματα 11.2 και 11.3 οι λύσεις είναι ασταθείς αν και διαφορετικές μεταξύ τους, όπως εξηγήθηκε πιο πάνω.

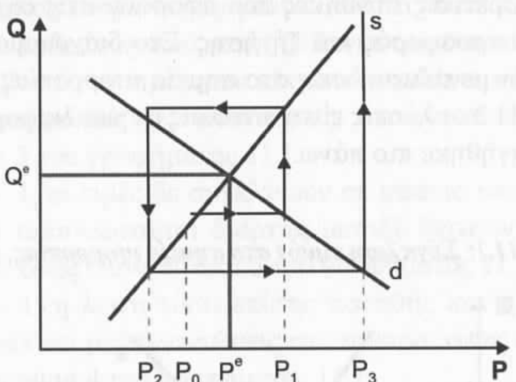
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 11.1: Σύγκλιση τιμών στο σημείο ισορροπίας, με ταλαντώσεις



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 11.2: Μη-σύγκλιση στο επίπεδο ισορροπίας – οι τιμές ταλαντώνονται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 11.3: Απόκλιση τιμών στο άπειρο με ταλαντώσεις



Παράδειγμα:

Περαιτέρω ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα των παραπάνω. Έστω $Q_{dt} = 100 - 0{,}8P_t$ και $Q_{st} = 10 + 0{,}3P_{t-1}$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ισορροπίας της αγοράς $Q_{dt} = Q_{st} = Q^e$ προκύπτει η τιμή ισορροπίας ως εξής:

$$100 - 0{,}8P_t = 10 + 0{,}3P_{t-1} \Rightarrow P_t = 112{,}5 - 0{,}375P_{t-1}.$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφοράς είναι:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{112{,}5}{1+0{,}375}\right)(-0{,}375)^t + \left(\frac{112{,}5}{1+0{,}375}\right)$$

$$\Rightarrow P_t = (P_0 - 81{,}82)(-0{,}375)^t + 81{,}82$$

Όπως είδαμε νωρίτερα, το σημείο ισορροπίας στην αγορά ορίζεται ως:

$$P^e = \frac{a-d}{e-b} = \frac{-10-100}{-0{,}9-0{,}3} = 81{,}82$$

Η δυναμική του συστήματος εξαρτάται από το συντελεστή της εξίσωσης διαφοράς, $\beta = -0{,}375$. Καθώς $-1 < \beta < 0$, οι τιμές συγκλίνουν με ταλαντώσεις στο σημείο ισορροπίας $P^e = 81{,}82$.

11.5.3 Διαμόρφωση τιμών ως συνάρτηση της υπερβάλλουσας προσφοράς στην αγορά προϊόντος

Έστω οι ακόλουθες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης στην αγορά των ναύλων των ποντοπόρων πλοίων. Το «προϊόν» αφορά στην υπηρεσία της μεταφοράς. Πρόκειται για μια αγορά στην οποία επικρατούν συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού και η ισορροπία διαμορφώνεται σε καθημερινή βάση από τις θέσεις και τις κλίσεις των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης χωρητικότητας (υπηρεσιών μεταφοράς). Έστω ότι οι τελευταίες ορίζονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

$$Q_{st} = a + bP_t,\ Q_{dt} = d + eP_t,$$

όπου Q_{st} και Q_{dt} αποτελούν την ημερήσια προσφορά και ζήτηση χωρητικότητας και P_t η ημερήσια τιμή του ναύλου. Περαιτέρω, η τιμή του ναύλου οποιαδήποτε ημέρα είναι συνάρτηση της υπερβάλλουσας προσφοράς χωρητικότητας της προηγούμενης ημέρας, και περιγράφεται μέσω της ακόλουθης εξίσωσης:

$$P_{t+1} = P_t - k(Q_{st} - Q_{dt}).$$

α) Να προσδιοριστεί η εξίσωση διαφοράς η οποία συσχετίζει την τιμή του ναύλου κάθε μέρας ως συνάρτηση της τιμής του ναύλου που διαμορφώθηκε στην αγορά την προηγούμενη μέρα.
β) Να προσδιοριστεί η λύση της εξίσωσης διαφοράς και να αναλυθεί η ευστάθεια των ναύλων των πλοίων.

Απάντηση:

α) *Η εξίσωση διαφοράς $P_{t+1} = P_t - k(Q_{st} - Q_{dt})$ μπορεί να γραφεί στην κλασική της μορφή λαμβάνοντας μια υστέρηση του χρόνου στην παραπάνω. Έτσι, $P_t = P_{t-1} - k(Q_{st-1} - Q_{dt-1})$ και με αντικατάσταση των Q_{st-1} και Q_{dt-1} προκύπτει:*

$$P_t = P_{t-1} - k(a + bP_{t-1}) + k(d + eP_{t-1})$$

$$\Rightarrow P_t = -k(a-d) + (1 - kb + ke)P_{t-1}.$$

Γράφοντας την εξίσωση διαφοράς στην κλασική της μορφή έχουμε:

$$P_t = a + \beta P_{t-1},$$

όπου $a = k(d-a)$, $\beta = (1 - kb + ke)$

β) *Η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς προκύπτει με αντικατάσταση των παραπάνω τιμών του α και β στην εξίσωση:*

$$P_t = \left(P_0 - \frac{a}{1-\beta}\right)\beta^t + c$$

όπου $c = \dfrac{a}{1-\beta}$.

Έτσι,

$$P_t = \left(P_0 - \frac{d-a}{b-e}\right)(1 - kb + ke)^t + \frac{d-a}{b-e}.$$

Όπως είναι γνωστό, η δυναμική τροχιά των τιμών εξαρτάται από τον όρο $\beta = (1 - kb + ke) = 1 - k(b-e)$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι στις παραπάνω εξισώσεις

$a = -20$, $b = 0{,}2$, οπότε $Q_{st} = -20 + 0{,}2P_t$,

$d = 100$, $e = -0{,}3$, οπότε $Q_{dt} = 100 - 0{,}3P_t$ και

$k = 0{,}3$, οπότε $P_{t+1} = P_t - 0{,}3(Q_{st} - Q_{dt})$.

Κατά συνέπεια, η σχετική εξίσωση διαφοράς είναι

$$P_t = 36 + 0{,}85P_{t-1}$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$P_t = (P_0 - 240)0{,}88^t + 240.$$

Δεδομένου ότι $\beta = 0{,}88$ η τιμή P_t συγκλίνει μονοτονικά στο σημείο ισορροπίας, το 240.

11.5.4 Κατανάλωση των νοικοκυριών ως συνάρτηση του εισοδήματός τους

Είναι γνωστό από τα μακροοικονομικά ότι η κατανάλωση των νοικοκυριών (C_t) είναι συνάρτηση του εισοδήματός τους (Y_t). Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι η κατανάλωση για οποιοδήποτε έτος είναι συνάρτηση των εισοδημάτων του προηγούμενου έτους, σύμφωνα με το υπόδειγμα:

$$C_t = C_0 + cY_{t-1},$$

όπου C_0 αποτελεί την «αυτόνομη κατανάλωση» και c η οριακή ροπή κατανάλωσης, δηλαδή το σταθερό ποσοστό του εισοδήματος που καταναλώνεται από τα νοικοκυριά. Επίσης, τα εισοδήματα του έτους ισούται με την κατανάλωση και τις επενδύσεις I_t (ή αποταμιεύσεις) που έχουν γίνει από τα νοικοκυριά και επομένως ισχύει

$$Y_t = C_t + I_t, \text{ όπου } I_t = I_0.$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει

$$Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια εξίσωση διαφοράς πρώτης τάξης της μορφής

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1}, \text{ όπου } \alpha = (C_0 + I_0) \text{ και } \beta = c.$$

Με αντικατάσταση στο γενικό τύπο της λύσης της εξίσωσης διαφοράς (και με την υπόθεση ότι για $t = 0$, $Y_t = Y_0$) προκύπτει η ακόλουθη γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς:

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{C_0 + I_0}{1-c}\right)c^t + \frac{C_0 + I_0}{1-c}.$$

Ανάλυση ευστάθειας:

Το μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος ισούται με

$$Y_t = \frac{C_0 + I_0}{1-c}$$

Όσον αφορά στην ευστάθεια της λύσης, έχουμε δει ότι, εξαρτάται από τη σταθερά c. Δηλαδή, εξαρτάται από το ύψος της ροπής κατανάλωσης. Είναι γνωστό από τα οικονομικά ότι η ροπή κατανάλωσης λαμβάνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Για τις τιμές αυτές η ισορροπία είναι ευσταθής, καθώς το εισόδημα συγκλίνει μονοτονικά στο επίπεδο ισορροπίας.

Δεν αποτελεί σκοπό του βιβλίου η αναλυτική παρουσίαση των εξισώσεων διαφορών ανώτερης τάξης, όμως το επόμενο μέρος του κεφαλαίου παρέχει μια «γεύση» των εξισώσεων αυτών.

11.6 Εισαγωγή στις εξισώσεις διαφοράς δεύτερης τάξης

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει γραμμικές εξισώσεις διαφοράς 1ης τάξης. Στο μέρος αυτό του κεφαλαίου θα κάνουμε μια εισαγωγή στις εξισώσεις διαφοράς δεύτερης τάξης. Δηλαδή, στις εξισώσεις της μορφής:

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} = \alpha_0 \quad \text{ή}$$

$$Y_t = \alpha_0 - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} \tag{6}$$

Η ομογενής μορφή της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} = 0 \quad \text{ή}$$

$$Y_t = -\alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} \tag{7}$$

Η ***γενική λύση*** της μη-ομογενούς εξίσωσης διαφοράς αποτελείται από το άθροισμα της συμπληρωματικής συνάρτησης (Y_c) και της ορισμένης συνάρτησης (Y_p). Έτσι,

$$Y(t) = Y_c + Y_p$$

Η ***ορισμένη λύση***, η οποία προσδιορίζει τη διαχρονική ισορροπία, είναι:

$$Y_p = \frac{\alpha_0}{1+\alpha_1+\alpha_2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \neq -1 \tag{8}$$

Δηλαδή, πρόκειται για ένα σταθερό σημείο ισορροπίας.

$$Y_p = \frac{\alpha_0}{2+\alpha_1} t, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \ \text{ και } \ \alpha_1 \neq -2 \tag{9}$$

Δηλαδή, πρόκειται για μια χρονικά μεταβαλλόμενη ισορροπία.

$$Y_p = \frac{\alpha_0}{2} t^2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \ \text{ και } \ \alpha_1 = -2 \tag{10}$$

Δηλαδή, πρόκειται για μια μη γραμμική (τετραγωνική) χρονικά μεταβαλλόμενη ισορροπία.

Η ***συμπληρωματική συνάρτηση***, η οποία καθορίζει τη διαχρονική πορεία της μεταβλητής Y, ορίζεται ως:

$$Y_c = A_1 r_1^{\,t} + A_2 r_2^{\,t} \tag{11}$$

Όπου A_1, A_2 αποτελούν σταθερές και $r_1^{\,t}$, $r_2^{\,t}$ είναι οι ***χαρακτηριστικές ρίζες της (χαρακτηριστικής) εξίσωσης***

$$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0 \tag{12}$$

Οι ρίζες αυτές προσδιορίζονται από τον τύπο

$$r_1, r_2 = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^{\,2} - 4\alpha_2}}{2}, \quad \text{όπου } \alpha_1^{\,2} - 4\alpha_2 \neq 0 \tag{13}$$

Παράδειγμα:

Έστω η ακόλουθη εξίσωση διαφοράς δεύτερης τάξης.

$$Y_t = 42 - 7Y_{t-1} - 6Y_{t-2}$$

α) Να βρεθεί η ειδική λύση
β) Ποιά η συμπληρωματική συνάρτηση;
γ) Ποιά η γενική λύση;
δ) Έστω οι αρχικές συνθήκες $Y(0) = 16$, $Y(1) = -35$. Ποιά η ορισμένη λύση της εξίσωσης;

Απάντηση:

α) *Συγκρίνοντας με το γενικό τύπο της μη-ομογενούς εξίσωσης διαφοράς δεύτερης τάξης $Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} = a_0$, προκύπτει ότι $a_0 = 42$, $a_1 = 7$, $a_2 = 6$. Επομένως, με αντικατάσταση στην εξίσωση (8) προκύπτει το ακόλουθο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας:*

$$Y_p = \frac{42}{1+7+6} = 3$$

β) *Η συμπληρωματική συνάρτηση προκύπτει βρίσκοντας πρώτα τις χαρακτηριστικές ρίζες, με αντικατάσταση στην εξίσωση (13), ως εξής:*

$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4x6}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} = -1 \ \text{και} \ -6$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση στην (11) προκύπτει η ακόλουθη συμπληρωματική συνάρτηση:

$$Y_c = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t$$

γ) Η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς είναι:

$$Y(t) = Y_c + Y_p = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t + 3$$

δ) Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $Y(0) = 16$ και $Y(1) = -35$ στη γενική λύση λαμβάνουμε:

$$Y(0) = 16 : A_1(-1)^0 + A_2(-6)^0 + 3 = 16 \Rightarrow A_1 + A_2 = 13$$

$$Y(1) = -35: \ A_1(-1)^1 + A_2(-6)^1 + 3 = -35 \Rightarrow -A_1 - 6A_2 = -38$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει: $A_1 = 8$ και $A_2 = 5$.

Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στη γενική λύση προκύπτει η ορισμένη λύση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y(t) = 8(-1)^t + 5(-6)^t + 3$$

Πιο πάνω βρήκαμε τις χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης να είναι -1 και -6. Όσον αφορά στην ευστάθεια της λύσης, εφόσον η χαρακτηριστική ρίζα με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη από το 1, η διαχρονική πορεία της Y είναι ασταθής.

Ύλη

έξω το

11.5.2

11.5.3

και

11.6

12 Αριθμοδείκτες (Index numbers)

12.1 Εισαγωγή

Ένας αριθμοδείκτης μετρά τη διαχρονική μεταβολή κάποιων αριθμών (τιμές ή ποσότητες). Η χρησιμότητα τους έγκειται στη δυνατότητα που παρέχουν της συνοπτικής παρουσίασης ενός μεγάλου πλήθους δεδομένων, τα οποία περιγράφουν κάποιο οικονομικό γεγονός σ' ένα μόνο αριθμό, που με κάποιο τρόπο περικλείει τα βασικά χαρακτηριστικά του γεγονότος αυτού.

Παράδειγμα:

Ο δείκτης του τιμάριθμου, ο δείκτης τιμών μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ), ο δείκτης βιομηχανικής παραγωγής, κ.λπ.

Ένας ***αριθμοδείκτης (index)*** είναι μια κλιμάκωση αριθμών που ξεκινά από κάποιο ***έτος βάσης (base year)***, όπου παίρνει την τιμή 100. Όλες οι διαδοχικές τιμές του αριθμοδείκτη μετρούν μεταβολές σε σχέση με το έτος βάσης.

Παράδειγμα:

Ο δείκτης τιμών 100, 115, 120, 130 δείχνει αύξηση των τιμών κατά 15% το 1ο έτος σε σύγκριση με το έτος βάσης, αύξηση κατά 20% το 2ο έτος σε σύγκριση με το έτος βάσης, κ.λπ.

Οι διαφορές στον δείκτη μεταξύ του 2ου και 3ου ή 3ου και 4ου έτους, είναι γνωστές και ως ***μεταβολές ποσοστιαίων μονάδων (percentage point changes) στο δείκτη***. Αυτό διαφέρει από την ***ποσοστιαία μεταβολή (percentage change)***, που για το 2ο έτος συγκρινόμενο με το 1ο έτος (και όχι το έτος βάσης 0) είναι $\frac{120 - 115}{115} \times 100 = 4,3\%$, έναντι μεταβολής $120 - 115 = 5$ ποσοστιαίων μονάδων στο δείκτη.

Είναι εύκολο να ***μετατρέψουμε το έτος βάσης (change the base year)***, κλιμακώνοντας το δείκτη προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Παράδειγμα:

100	διαιρούμε με 115 και πολλαπλασιάζουμε με 100 για να μετακινήσουμε τη βάση στο έτος 1	87
115		100
120		104
130		113

Η επιλογή τους έτους βάσης είναι σημαντική οικονομικά, όμως μαθηματικά δεν έχει σημασία.

Παράδειγμα:

Οταν μετράμε το Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (Retail Price Index):

- Θα επιθυμούσαμε ο δείκτης να βρίσκεται κοντά στο 100.
- Επειδή περιλαμβάνονται ετερογενή είδη στο δείκτη, η σημασία των οποίων μεταβάλλεται διαχρονικά (καθώς οι προτιμήσεις των καταναλωτών αλλάζουν), το ειδικό βάρος τους στην κατασκευή του δείκτη μεταβάλλεται.

Οι αριθμοδείκτες είναι κυρίως γνωστοί για τη χρήση τους στη μέτρηση διαχρονικών μεταβολών στις τιμές. Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε σ' αυτού του είδους τους αριθμοδείκτες για την εξήγηση των βασικών εννοιών. Οι έννοιες αυτές επεκτείνονται εύκολα σε άλλου τύπου αριθμοδείκτες, όπως για παράδειγμα σε δείκτες οι οποίοι περιγράφουν μεταβολές σε ποσότητες.

Σημειογραφία:

Έστω ο δείκτης «n» δηλώνει την τρέχουσα περίοδο και ο «0» δηλώνει την περίοδο βάσης (το σημείο αναφοράς).

Συνεπώς P_n, Q_n είναι οι τιμές και ποσότητες του τρέχοντος έτους αντίστοιχα, ενώ P_0, Q_0 είναι η τιμές και ποσότητες του έτους βάσης.

12.2 Αστάθμητοι δείκτες (Unweighted indices)

12.2.1 Απλός τιμάριθμος (ένα αγαθό) – Simple price index

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια οικονομία τριών αγαθών στην οποία ανταλάσσονται αυγά, πατάτες και ντομάτες. Οι τιμές των αγαθών αυτών και οι ποσότητες που ανταλάσσονται για μια περίοδο τριών ετών, περιγράφεται από τα δεδομένα του Πίνακα 12.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.1: *Οικονομία τριών αγαθών για τρία έτη*

Έτος	**0**		**1**		**2**	
	Τιμή	**Ποσότητα**	**Τιμή**	**Ποσότητα**	**Τιμή**	**Ποσότητα**
Αυγά	10	17	14	14	18	12
Πατάτες	17	5	19	5	20	6
Ντομάτες	24	3	25	5	26	7

Ο ***απλός τιμάριθμος (Simple price index, SPI)*** χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε τις μεταβολές στην τιμή (να υπολογίσουμε το δείκτη) για ένα μόνο αγαθό. Ορίζεται ως ακολούθως,

$$SPI = \frac{P_n}{P_0} \times 100$$

Όπου: P_0 = τιμή έτους βάσης, P_n = τιμή τρέχοντος έτους

Παράδειγμα:

Ο ***απλός τιμάριθμος για αυγά*** υπολογίζεται ως:

$$\frac{P_n}{P_0} \times 100$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 12.1 κατασκευάζουμε τον απλό τιμάριθμο για αυγά, ο οποίος παρουσιάζεται στον Πίνακα 12.2. Παρατηρούμε ότι οι τιμές των αυγών έχουν αυξηθεί μεταξύ του έτους βάσης και του πρώτου έτους κατά 40%, ενώ η αύξηση μεταξύ του έτους βάσης και του δεύτερου έτους ανέρχεται σε 80%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.2: *Απλός τιμάριθμος για αυγά*

Έτος	Τιμή	P_n/P_0	Απλός Τιμάριθμος $= \frac{P_n}{P_0} \times 100$
0	$10 = P_0$	$1 = \frac{P_0}{P_0}$	100
1	$14 = P_1$	$1{,}4 = \frac{P_1}{P_0}$	140
2	$18 = P_2$	$1{,}8 = \frac{P_2}{P_0}$	180

12.2.2 Απλός γενικός (συνολικός) τιμάριθμος (περισσότερα από ένα αγαθά) – (Simple aggregate price index)

Στην πραγματικότητα καταναλώνουμε περισσότερα από ένα αγαθά. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθούν ***απλοί γενικοί δείκτες τιμών (Simple aggregate price index, SAPI)*** για να συνοψίσουν τη διαχρονική μεταβολή των τιμών στην οικονομία.

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζονται m αγαθά. P_{01} συμβολίζει την τιμή του αγαθού 1 στην περίοδο βάσης, 0, ενώ P_{n1} είναι η τιμή του ίδιου αγαθού στην περίοδο n. P_{02} είναι η τιμή του αγαθού 2 στην περίοδο βάσης, ενώ P_{n2} είναι η τιμή του στην πρώτη περίοδο n, και ου το καθεξής για όλα τα αγαθά. Έτσι, ο ***απλός γενικός δείκτης τιμών (SAPI)*** ορίζεται ως:

$$SAPI = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{0i}} \times 100, \qquad i = 1, \ldots, m \text{ αγαθά}$$

Το πρόβλημα με αυτόν το δείκτη είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη του ούτε τις μονάδες μέτρησης (units of measurement) των τιμών, ούτε και τα καταναλωτικά πρότυπα (consumption patterns). Για παράδειγμα, αν ένα προϊόν μετριέται σε λεπτά και ένα άλλο σε ευρώ, ο δείκτης θα

διέφερε απ' ότι αν και τα δυο μετρούνταν σε ευρώ. Σε σχέση με το πρόβλημα των καταναλωτικών προτύπων οι σταθμικοί δείκτες τιμών, οι οποίοι ορίζονται αργότερα στο κεφάλαιο αυτό, μπορούν να διορθώσουν πρόβλημα.

12.2.3 Δείκτης μέσης σχετικής τιμής (Average price relatives index)

Για τη διόρθωση του προβλήματος των μονάδων μέτρησης, που έχει ο απλός γενικός δείκτης τιμών, ορίζεται ο ***δείκτης μέσης σχετικής τιμής (Average price relatives index, APRI)***, ο οποίος λαμβάνει υπ' όψιν του το πρόβλημα των μονάδων μέτρησης:

$$APRI = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{ni}}{P_{0i}} \times 100$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της οικονομίας των τριών αγαθών του Πίνακα 12.1, κατασκευάζονται στους Πίνακες 12.3 και 12.4 ο απλός γενικός δείκτης τιμών (SAPI) και ο δείκτης μέσης σχετικής τιμής (APRI). Και οι δύο δείκτες αφορούν την αύξηση των τιμών στην οικονομία. Ο πρώτος δείκτης, υποφέρει από τα προβλήματα των μονάδων μέτρησης που αναφέρθηκαν προηγουμένως, τα οποία λύνονται με τη χρήση του τελευταίου δείκτη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.3: ***Κατασκευή του απλού γενικού δείκτη τιμών και του δείκτη μέσης σχετικής τιμής***

	P_0	P_1	P_2	P_1/P_0	P_2/P_0
Αυγά	10	14	18	1,400	1,800
Πατάτες	17	19	20	1,118	1,176
Ντομάτες	24	25	26	1,042	1,083
	$\sum P_0 = 51$	$\sum P_1 = 58$	$\sum P_2 = 64$	$\sum \frac{P_1}{P_0} = 3{,}56$	$\sum \frac{P_2}{P_0} = 4{,}06$

Οι δύο τελευταίοι τύποι, που παρουσιάστηκαν παραπάνω, χρησιμοποιούνται στην κατασκευή των αριθμοδεικτών που φαίνονται στον Πίνακα 12.4. Συγκρίνοντας τις τιμές τους βλέπουμε ότι σύμφωνα με

τον SAPI οι τιμές των αγαθών στην οικονομία αυξάνονται κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους κατά 13,7%, ενώ σύμφωνα με τον APRI οι τιμές στην οικονομία αυξάνονται κατά 18,7%. Επομένως, οι δύο δείκτες δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα, ως προς την αύξηση των τιμών στην οικονομία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.4: ***Απλός γενικός δείκτης τιμών και δείκτης μέσης σχετικής τιμής***

Έτος	SAPI	APRI
0	100	100
1	$113{,}7 = \frac{58}{51} \times 100$	$118{,}7 = \frac{3{,}56}{3} \times 100$
2	$125{,}5 = \frac{64}{51} \times 100$	$135{,}3 = \frac{4{,}06}{3} \times 100$

12.3 Σταθμικοί δείκτες (Weighted indices)

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ο απλός γενικός δείκτης τιμών (SAPI) και ο δείκτης μέσης σχετικής τιμής (APRI) (γενικά, οι αστάθμητοι δείκτες τιμών) δεν λαμβάνουν υπόψη τους τις προτιμήσεις των καταναλωτών (τα καταναλωτικά πρότυπα), όπως εκφράζονται αυτές από τις ποσότητες των αγαθών που ανταλλάσσονται στην οικονομία. Συγκεκριμένα, το ζητούμενο είναι ένας αριθμοδείκτης ο οποίος να είναι ικανός να μετρήσει το τι ξοδεύεται κάθε χρόνο. Ένας τέτοιος δείκτης θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν τις μεταβολές και στις τιμές και στις ποσότητες. Ωστόσο, για την κατασκευή ενός δείκτη μεταβολών των τιμών, πρέπει οι ποσότητες να μένουν σταθερές. Οι ποσότητες χρησιμεύουν ως σταθμά σε έναν τέτοιο δείκτη τιμών. Ο συνυπολογισμός των ποσοτήτων ως σταθμά στο δείκτη λαμβάνει υπ' όψιν το πρόβλημα των καταναλωτικών προτύπων, κάτι που δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στους αστάθμητους δείκτες τιμών. Γι' αυτό το σκοπό ορίζεται παρακάτω μια σειρά από σταθμικούς δείκτες τιμών.

12.3.1 Δείκτης τιμών του Laspeyres

Ο δείκτης τιμών Laspeyres χρησιμοποιεί τα αγαθά που καταναλώνονται την περίοδο βάσης ως σταθμά. Μαθηματικά, ορίζεται ως:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni} Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{m} P_{0i} Q_{0i}} \times 100$$

Ο δείκτης αυτός χρησιμοποιεί τις ποσότητες που καταναλώνονται στο έτος βάσης, για να προσδιορίσει το τυπικό «καλάθι» που αγοράζεται. Υποθέτει ότι για οποιεσδήποτε μεταβολές των τιμών, οι ποσότητες που αγοράζονται θα είναι ίδιες. Οικονομικά, αυτό υπονοεί ότι δεν λαμβάνει χώρα υποκατάσταση όταν μεταβάλλονται οι σχετικές τιμές των αγαθών. Ως συνέπεια, αποτυγχάνει να λάβει υπ' όψιν του τις αλλαγές στις προτιμήσεις των καταναλωτών, όπως αλλάζουν οι οικονομικές καταστάσεις. Υποθέτει ότι, ακόμα και αν τα αγαθά έχουν γίνει σχετικά πιο ακριβά, θα αγοραστούν οι ίδιες ποσότητες. Ο τιμάριθμος συνεπώς υπερεκτιμάται με τη χρήση του σταθμικού δείκτη τιμών Laspeyres.

Για να δούμε πως κατασκευάζεται ο δείκτης, ας επανέλθουμε στην οικονομία των τριών αγαθών, τα στοιχεία της οποίας μελετήσαμε μέχρι τώρα. Τα σχετικά δεδομένα για την κατασκευή του δείκτη εμφανίζονται στον Πίνακα 12.5

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.5: ***Κατασκευή του δείκτη τιμών Laspeyres σε οικονομία 3 αγαθών***

	P_0	Q_0	P_1	P_2	P_0Q_0	P_1Q_0	P_2Q_0
Αυγά	10	17	14	18	170	238	306
Πατάτες	17	5	19	20	85	95	100
Ντομάτες	24	3	25	26	72	75	78
					$\sum P_0Q_0 = 327$	$\sum P_1Q_0 = 408$	$\sum P_2Q_0 = 484$

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.6: ***Ο δείκτης τιμών Laspeyres***

Έτος	L
0	$L_0 = (\Sigma P_0Q_0/\Sigma P_0Q_0) \times 100 = 100$
1	$L_1 = (\Sigma P_1Q_0/\Sigma P_0Q_0) \times 100 = (408/327) \times 100 = 124{,}8$
2	$L_2 = (\Sigma P_2Q_0/\Sigma P_0Q_0) \times 100 = (484/327) \times 100 = 148$

Στον Πίνακα 12.6 βλέπουμε τον δείκτη τιμών Laspeyres για την οικονομία των τριών αγαθών. Έτσι, για παράδειγμα βλέπουμε ότι οι τιμές στην οικονομία μεταξύ του έτους βάσης και του πρώτου έτους έχουν αυξηθεί κατά μέσο όρο κατά 24,8%. Στον υπολογισμό της αύξησης των τιμών έχουν ληφθεί ως σταθμά οι ποσότητες που καταναλώθηκαν κατά το έτος βάσης – όπως φαίνονται αυτά στον Πίνακα 12.5. Βλέπουμε ότι η ποσότητα των 17 κιλών αυγών που καταναλώθηκε, είναι πολύ υψηλότερη από αυτήν των πατατών η οποία είναι 5 κιλά. Κατά συνέπεια, ίσες μεταβολές στις τιμές για αυγά και για πατάτες δεν συνεισφέρουν ισόποσα στη μεταβολή του γενικού δείκτη Laspeyres, καθώς το ειδικό βάρος για αυγά που χρησιμοποιείται στην κατασκευή του δείκτη είναι υψηλότερο σε σχέση με αυτό που χρησιμοποιείται για την στάθμιση των πατατών. Προφανώς, ένας τέτοιος σταθμικός δείκτης είναι περισσότερο αντιπροσωπευτικός από τους αστάθμητους δείκτες που ορίσαμε σε προηγούμενα μέρη του κεφαλαίου, αφού λαμβάνει υπ' όψιν του τη σχετική ποσότητα των αγαθών που καταναλώνεται.

Άλλο ένα παράδειγμα κατασκευής του δείκτη τιμών του Laspeyres

Μια επιχείρηση απασχολεί προσωπικό τεσσάρων βαθμίδων. Τα δεδομένα αμοιβών και αριθμού απασχολούμενου προσωπικού, ανά βαθμίδα, για 3 χρόνια, απεικονίζονται στον Πίνακα 12.7. Προκειμένου να υπολογιστεί η διαχρονική εξέλιξη του κόστους εργασίας της επιχείρησης, κατασκευάζεται ο δείκτης κόστους εργασίας του Laspeyres. Το έτος 2001 επιλέγεται ως βάση, επειδή θεωρείται ως ένα «κανονικό» έτος, υπό την έννοια ότι οι αριθμοί των εργαζόμενων (οι οποίοι χρησιμοποιούνται ως σταθμά) είναι αντιπροσωπευτικοί των αναγκών της επιχείρησης σε εργατικό δυναμικό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.7: ***Αμοιβές και αριθμός εργαζομένων ανά βαθμίδα για επιχείρηση***

Βαθμίδα	2000		2001		2002	
	Αμοιβή/ ώρα (€)	Αρ. εργαζομένων	Αμοιβή/ ώρα (€)	Αρ. εργαζομένων	Αμοιβή/ ώρα (€)	Αρ. εργαζομένων
1	5,50	30	5,85	34	6,27	37
2	5,25	16	5,60	14	5,95	11
3	4,94	15	5,25	14	5,60	13
4	4,30	45	4,57	44	4,85	46

Δείκτης τιμών του Laspeyres:

$$L = \frac{\sum_i P_{ni} W_{0i}}{\sum_i P_{0i} W_{0i}} \times 100$$

όπου W_{0i}, τα σταθμά, είναι ο αριθμός των εργαζομένων για κάθε βαθμίδα, i = 1, 2, 3, 4, το 2001. Έτσι, αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε:

$$L_{2000} = \frac{(5{,}5 \times 34) + (5{,}25 \times 14) + (4{,}94 \times 14) + (4{,}3 \times 44)}{(5{,}85 \times 34) + (5{,}60 \times 14) + (5{,}25 \times 14)(4{,}57 \times 44)} \times 100$$

$$= \frac{518{,}86}{551{,}88} \times 100 = 94{,}017$$

$$L_{2001} = 100$$

$$L_{2002} = \frac{(6{,}27 \times 34) + (5{,}95 \times 14) + (5{,}60 \times 14) + (4{,}85 \times 44)}{(5{,}85 \times 34) + (5{,}60 \times 14) + (5{,}25 \times 14)(4{,}57 \times 44)} \times 100$$

$$= \frac{588{,}28}{551{,}88} \times 100 = 106{,}596$$

Συνεπώς, ο δείκτης του Laspeyres, ο οποίος υποδεικνύει τη μέση αύξηση του κόστους εργατικών της επιχείρησης για την περίοδο 2000-2002 είναι: 94,02, 100, 106,60

12.3.2 Δείκτης τιμών του Paasche

Ένας εναλλακτικός σταθμικός δείκτης τιμών είναι αυτός του Paasche. Χρησιμοποιεί για στάθμιση τις ποσότητες του τρέχοντος έτους, αντί γι' αυτές του έτους βάσης που χρησιμοποιεί ο δείκτης Laspeyres. Συγκρίνει πόσο κοστίζει ένα καλάθι αγαθών τώρα με το κόστος του ίδιου καλαθιού αγαθών κατά το έτος βάσης. Μαθηματικά, ο δείκτης ορίζεται ως ακολούθως:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{0i}Q_{ni}} \times 100$$

Σημειώσεις:

- Ο ***P*** δεν είναι αυστηρά ένας δείκτης τιμών, αφού το καλάθι των αγαθών μπορεί να αλλάζει κάθε χρόνο.
- Το αποτέλεσμα της διαχρονικής υποκατάστασης των αγαθών καθώς εξελίσονται οι τιμές τους σημαίνει ότι αποδίδεται μεγαλύτερη σημασία στα αγαθά που είναι φθηνότερα τώρα απ' ότι ήταν στο έτος βάσης. Αυτό συμβαίνει επειδή οι ποσότητες που αγοράζονται σε φθηνότερα αγαθά αυξάνουν με τη μείωση των τιμών τους, και αντιστρόφως για τα αγαθά των οποίων η τιμή αυξάνεται. Συνεπώς ο ***P*** υποεκτιμά τον πληθωρισμό. Αυτό το αποτέλεσμα είναι το αντίστροφο αυτού που συμβαίνει με το δείκτη Laspeyres, ο οποίος υπερεκτιμά τον πληθωρισμό.
- Ο ***P*** απεικονίζει μεταβολές και στις τιμές και στο καλάθι των αγαθών και με αυτή την έννοια καθιστά τις συγκρίσεις τιμών μεταξύ των ετών δύσκολη.
- Για την κατασκευή του δείκτη ***P*** απαιτούνται πληροφορίες για τις τρέχουσες ποσότητες κάθε περιόδου (πέραν από τις τιμές κάθε περιόδου), και αυτό μπορεί να είναι δύσκολο ή «ακριβό» για να αποκτηθεί. Σημειωτέον ότι για την κατασκευή του δείκτη Laspeyres απαιτούνται μόνο οι ποσότητες του έτους βάσης.

Ο Πίνακας 12.8 παραθέτει όλα τα δεδομένα που απαιτούνται για την κατασκευή του δείκτη Paasche, για το παράδειγμα της οικονομίας των τριών αγαθών που επεξεργαζόμαστε στο κεφάλαιο. Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα που απαιτούνται για την κατασκευή του δείκτη Paasche

είναι πολύ περισσότερα σε σύγκριση με αυτά που απαιτούνται για την κατασκευή του δείκτη Laspeyres, όπως φαίνονται στον Πίνακα 12.5.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.8: *Κατασκευή του δείκτη τιμών Paasche*

	P_0	P_1	Q_1	P_2	Q_2	P_1Q_1	P_0Q_1	P_2Q_2	P_0Q_2
Αυγά	10	14	14	18	12	196	140	216	120
Πατάτες	17	19	5	20	6	95	85	120	102
Ντομάτες	24	25	5	26	7	125	120	182	168
						$\sum P_1Q_1 = 416$	$\sum P_0Q_1 = 345$	$\sum P_2Q_2 = 518$	$\sum P_0Q_2 = 390$

Τα δεδομένα του Πίνακα 12.8 αντικαθίστανται στον τύπο του δείκτη Paasche για την κατασκευή του δείκτη που βλέπουμε στον Πίνακα 12.9. Ο δείκτης υποδεικνύει ότι οι τιμές στην υποθετική οικονομία που εξετάζεται, έχουν αυξηθεί κατά 20,6% και 32,8% το έτος 1 και 2, αντίστοιχα, σε σύγκριση με το έτος 0. Συγκρίνοντας με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του τιμάριθμου της οικονομίας, όπως αυτές μετρώνται από το δείκτη Laspeyres, βλέπουμε ότι η αύξηση των τιμών που υποδεικνύει ο Paasche είναι χαμηλότερη από αυτές που υποδεικνύει ο Laspeyres. Το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ότι ο δείκτης Paasche υποεκτιμά τον τιμάριθμο, ενώ ο δείκτης Laspeyres τον υπερεκτιμά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.9: *Ο δείκτης τιμών Paasche*

Έτος	P
0	$P_0 = 100$
1	$P_1 = (\Sigma P_1Q_1/\Sigma P_0Q_1) \times 100 = (416/345)100 = 120{,}6$
2	$P_2 = (\Sigma P_2Q_2/\Sigma P_0Q_2) \times 100 = (518/390)100 = 132{,}8$

12.3.3 Δείκτης τιμών Fisher ή Ιδανικός δείκτης (Perfect price index)

Εάν ο δείκτης Paasche υποεκτιμά τον πληθωρισμό, ενώ ο δείκτης Laspeyres τον υπερεκτιμά, ένας μέσος όρος των δύο λογικά θα είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα απ' ότι ο κάθε δείκτης ξεχωριστά. Ο ***δείκτης τιμών Fisher ή Ιδανικός Δείκτης (Perfect price index)*** ορίζεται ως ο γεωμετρικός μέσος όρος των δεικτών του Laspeyres και του Paasche. Δηλαδή,

$$F = \sqrt{L \times P}$$

Έχοντας κατασκευάσει τους δείκτες Laspeyres και Paasche είναι εύκολη η κατασκευή του ιδανικού δείκτη, όπως αυτός φαίνεται στον Πίνακα 12.10. Όπως αναμένεται οι τιμές του δείκτη για κάθε έτος, εξ' ορισμού, είναι στο ενδιάμεσο των δύο τιμών που έχουν εκτιμηθεί από τους δείκτες Laspeyres και Paasche σε προηγούμενους πίνακες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.10: *Ο δείκτης τιμών Fisher*

Ετος	L
0	$F_0 = \sqrt{100 \times 100} = 100$
1	$F_1 = \sqrt{124{,}8 \times 120{,}56} = 122{,}67$
2	$F_1 = \sqrt{148 \times 132{,}8} = 140{,}2$

12.3.4 Δείκτης τιμών σταθμισμένος σύμφωνα με το έτος βάσης (Base weighted price index)

Όταν περιλαμβάνονται ετερογενή είδη στο δείκτη τιμών, η χρήση ποσοτήτων ως σταθμά στην κατασκευή του δείκτη μπορεί να μην έχει έννοια. Για παράδειγμα, οι ποσότητες για γεύματα και παπούτσια δεν είναι συγκρίσιμες. Δεν αποτελούν ομοειδή δεδομένα. Όμως οι δαπάνες γι' αυτά τα είδη είναι. Επομένως, οι σταθμικοί δείκτες που εξετάσαμε μέχρι τώρα, μπορεί να γενικευθούν ορίζοντας τις δαπάνες στα είδη που

περιλαμβάνονται στο δείκτη ως σταθμά, έναντι των ποσοτήτων των ειδών (αγαθών), που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα.

Έστω ότι το w αντιπροσωπεύει τα σταθμά. Δηλαδή, το w αντιπροσωπεύει το μέγεθος της δαπάνης που αντιστοιχεί σε κάθε είδος αγαθού στο έτος βάσης $w = P_0Q_0$. Ένας ***σταθμικός δείκτης τιμών βάσης (Base weighted price index)*** ορίζεται ως ακολούθως:

$$BWPI = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i \frac{P_{ni}}{P_{0i}}}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \times 100$$

Αυτή είναι γνωστή και ως ***μέθοδος των σχετικών τιμών (price relatives)*** για τον υπολογισμό του δείκτη, σε αντίθεση με την «***αθροιστική***» ***(aggregative) μέθοδο*** που εξετάσαμε μέχρι τώρα.

Παρατηρήσεις:

1. Η παραπάνω μέθοδος είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με το δείκτη του Laspeyres. Αυτό μπορεί να δειχτεί εύκολα θέτοντας στον παραπάνω τύπο $w = P_0Q_0$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\sum P_0Q_0 \frac{P_n}{P_0}}{\sum P_0Q_0} = \frac{\sum P_nQ_0}{\sum P_0Q_0}$$

2. Τα σταθμά χρησιμοποιούνται για να παραστήσουν τη σχετική τάξη του μεγέθους των δαπανών σε κάθε είδος. Διαφορετικά πρότυπα στάθμισης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή δεικτών. Ορισμένες φορές οι ημερομηνίες δεν είναι διαθέσιμες ή ο υπολογισμός των σταθμών κοστίζει πολύ. Τα σταθμά από μια έρευνα ή ο μέσος όρος των δαπανών σε αγαθά επί μια ***σειρά*** ετών μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως συντελεστές στάθμισης.

Ο Πίνακας 12.11 παρουσιάζει τα δεδομένα που απαιτούνται για την κατασκευή του σταθμικού δείκτη τιμών για την οικονομία των τριών αγαθών, όπου ως σταθμά ορίζονται οι δαπάνες στα τρία αγαθά κατά το έτος βάσης, 0

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.11: ***Κατασκευή βασικού δείκτη τιμών, όπου σταθμά = δαπάνες***

	P_0	Q_0	$W = P_0Q_0$	P_1	P_1/P_0	P_2	P_2/P_0	$W \times (P_1/P_0)$	$W \times (P_2/P_0)$
Αυγά	10	17	170	14	1,40	18	1,80	238,0	306,0
Πατάτες	17	5	85	19	1,12	20	1,18	95,2	100,3
Ντομάτες	24	3	72	25	1,04	26	1,08	74,9	77,8
			$\Sigma W = 327$					$\Sigma W\frac{P_1}{P_0} = 408,1$	$\Sigma W\frac{P_2}{P_0} = 484,1$

Ο Πίνακας 12.12 χρησιμοποιεί τα δεδομένα του Πίνακα 12.11 στον τύπο που ορίσθηκε παραπάνω για την κατασκευή του δείκτη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.12: ***Ο βασικός δείκτης τιμών με σταθμά τις δαπάνες***

Ετος	P
0	100
1	$((\Sigma W(P_1/P_0))/\Sigma W) \times 100 = \frac{408,1}{327} 100 = 124,8$
2	$((\Sigma W(P_2/P_0))/\Sigma W) \times 100 = \frac{484,1}{327} 100 = 148$

12.3.5 Δείκτης τιμών με σταθερή στάθμιση (Fixed weighted price index)

Ο δείκτης αυτός χρησιμοποιεί ποσότητες που καταναλώθηκαν σ' ένα έτος βάσης, ένα έτος που υποτίθεται ότι δεν σημειώθηκαν ανωμαλίες, άλλως ένα «φυσιολογικό» έτος. Έτσι, αν Q_{wi} είναι η ποσότητα που καταναλώνεται από το i αγαθό στο χρόνο W, ο δείκτης ορίζεται ως:

$$FWPI = \frac{\sum_{i=1}^{m} Q_{wi}P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} Q_{wi}P_{0i}} \times 100$$

Το Q_{wi} αποτελεί το σταθερό ειδικό βάρος. Αυτό μπορεί να είναι η ποσότητα του αγαθού που χρησιμοποιείται σ' ένα δεδομένο «φυσιολογικό» έτος, ή να μπορεί να είναι ένας μέσος όρος των αγαθών που χρησιμοποιούνται για μια χρονική περίοδο 2-3 χρόνων, κ.λπ.

Ο δείκτης αυτός είναι ίδιος με το δείκτη τιμών του Laspeyres, αλλά οι ποσότητες εδώ είναι σταθερές σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο, το οποίο δύναται να είναι διαφορετικό από το έτος βάσης.

Παράδειγμα:

Ο δείκτης τιμών καταναλωτή (The retail price index, RPI)

Ο δείκτης τιμών καταναλωτή λαμβάνει υπ' όψιν τις μεταβολές στις τιμές των καταναλωτικών αγαθών. Κατασκευάζεται ως δείκτης τιμών Laspeyres χρησιμοποιώντας ως σταθμά ένα καλάθι καταναλωτικών αγαθών. Αυτά αποτελούν τα σταθμά του έτους βάσης. Ο δείκτης χρησιμοποιείται, για να δείξει τη μεταβολή στο κόστος ζωής μιας μέσης οικογένειας και αποκλείει κατόχους υψηλών εισοδημάτων και συνταξιούχους, αφού οι τάξεις αυτές έχουν διαφορετικά πρότυπα δαπανών.

Στη Βρετανία ο δείκτης αποτελείται από 350 διαφορετικά είδη κατηγοριοποιημένα σε 11 ευρείες κατηγορίες, αναθέτοντας σταθμά για την κάθε κατηγορία ανάλογα με τη σπουδαιότητά τους στο καλάθι του καταναλωτή. Το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης είναι 1000. Ο Πίνακας 12.13 παρουσιάζει τις 11 κατηγορίες που χρησιμοποιούνται και τα σταθμά. Το φαγητό υπολογίζεται στο 20,3% της δαπάνης, η στέγαση στο 13,7%, κ.λπ. Μεταβολές στις τιμές κάποιας κατηγορίας μεταβάλουν το δείκτη τιμών της οικονομίας. Το ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζει πως υπολογίζονται οι μεταβολές στο γενικό δείκτη τιμών, όταν μεταβάλλονται οι τιμές μιας κατηγορίας του δείκτη.

Παράδειγμα:

Μια 10% αύξηση στο κόστος του οινοπνεύματος θα αυξήσει το ειδικό βάρος του στο δείκτη σε 85,8, και το σύνολο των σταθμών σε 1007,8. Συνεπώς, η αύξηση στο δείκτη θα είναι:

$$\frac{1007,8 - 1000}{1000} \times 100 = 0,78\%$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.13: ***Ο Δείκτης τιμών καταναλωτή στη Βρετανία***

Ομάδες	Σταθμά
Φαγητό	203
Οινοπνευματώδη ποτά	78
Καπνός	39
Στέγαση	137
Καύσιμα και Φως (Ενέργεια)	69
Διαρκή καταναλωτικά αγαθά, π.χ. ψυγεία, τηλεοράσεις, πλυντήρια, κλπ	64
Ένδυση	74
Μεταφορές και Μεταφορικά μέσα	159
Διάφορα αγαθά	75
Υπηρεσίες	63
Γεύματα που καταναλώνονται εκτός οικίας	39
	1000

Ο ***αποπληθωριστής του Α.Ε.Π. (GDP Deflator)*** αποτελεί άλλο ένα δείκτη μεταβολής των τιμών στην οικονομία. Ο δείκτης αυτός καλύπτει ολόκληρο το καλάθι με αγαθά και υπηρεσίες της οικονομίας. Συνεπώς, παρακολουθεί τις μετακινήσεις των τιμών ολόκληρου του καλαθιού των αγαθών και υπηρεσιών στην οικονομία, σε αντίθεση με το δείκτη τιμών καταναλωτή, ο οποίος παρακολουθεί τα πρότυπα δαπανών μιας «τυπικής» οικογένειας.

12.4 Αλυσωτοί δείκτες τιμών (Chain price indices)

Οι δείκτες που εξετάστηκαν μέχρι τώρα μετρούν τις διαχρονικές μεταβολές στις τιμές αναφορικά μ' ένα συγκεκριμένο έτος βάσης. Ας υποθέσουμε ωστόσο ότι ενδιαφερόμαστε για τις μεταβολές στις τιμές χρόνο με το χρόνο. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ***αλυσωτούς δείκτες τιμών (Chain price indices)***. Σ' αυτούς τους δείκτες η βάση είναι η τιμή του τρέχοντος έτους, η οποία διαιρείται με την τιμή των προηγούμενων ετών. Μαθηματικά ο δείκτης ορίζεται ως:

$$I^{n}_{n-1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \times 100$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.14: ***Αλυσωτός δείκτης τιμών για αυγά***

Έτος	Τιμή	Αλυσωτός Δείκτης: $\frac{P_n}{P_{n-1}} \times 100$
0	10	100
1	14	$\frac{14}{10} \times 100 = 140$
2	18	$\frac{18}{14} \times 100 = 129$

Για παράδειγμα, ο **αλυσωτός δείκτης τιμών** για αυγά, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παραδείγματος που πραγματευόμαστε στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται στον Πίνακα 12.14. Βλέπουμε ότι η ποσοστιαία μεταβολή στις τιμές από το έτος 0 στο έτος 1 είναι 40%, ενώ η μεταβολή στις τιμές από το έτος 1 στο έτος 2 είναι 29%. Αυτή η ποσοστιαία μεταβολή από έτος σε έτος διαβάζεται απ' ευθείας στον πίνακα του αλυσωτού δείκτη.

Συνεπώς, οι αλυσωτοί αριθμοδείκτες μετρούν τις μεταβολές των τιμών από το ένα έτος στο επόμενο, σε αντίθεση με τη μέτρηση μεταβολών στις τιμές σε σχέση με ένα συγκεκριμένο έτος βάσης, όπως κάνουν οι απλοί δείκτες.

Για σύγκριση, στον Πίνακα 12.15 παραθέτουμε τον απλό αριθμοδείκτη, που ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου, και τον αλυσωτό αριθμοδείκτη που μόλις ορίσαμε.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.15: ***Απλός και Αλυσωτός δείκτης τιμών***

Ετος	Απλός Δείκτης Τιμών	Αλυσωτός Δείκτης Τιμών
0	100	100
1	$I_0^1 = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	$I_0^1 = \frac{P_1}{P_0} \times 100$
2	$I_0^2 = \frac{P_2}{P_0} \times 100$	$I_1^2 = \frac{P_2}{P_1} \times 100$

12.5 Ενοποίηση δεικτών (Splicing of indices)

Πολλές φορές υπάρχουν δυο ή περισσότεροι αριθμοδείκτες, οι οποίοι παρουσιάζουν την εξέλιξη των τιμών στην οικονομία, ας πούμε για την εξέλιξη των τιμών του καταναλωτή, οι οποίοι όμως έχουν διαφορετική βάση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ανάγκη, για ερευνητικούς σκοπούς, να δημιουργηθεί ένας ενιαίος αριθμοδείκτης, έτσι ώστε να υπάρχει μια πιο μακροχρόνια χρονοσειρά. Το ακόλουθο παράδειγμα εξηγεί πώς μπορεί να επιτευχθεί ενοποίηση δυο τέτοιων αριθμοδεικτών οι οποίοι έχουν διαφορετική βάση.

Ο Πίνακας 12.16 παρουσιάζει στη δεύτερη και τρίτη στήλη του δυο δείκτες τιμών για μια ομάδα αγαθών για τα έτη 1985 έως 1990, ο ένας με έτος βάσης το 1985, και ο άλλος με έτος βάσης το 1990, υπολογισμένος για μια αναθεωρημένη ομάδα αγαθών. Ας υποθέσουμε ότι ο ενοποιημένος αριθμοδείκτης θέλουμε να έχει έτος βάσης το 1990. Αυτός παρουσιάζεται στην τέταρτη στήλη του πίνακα. Για παράδειγμα, οι τιμές του 1988 και 1989 έχουν υπολογιστεί ως εξής:

$$\frac{110}{119{,}2} \times 100 = 92{,}3, \quad \text{και} \quad \frac{114{,}1}{119{,}2} \times 100 = 95{,}7, \text{ αντίστοιχα}$$

Δηλαδή, μετατρέπουμε τη βάση του παλιού δείκτη από το 1985 στο 1990, διαιρώντας όλες τις τιμές του δείκτη με την τιμή του 1990, δηλαδή το 119,2, και πολλαπλασιάζοντας με 100.

Ο ενοποιημένος δείκτης αποτελεί μια συνεχή σειρά και παρουσιάζει τη διαχρονική εξέλιξη των τιμών από το 1985 μέχρι το 1996, με

έτος βάσης το 1990. Έτσι, οι τιμές πριν το 1990 είναι συγκρίσιμες μ' αυτές μετά το 1990 και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ενοποιημένος αριθμοδείκτης για ερευνητικούς σκοπούς, καλύπτοντας την ενιαία περίοδο 1985-1996. Η χρονοσειρά αυτή έχει 12 παρατηρήσεις σε σύγκριση με μόνο 6 ή μόνο 7 που έχει ο κάθε ένας από τους άλλους δυο αριθμοδείκτες ξεχωριστά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.16: ***Δύο δείκτες τιμών με διαφορετική βάση και ο ενοποιημένος δείκτης τιμών***

Ετος	Παλιός Δείκτης Τιμών (1985 = 100)	Αναθεωρημένος Δείκτης Τιμών (1990 = 100)	Ενοποιημένος Δείκτης Τιμών (1990 = 100)
1985	100,0		83,9
1986	103,1		86,5
1987	106,9		89,7
1988	110,0		92,3
1989	114,1		95,7
1990	119,2	100,0	100,0
1991		105,2	105,2
1992		111,3	111,3
1993		117,5	117,5
1994		124,8	124,8
1995		129,9	129,9
1996		137,7	137,7

Τέλος σημειώνεται ότι, όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, οι διάφοροι αριθμοδείκτες που έχουν προταθεί είναι δείκτες τιμών. Όμως κατ' αναλογία μπορεί να οριστούν ***δείκτες όγκου (quantity indices)***. Στην περίπτωση αυτή, ο δείκτης όγκου δείχνει πως μεταβάλλονται διαχρονικά οι ποσότητες, αντί για τις τιμές. Τα σταθμά που χρησιμοποιούνται σ' αυτούς τους δείκτες είναι οι τιμές. Άλλοι αριθμοδεί-

κτες μπορεί επίσης να ορισθούν βασιζόμενοι στις αρχές του κεφαλαίου αυτού.

12.6 Εφαρμογή: Χρηματιστηριακοί Δείκτες Τιμών

Στον καθημερινό τύπο παρουσιάζεται η τιμή του δείκτη του Χρηματιστηρίου Αθηνών όπως και η διαχρονική εξέλιξή του, ως ένδειξη του πού βρίσκεται και πως έχει κινηθεί η χρηματιστηριακή αγορά για την υπό εξέταση περίοδο. Τέτοιοι αντιπροσωπευτικοί δείκτες του χρηματιστηρίου Αθηνών είναι ο Γενικός δείκτης, ο FTSE ASE 20, ο FTSE ASE 40, και ο FTSE ASE 80. Παρόμοιοι ενδεικτικοί δείκτες μέτρησης της πορείας άλλων χρηματιστηριακών αγορών ανακοινώνονται καθημερινά στα μέσα μαζικής ενημέρωσης. Μερικοί από αυτούς είναι οι NYSE, NASDAQ και Dow Jones για τις ΗΠΑ, ο FTSE100 και FTSE500 για την Μεγάλη Βρετανία, ο DAX για τη Γερμανία, ο CAC-40 για τη Γαλλία και ο NIKKEI-225 για την Ιαπωνία. Οι περισσότεροι από τους παραπάνω δείκτες τιμών είναι σταθμισμένοι δείκτες σύμφωνα με κάποιο έτος βάσης, όπου τα σταθμά αντιπροσωπεύουν τη χρηματιστηριακή (αγοραία) αξία των μετοχών του δείκτη.

Ας δούμε πως κατασκευάζονται αυτοί οι δείκτες μέσω ενός απλού παραδείγματος. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις εταιρείες, την 1, 2 και 3. Ο αριθμός των μετοχών και οι τιμές που επικρατούν για κάθε μετοχή στις περιόδους 0 και 1 παρουσιάζονται στον πίνακα 12.17. Βλέπουμε ότι την περίοδο 0 διαπραγματεύονται 500 μετοχές της εταιρείας 1, 100 της 2 και 200 της 3. Κατά την ίδια περίοδο, οι τιμές των μετοχών ήταν αντίστοιχα 5, 15 και 20. Η χρηματιστηριακή αξία κάθε μετοχής υπολογίζεται στη στήλη 6 πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των μετοχών της κάθε εταιρείας με την αντίστοιχη τιμή της. Έτσι, η κεφαλαιοποίηση της εταιρείας 1, 2 και 3 είναι 2500, 1500 και 4000 αντίστοιχα. Η συνολική χρηματιστηριακή αξία όλων των μετοχών ή η κεφαλαιοποίηση του συνόλου των μετοχών την περίοδο 0 είναι 8000. Στη στήλη 8 του πίνακα φαίνεται η βαρύτητα της κάθε μετοχής στη συνολική κεφαλαιοποίηση, η οποία υπολογίζεται διαιρώντας την αξία των μετοχών της κάθε εταιρείας με το σύνολο της αξίας όλων των μετοχών (8000). Για παράδειγμα, οι μετοχές της εταιρείας 1 αποτελούν το 0,3125 (2500/8000) της κεφαλαιοποίησης ενώ η μετοχές

της εταιρείας 3 αποτελούν το 50% του συνόλου. Αθροίζοντας τα ειδικά βάρη κάθε μετοχής βρίσκουμε 1, όπως αναμένεται. Εάν θέλουμε τώρα ο δείκτης να έχει βάση το 1000, πολλαπλασιάζουμε με το 1000.

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.17: ***Κατασκευή δείκτη τιμών μετοχών, Laspeyres***

Εταιρεία	N0	P0	P1	P1/P0	P0*N0	P1*N0	P0*N0/ ΣPi*N0	P1*N0 / P0*N0
1	500	5	6	1,2	2500	3000	0,3125	1,2
2	100	15	20	1,3	1500	2000	0,1875	1,3
3	200	20	22	1,1	4000	4400	0,5	1,1
ΣPi*N0					8000	9400	1	1,175

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι τιμές των μετοχών αυξάνονται κατά την περίοδο 1 όπως στη στήλη 4 σε 6, 20 και 22 αντίστοιχα για κάθε εταιρεία. Κατά συνέπεια η κεφαλαιοποίηση της κάθε εταιρείας αυξάνεται σε 3000, 2000 και 4400, όπως φαίνεται στη στήλη 7. Το ποσοστό αύξησης υπολογίζεται σε κάθε περίπτωση διαιρώντας την αγοραία αξία της περιόδου 1 με αυτήν της περιόδου 0, όπως στην τελευταία στήλη του πίνακα. Εφόσον ο αριθμός των μετοχών της κάθε εταιρείας δεν έχει μεταβληθεί το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζεται διαιρώντας την τιμή της κάθε μετοχής την περίοδο 1 με την τιμή της μετοχής την περίοδο 0, όπως φαίνεται στη στήλη 5. Για τον υπολογισμό τώρα της αύξησης του δείκτη, δηλαδή των τιμών των μετοχών, μεταξύ των δύο περιόδων διαιρούμε το σύνολο της αγοραίας αξίας όλων των μετοχών την περίοδο 1 με αυτήν της περιόδου 0. Διαιρώντας το 9400 με το 8000 και πολλαπλασιάζοντας με 1000 προκύπτει 1175. Δηλαδή, η αύξηση των τιμών των μετοχών 1, 2 και 3 κατά 20%, 30% και 10% αντίστοιχα επιφέρει αύξηση 17,5% στο γενικό δείκτη των τριών μετοχών. Το 17,5% αυτό αποτελεί το σταθμικό μέσο όρο της αύξησης των μετοχών 1, 2 και 3. Με άλλα λόγια η συνεισφορά της κάθε μετοχής στο δείκτη είναι ανάλογη της κεφαλαιοποίησης της κάθε μετοχής. Κατά συνέπεια, οι μετοχές μεγάλης κεφαλαιοποίησης, στο παράδειγμά μας η 3 και η 1, θα έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στο δείκτη. Η αύξηση του δείκτη αντανακλά την 17,5% απόδοση που επιτυγχάνεται σε ένα χαρ-

τοφυλάκιο που αποτελείται από αυτές τις τρεις μετοχές στην αναλογία της χρηματιστηριακής τους αξίας.

Ας δούμε όμως ένα πραγματικό παράδειγμα που ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία. Συγκεκριμένα ο FTSE ASE 20 υπολογίζεται μέσω του τύπου:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni} W_{0i}}{\sum_{i=1}^{m} P_{0i} W_{0i}} \times 100$$

όπου P_{ni} είναι η τιμή κλεισίματος της προηγούμενης ημέρας (n) της i μετοχής που συμμετέχει στο δείκτη, P_{0i} είναι η τιμή κλεισίματος της i μετοχής την ημερομηνία της βάσης (0), W_{0i} είναι η κεφαλαιοποίηση (αξία) της μετοχής i ως ποσοστό της συνολικής αξίας στο δείκτη των μετοχών την ημερομηνία της βάσης και m ισούται με τον αριθμό των μετοχών που απαρτίζουν τον δείκτη.

Οι μετοχές που συμμετέχουν στο δείκτη είναι οι είκοσι μεγαλύτερες σε κεφαλαιοποίηση μετοχές του χρηματιστηρίου αξιών Αθηνών (ΧΑΑ) με την προϋπόθεση ότι η συνολική αξία του κύκλου εμπορευσιμότητας της μετοχής να υπερβαίνει τουλάχιστον το 10% της χρηματιστηριακής αξίας της εταιρείας ετησίως. Επιλέγονται λοιπόν οι 20 μετοχές που έχουν τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση ελεύθερα διαπραγματεύσιμη. Η αναθεώρηση του δείκτη γίνεται κάθε 6 μήνες. Στον πίνακα 12.18 βλέπουμε πως η σύνθεση του δείκτη το Δεκέμβριο του 2002 ήταν διαφορετική από εκείνη του Μαρτίου του 1999. Για παράδειγμα το 2002 στον δείκτη συμπεριλήφθη ο ΟΠΑΠ και η Ελληνική Τεχνοδομική που δεν υπήρχαν το 1999, ενώ οι Μινωικές Γραμμές και οι Επιχειρήσεις Αττικής έχουν χάσει τη θέση τους στο δείκτη. Τα παραπάνω αντικατοπτρίζουν μεταξύ άλλων το πως έχει κινηθεί ο κλάδος στον οποίο δραστηριοποιείται η κάθε εταιρεία.

Υπάρχουν τέσσερις μεγάλες εταιρείες που ασκούν σημαντική επίδραση στον FTSE ASE20, καθώς αποτελούν το 50% της κεφαλαιοποίησης του δείκτη. Αυτές είναι η ΑΛΦΑ ΤΡΑΠΕΖΑ ΠΙΣΤΕΩΣ, η ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ, η EFG EUROBANK ΕΡΓΑΣΙΑΣ και ο ΟΤΕ. Η παρουσία των τραπεζών στο δείκτη είναι υψηλή αφού επτά από τις είκοσι εταιρείες του δείκτη είναι Τράπεζες. Το συνο-

ΠΙΝΑΚΑΣ 12.18: ***Η σύνθεση του FTSE ASE 20 το 1999 και το 2002***

ΚΛΑΔΟΣ	5-3-1999	2-12-2002
ΤΡΑΠΕΖΕΣ	ΑΛΦΑ BANK	ΑΓΡΟΤΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ
	ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ	ΑΛΦΑ BANK
	ΤΡΑΠΕΖΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ
	ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ	ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ
	ΙΟΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ	EFG EUROBANK ΕΡΓΑΣΙΑΣ
	ΤΡΑΠΕΖΑ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ-ΘΡΑΚΗΣ	ΕΤΒΑ
	ΤΡΑΠΕΖΑ ΠΕΙΡΑΙΩΣ	ΤΡΑΠΕΖΑ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
	ΤΡΑΠΕΖΑ ΧΙΟΥ	
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ	ΟΤΕ	ΟΤΕ
	ΠΑΝΑΦΟΝ	VODAFONE-ΠΑΝΑΦΟΝ
		COSMOTE
ΤΡΟΦΙΜΑ	ΕΕΕ	COCA COLA, ΕΕΕ
	GOODY'S	
ΤΣΙΜΕΝΤΑ	ΤΙΤΑΝ	ΤΙΤΑΝ
ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΙΚΕΣ	ΗΡΑΚΛΗΣ	ΑΛΟΥΜΙΝΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
	ΒΙΟΧΑΛΚΟ	ΒΙΟΧΑΛΚΟ
	ΕΛΒΑΛ	ΕΛΒΑΛ
	ΙΝΤΡΑΚΟΜ	ΙΝΤΡΑΚΟΜ
ΠΕΤΡΕΛΑΙΑ	ΕΛΠΕ	ΕΛΠΕ
		MOTOR OIL
ΤΥΧΕΡΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ		ΟΠΑΠ
ΕΠΙΒΑΤΗΓΟΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑ	ΜΙΝΩΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	
	ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΑΤΤΙΚΗΣ	
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΕΣ		ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΤΕΧΝΟΔΟΜΙΚΗ

λικό τους βάρος στο δείκτη είναι άνω του 50%. Ο FTSE ASE 20 δεν περιλαμβάνει εταιρείες από την Παράλληλη Αγορά, καθώς η αγορά αυτή περιλαμβάνει εταιρείες που είναι μικρές, δυναμικές, και αναμένεται να αναπτυχθούν, αλλά ακόμη δεν πληρούν τις προϋποθέσεις για να συμμετάσχουν στο δείκτη. Τέλος να αναφέρουμε ότι ο δείκτης είναι προσαρμοσμένος για διασπάσεις μετοχών (stock splits) ενώ δεν περιλαμβάνει τα διανεμηθέντα κέρδη. Σημειώνεται ότι πολλές εταιρείες επιλέγουν να διασπάσουν τις μετοχές τους σε περισσότερες μετοχές, με κύριο στόχο να μειώσουν την ονομαστική τους αξία ώστε να αυξήσουν την εμπορευσιμότητά τους. Για παράδειγμα, μια υποθετική εταιρεία έχει 100 μετοχές και αξία μετοχής πριν τη διάσπαση 10 ευρώ. Εάν διπλασιαστεί ο αριθμός των μετοχών από 100 σε 200, η τιμή της μετοχής θα μειωθεί στα 5 ευρώ. Η συνολική αξία της εταιρείας παραμένει σταθερή πριν και μετά τη διάσπαση και ισούται με $10 \times 100 = 5 \times 200 = 1000$ ευρώ.

Άσκηση:

Να κατασκευαστούν όλοι οι αριθμοδείκτες που ορίσθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, χρησιμοποιώντας το λογισμικό Excel.

Ασκήσεις για λύση

1) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις τιμές και ποσότητες των τριών προϊόντων Α, Β, Γ που καταναλώθηκαν σε τρία συναπτά έτη 0, 1, 2.

	Έτος 0		Έτος 1		Έτος 2	
	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_2	Q_2
Α	20	15	5	20	100	10
Β	21	10	4	15	60	8
Γ	25	4	8	30	80	9

a) Να υπολογιστεί ο απλός δείκτης τιμών για το προϊόν Γ.
b) Να υπολογιστεί ο απλός συνολικός δείκτης τιμών για τα Α, Β, Γ.
c) Να υπολογιστεί ο αλυσωτός (chain) δείκτης τιμών για το προϊόν Γ. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του τελευταίου και του απλού δείκτη τιμών;

d) Να υπολογιστούν οι δείκτες τιμών των Laspeyres και Paasche για μια οικονομία αποτελούμενη από τα τρία προϊόντα Α, Β, Γ.
e) Χρησιμοποιώντας την απάντησή στο (d) να βρεθεί ο δείκτης τιμών του Fisher. Να συγκριθεί ο τελευταίος με τους δείκτες τιμών των Laspeyres και Paasche.

2) Η εξέλιξη των τιμών και ποσοτήτων κατανάλωσης σε μια οικονομία 4 αγαθών μεταξύ της περιόδου 0 και 1 δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Αγαθά	P_0	Q_0	P_1	Q_1
1	100	8	120	6
2	80	4	96	5
3	200	6	240	4
4	160	2	192	1

όπου P_0, Q_0 αναφέρονται σε τιμές και ποσότητες των αγαθών στην περίοδο 0 και P_1, Q_1 αναφέρονται σε τιμές και ποσότητες των αγαθών στην περίοδο 1.

Να υπολογισθούν οι δείκτες τιμών Laspeyres και Paasche για την οικονομία.

3) Δίνονται τα παρακάτω δεδομένα ενός τιμάριθμου:

Έτος	Παλιά σειρά	Νέα σειρά
2000	100	
2001	108	
2002	115	100
2003		110
2004		118

Να συνδεθούν οι παραπάνω δύο σειρές του δείκτη τιμών σε μια ενιαία σειρά, πρώτον με βάση 100 το έτος 2000 και δεύτερον με βάση 100 το έτος 2002.

4) Με βάση τους παρακάτω υποθετικούς δείκτες για το ΑΕΠ μιας χώρας, να κατασκευαστεί ένας ενιαίος δείκτης τιμών για την περίοδο 1991-2000, όπου η βάση του νέου δείκτη θα είναι το έτος 1999.

Χρονική περίοδος	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ΑΕΠ1	95	98	100	101						
ΑΕΠ2				87	89	92	94	97	100	105

5) Το ετήσιο εισόδημα σε ευρώ ενός υπαλλήλου την τελευταία πενταετία παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος:	1	2	3	4	5
Εισόδημα:	10.000	10.500	11.100	12.000	13.000

a) Να κατασκευαστεί ένας απλός δείκτης τιμών (ΑΔΤ) με βάση το έτος 2 ο οποίος να δείχνει πώς το εισόδημα του υπαλλήλου έχει μεταβληθεί διαχρονικά.

b) Να ξανακατασκευαστεί ο παραπάνω δείκτης με βάση το έτος 4.

c) Να συγκριθεί η ποσοστιαία αύξηση στην εισοδηματική ροή μεταξύ των ετών 3 και 2 χρησιμοποιώντας τους παραπάνω δείκτες, βάσης 2 και 4 αντίστοιχα.

13 Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

13.1 Προβλήματα μιας επένδυσης

13.1.1 Εισαγωγή

Όπως υποδηλώνεται στον πίνακα 13.1, επενδύσεις αποτελούν μια σειρά ***καθαρών ταμειακών ροών (ΚΤΡ) – (Net cash flows)***, με συνήθη στόχο την απόκτηση κέρδους από τον επενδυτή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.1: ***Επενδύσεις ως Σειρά Καθαρών Ταμειακών Ροών (ΚΤΡ)***

Χρονική Περίοδος	T_0	T_1	T_2	…	T_v
Χρηματορροή	X_0	X_1	X_2	…	X_v
Εισροή (+)/Εκροή (–)	–	+	+	…	+

Οι επενδύσεις διακρίνονται σε:

- ***Παραγωγικές επενδύσεις***, παραδείγματα των οποίων αποτελούν Βιομηχανικές Μονάδες, Πλοία, Ξενοδοχεία, κ.λπ. Παραδείγματα εκροών αποτελούν το αρχικό κόστος της επένδυσης για την ενεργοποίηση της επιχείρησης, τα λειτουργικά έξοδα από την καθημερινή λειτουργία της επιχείρησης, κ.λπ.
- ***Μετοχές***: Αγοράζονται στην τιμή που επικρατεί στην αγορά τη δεδομένη χρονική στιγμή, δημιουργώντας μια εκροή. Εισροές αποτελούν τα μερίσματα και οι εισπράξεις από την πώληση της μετοχής. Το μέγεθος των μερισμάτων που λαμβάνεται εξαρτάται από την κερδοφορία και τη μερισματική πολιτική της επιχείρησης.
- ***Χρεόγραφα σταθερής προσόδου***: Εισροές από την επένδυση αυτή αποτελούν οι τόκοι, οι οποίοι λαμβάνονται περιοδικά, π.χ. ανά εξάμηνο και είναι σταθεροί (εξ' ου και η ορολογία, «σταθερής προσόδου»), και οι εισπράξεις από την τιμή εξόφλησης

Κατά την ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι *Συμβολισμοί / Υποθέσεις*:

ΠΑ = ***Παρούσα αξία (Present value)*** ή τιμή αξιόγραφων, π.χ. μετοχών, ομολογιών

ΜΑ = ***Μελλοντική αξία (Compound amount)*** αξιόγραφων

r = ***Επιτόκιο προεξόφλησης (interest/discount rate)*** κάθε περιόδου

ν = ***Τοκοφόρος περίοδος - Period to maturity***

Οι τόκοι λαμβάνονται στο τέλος κάθε περιόδου – δηλαδή *Ληξιπρόθεσμα*. Τόκοι λαμβανόμενοι στην αρχή κάθε περιόδου λέγονται *Προκαταβλητέοι*.

Θα εξεταστούν τα ακόλουθα προβλήματα:

1. ***Πρόβλημα τελικού ποσού ή μελλοντικής αξίας:*** Υπολογισμός του ΜΑ, δεδομένων των ΠΑ, r, ν.
2. ***Πρόβλημα παρούσας αξίας (ή αποτίμησης αξιογράφων):*** Υπολογισμός του ΠΑ, δεδομένων των ΜΑ, r, ν.
3. ***Πρόβλημα εσωτερικού βαθμού απόδοσης (ΕΒΑ) – Internal rate of return(IRR):*** Υπολογισμός του r, δεδομένων των ΠΑ, ΜΑ, ν.
4. ***Πρόβλημα περιόδου αποπληρωμής – Payback period:*** Υπολογισμός του ν, δεδομένων των ΠΑ, ΜΑ, r.

13.1.2 Προβλήματα μελλοντικής αξίας

13.1.2.1 Απλό επιτόκιο (Simple interest)

Ποσό χρημάτων (ΠΑ), κατατίθεται σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, για ν περιόδους, όπου ο τόκος πληρώνεται στο τέλος της περιόδου χωρίς ανατοκισμό. Επομένως, στο λογαριασμό θα υπάρχει το αρχικό ποσό (ΠΑ), ενώ σε κάθε περίοδο θα λαμβάνεται ένα ποσό τόκων r × ΠΑ. Η μελλοντική αξία του ποσού (ΜΑ), σε ν περιόδους είναι:

$$\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ} + (r\text{ΠΑ} + r\text{ΠΑ} + \ldots + r\text{ΠΑ})$$

$$\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ} + \nu(r\text{ΠΑ})$$

Επομένως,

$$\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}(1 + \nu r)$$

Παράδειγμα:

€ 100 επενδυόμενα για 2 έτη, με 10% ετήσιο επιτόκιο, θα αυξηθούν σε:

$$\text{ΜΑ} = €\,100(1 + 2 \times 0{,}1) = €\,120$$

13.1.2.2 Σύνθετος ανατοκισμός (Compound interest)

Στην περίπτωση αυτή ο τόκος κάθε έτους προστίθεται στο αποταμιευμένο ποσό και όλο το ποσό ανατοκίζεται. Επομένως, το ποσό ΠΑ, επενδυόμενο με r κάθε περίοδο, θα αυξηθεί σε

$$\begin{aligned} &\text{ΠΑ}(1+r) &&= \text{ΠΑ}(1+r) &&\text{στο έτος 1}\\ &[\text{ΠΑ}(1+r)](1+r) &&= \text{ΠΑ}(1+r)^2 &&\text{στο έτος 2}\\ & &&\vdots && \\ & &&= \text{ΠΑ}(1+r)^\nu &&\text{στο έτος ν}\end{aligned}$$

Επομένως, $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}(1 + r)^\nu$

Παράδειγμα:

Ποσό € 100 επενδυόμενο για 2 έτη, με 10% ετήσιο επιτόκιο, αυξάνεται σε:

$$\text{ΜΑ} = €\,100(1 + 0{,}1)^2 = €\,121$$

Ο Πίνακας 13.2 παρουσιάζει τις ταμειακές ροές που προκύπτουν για κάθε περίοδο από την παραπάνω επένδυση. Όπως φαίνεται, κατά την περίοδο Τ2, το δεύτερο έτος, ας πούμε, το τελικό ποσό είναι € 121.

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.2: *Οι Ταμειακές Ροές από Επένδυση € 100*

Χρονική Περίοδος	T_0	T_1	T_2
Χρηματορροή	X_0	X_1	X_2
Εισροή (+) / Εκροή (–)	– € 100	$100(1+0{,}1) = +€110$	$100(1+0{,}1)^2 = +€121$

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.3: ***Μελλοντική Αξία € 1 (ΜΑ), ως συνάρτηση των Επιτοκίων (r), και της Τοκοφόρου Περιόδου (ν)***

B5 =(1+B$4/100)^$A5

Πίνακας Συντελεστών Ανατοκισμού

Μελλοντική Αξία 1 Ευρώ λαμβανομένης στο τέλος της περιόδου ν: ΜΑ=(1+r)^v

Περίοδος, ν	Επιτόκιο, r% 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100	1.110	1.120	1.130	1.140	1.150	1.160	1.170	1.180
2	1.020	1.040	1.061	1.082	1.103	1.124	1.145	1.166	1.188	1.210	1.232	1.254	1.277	1.300	1.323	1.346	1.369	1.392
3	1.030	1.061	1.093	1.125	1.158	1.191	1.225	1.260	1.295	1.331	1.368	1.405	1.443	1.482	1.521	1.561	1.602	1.643
4	1.041	1.082	1.126	1.170	1.216	1.262	1.311	1.360	1.412	1.464	1.518	1.574	1.630	1.689	1.749	1.811	1.874	1.939
5	1.051	1.104	1.159	1.217	1.276	1.338	1.403	1.469	1.539	1.611	1.685	1.762	1.842	1.925	2.011	2.100	2.192	2.288
6	1.062	1.126	1.194	1.265	1.340	1.419	1.501	1.587	1.677	1.772	1.870	1.974	2.082	2.195	2.313	2.436	2.565	2.700
7	1.072	1.149	1.230	1.316	1.407	1.504	1.606	1.714	1.828	1.949	2.076	2.211	2.353	2.502	2.660	2.826	3.001	3.185
8	1.083	1.172	1.267	1.369	1.477	1.594	1.718	1.851	1.993	2.144	2.305	2.476	2.658	2.853	3.059	3.278	3.511	3.759
9	1.094	1.195	1.305	1.423	1.551	1.689	1.838	1.999	2.172	2.358	2.558	2.773	3.004	3.252	3.518	3.803	4.108	4.435
10	1.105	1.219	1.344	1.480	1.629	1.791	1.967	2.159	2.367	2.594	2.839	3.106	3.395	3.707	4.046	4.411	4.807	5.234
11	1.116	1.243	1.384	1.539	1.710	1.898	2.105	2.332	2.580	2.853	3.152	3.479	3.836	4.226	4.652	5.117	5.624	6.176
12	1.127	1.268	1.426	1.601	1.796	2.012	2.252	2.518	2.813	3.138	3.498	3.896	4.335	4.818	5.350	5.936	6.580	7.288
13	1.138	1.294	1.469	1.665	1.886	2.133	2.410	2.720	3.066	3.452	3.883	4.363	4.898	5.492	6.153	6.886	7.699	8.599
14	1.149	1.319	1.513	1.732	1.980	2.261	2.579	2.937	3.342	3.797	4.310	4.887	5.535	6.261	7.076	7.988	9.007	10.147
15	1.161	1.346	1.558	1.801	2.079	2.397	2.759	3.172	3.642	4.177	4.785	5.474	6.254	7.138	8.137	9.266	10.539	11.974
16	1.173	1.373	1.605	1.873	2.183	2.540	2.952	3.426	3.970	4.595	5.311	6.130	7.067	8.137	9.358	10.748	12.330	14.129
17	1.184	1.400	1.653	1.948	2.292	2.693	3.159	3.700	4.328	5.054	5.895	6.866	7.986	9.276	10.761	12.468	14.426	16.672
18	1.196	1.428	1.702	2.026	2.407	2.854	3.380	3.996	4.717	5.560	6.544	7.690	9.024	10.575	12.375	14.463	16.879	19.673
19	1.208	1.457	1.754	2.107	2.527	3.026	3.617	4.316	5.142	6.116	7.263	8.613	10.197	12.056	14.232	16.777	19.748	23.214
20	1.220	1.486	1.806	2.191	2.653	3.207	3.870	4.661	5.604	6.727	8.062	9.646	11.523	13.743	16.367	19.461	23.106	27.393
21	1.232	1.516	1.860	2.279	2.786	3.400	4.141	5.034	6.109	7.400	8.949	10.804	13.021	15.668	18.822	22.574	27.034	32.324
22	1.245	1.546	1.916	2.370	2.925	3.604	4.430	5.437	6.659	8.140	9.934	12.100	14.714	17.861	21.645	26.186	31.629	38.142
23	1.257	1.577	1.974	2.465	3.072	3.820	4.741	5.871	7.258	8.954	11.026	13.552	16.627	20.362	24.891	30.376	37.006	45.008
24	1.270	1.608	2.033	2.563	3.225	4.049	5.072	6.341	7.911	9.850	12.239	15.179	18.788	23.212	28.625	35.236	43.297	53.109
25	1.282	1.641	2.094	2.666	3.386	4.292	5.427	6.848	8.623	10.835	13.585	17.000	21.231	26.462	32.919	40.874	50.658	62.669
30	1.348	1.811	2.427	3.243	4.322	5.743	7.612	10.063	13.268	17.449	22.892	29.960	39.116	50.950	66.212	85.850	111.065	143.371
35	1.417	2.000	2.814	3.946	5.516	7.686	10.677	14.785	20.414	28.102	38.575	52.800	72.069	98.100	133.176	180.314	243.503	327.997
40	1.489	2.208	3.262	4.801	7.040	10.286	14.974	21.725	31.409	45.259	65.001	93.051	132.782	188.884	267.864	378.721	533.869	750.378
45	1.565	2.438	3.782	5.841	8.985	13.765	21.002	31.920	48.327	72.890	109.530	163.988	244.641	363.679	538.769	795.444	1170.479	1716.684

Συμπεράσματα:

- Η μελλοντική αξία ενός Ευρώ σε ν περιόδους είναι $(1+r)^{v}$. Ο όρος $(1+r)^{v}$ ονομάζεται ***συντελεστής ανατοκισμού, ΣΑ.***

Το ***Excel*** έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία του πίνακα συντελεστών ανατοκισμού που βλέπουμε στον πίνακα 13.3. Στη σειρά 4 του φύλλου εργασίας ορίζονται τα επιτόκια, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί B4, ενώ στη στήλη A ορίζεται η τοκοφόρος περίοδος, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί A5. Στο κελί B5 ορίζουμε τον τύπο του συντελεστή ανατοκισμού, =(1+B$4/100)^$A5. Αυτός χρησιμοποιεί ως εισόδους τα επιτόκια και την περίοδο ανατοκισμού, για να υπολογίσει τον ΣΑ για r = 1, ν = 1. Βλέπουμε ότι η τιμή του είναι 1,01. Αντιγράφοντας τον τύπο οριζοντίως και καθέτως στα υπόλοιπα κελιά του πίνακα, υπολογίζονται όλοι οι συντελεστές ανατοκισμού για τους συνδυασμούς r και ν που έχουμε θέσει. Για παράδειγμα, στο κελί K2 του φύλλου εργασίας παρουσιάζεται ο συντελεστής ανατοκισμού για το συνδυασμό r = 10, ν = 2, η τιμή του οποίου είναι 1,21. Δηλαδή, ΣΑ(r = 10, ν = 2) = 1,121

- Οποιοδήποτε ποσό πολλαπλασιαζόμενο με την ΜΑ ενός Ευρώ, δηλαδή με το συντελεστή ανατοκισμού, δίνει την ΜΑ του ποσού αυτού. Ο πίνακας συντελεστών ανατοκισμού που δημιουργήσαμε είναι χρήσιμος, στις περιπτώσεις που απαιτούνται υπολογισμοί αυτού του είδους.

Παράδειγμα:

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των ΣΑ βρίσκουμε ότι η ΜΑ € 100 σε λογαριασμό για 2 έτη, με επιτόκιο 10%, είναι € 100 × 1,21 = € 121

- Η ΜΑ είναι ανάλογη του ύψους των επιτοκίων (r) και της τοκοφόρου περιόδου (ν).

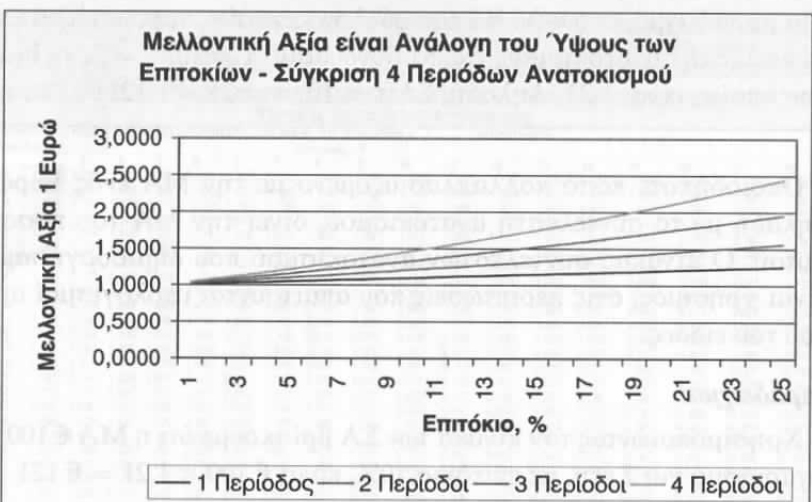
Η σχέση αυτή παρουσιάζεται στα Διαγράμματα 13.1 και 13.2. Αυτά δημιουργήθηκαν στο ***Excel.*** Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούνται τα δεδομένα των σειρών 5, 6, 7 και 8 του φύλλου εργασίας για τη δημιουργία του γραφήματος. Στην περίπτωση του Διαγράμματος 13.2, χρησιμοποιούνται τα δεδομένα της στήλης K του φύλλου εργασίας για τη δημιουργία του γραφήματος.

- Ένα χρηματικό ποσό σήμερα ισοδυναμεί με ένα άλλο μεγαλύτερο ποσό λαμβανόμενο στο μέλλον.

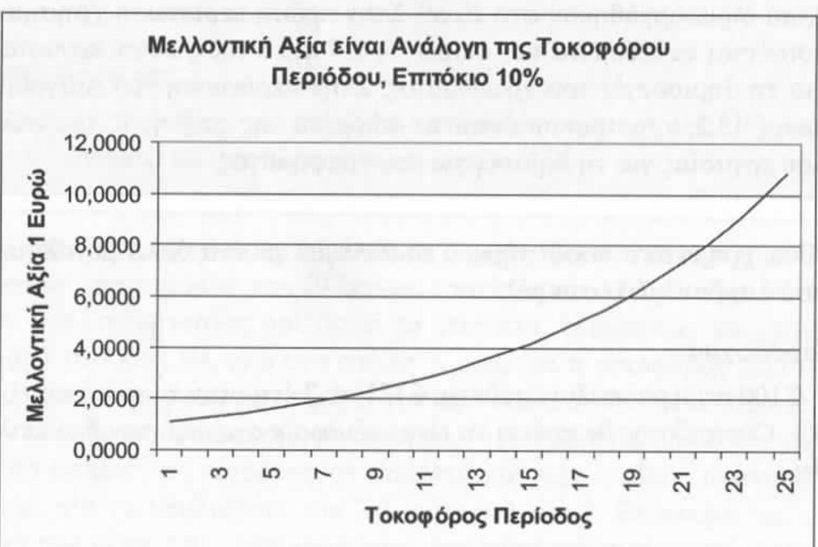
Παράδειγμα:

€ 100 σήμερα ισοδυναμούν με € 121 σε 2 έτη όταν το επιτόκιο είναι 10%. Ο επενδυτής θα πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.1: *Μελλοντική Αξία € 1, ως συνάρτηση του Ύψους των Επιτοκίων*



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.2: *Μελλοντική Αξία € 1, ως συνάρτηση της Τοκοφόρου Περιόδου*



13.1.2.2.1 Συχνός ανατοκισμός (Frequent compounding)

Ονομαστικό επιτόκιο (r) ανατοκίζεται μ φορές το έτος και η επένδυση πραγματοποιείται για ν έτη. Ο επενδυτής θα λάβει μν δόσεις, μεγέθους $\frac{r}{\mu}$% η κάθε μία. Επομένως,

$$\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu}$$

Παράδειγμα:

Ποσό € 100 επενδυόμενο για 2 έτη, με ετήσιο επιτόκιο 10%, θα αυξηθεί σε:

Με εξαμηνιαίο ανατοκισμό:

$$\text{ΜΑ} = €\,100\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2\times2} = €\,121{,}55$$

Με τριμηνιαίο ανατοκισμό:

$$\text{ΜΑ} = €\,100\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{4\times2} = €\,121{,}84$$

Με μηνιαίο ανατοκισμό:

$$\text{ΜΑ} = €\,100\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12\times2} = €\,122{,}04$$

13.1.2.2.2 Συχνός ανατοκισμός: Ετησιοποιημένα επιτόκια ή ισοδύναμα ετήσια επιτόκια – Effective rates of interest

Το ***ετησιοποιημένο επιτόκιο ή ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο (effective rate of interest) (i)***, είναι το επιτόκιο εκείνο το οποίο, εάν ανατοκιστεί μία φορά κατά τη διάρκεια του έτους, θα αποδώσει την ίδια μελλοντική αξία, με ονομαστικό επιτόκιο ανατοκιζόμενο συχνότερα του έτους.

Έτσι, το αρχικό κεφάλαιο (ΠΑ) επενδυόμενο για ένα έτος, με επιτόκιο i, θα αυξηθεί σε ΜΑ = ΠΑ(1 + i), και το ΜΑ θα είναι το ίδιο, εάν το ΠΑ είχε ανατοκιστεί μ φορές το έτος με επιτόκιο r/μ κάθε περίοδο, $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu}$. Επομένως,

$$1+i=\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\mu}$$

Παράδειγμα:

Τι ετησιοποιημένο επιτόκιο αντιστοιχεί σε ετήσιο επιτόκιο 10% με:

a) εξαμηνιαίο ανατοκισμό;

$$1+i=\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{2}\Rightarrow i=0,1025 \quad \text{δηλ. } i=10,25\% \text{ ετησίως}$$

b) τριμηνιαίο ανατοκισμό:

$$1+i=\left(\frac{0,1}{4}\right)^{4}\Rightarrow i=0,1038 \quad \text{δηλ. } i=10,38\% \text{ ετησίως}$$

13.1.2.2.3 Διαρκής ανατοκισμός (Continuous compounding)

Ας υποθέσουμε ότι η συχνότητα ανατοκισμού (μ) γίνεται πολύ μεγάλη.

Τότε, η μελλοντική αξία, $MA=ΠA\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu}$, υπολογίζεται ως:

$$MA=ΠA\left[\left(1+\frac{1}{\mu/r}\right)^{\mu/r}\right]^{r\times\mu}$$

η οποία με τη σειρά της τείνει στο $ΠAe^{r\times\nu}$ όταν $\mu\to\infty$, και $\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=e$, όπου $e=2,718$. Επομένως,

$$MA=ΠAe^{r\times\nu}$$

Παραδείγματα:

1. Ποσό €100 επενδυόμενο για 2 έτη, με ετήσιο επιτόκιο 10% και διαρκή ανατοκισμό, θα αυξηθεί σε:

$$MA=100e^{0,1\times2}=€\,122,14$$

2. Εκθετική αύξηση – Exponential growth

Πληθυσμός 100 εκατομμυρίων αυξανόμενος κατά 3% ετησίως θα είναι σε 10 έτη:

$$MA=100e^{0,03\times10}=135 \text{ εκ}$$

3. Εκθετική μείωση – Exponential decay (Depreciation)

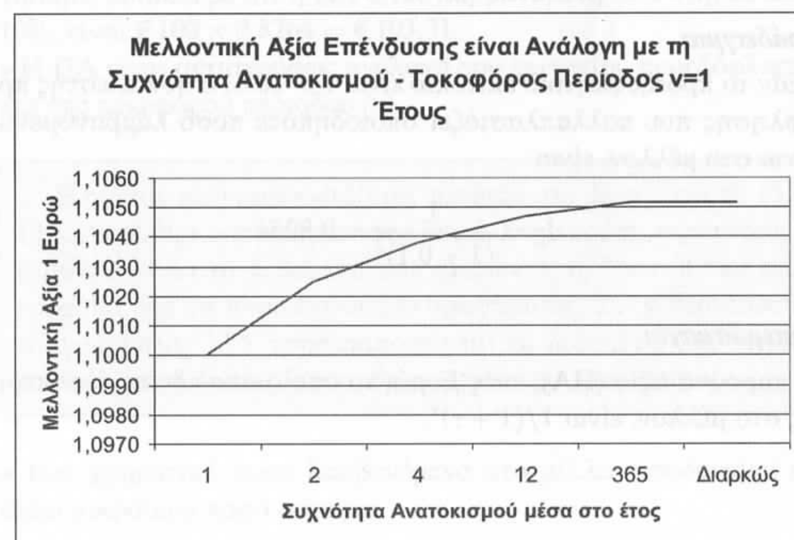
Μηχάνημα παραγωγής στοιχίζει €100.000, η αξία του οποίου μειώνεται ετησίως κατά 8%. Η αξία του σε 4 έτη θα είναι

$$MA=100.000e^{-0,08\times4}=€\,72.615$$

Συμπεράσματα:

- Επιτόκιο ανατοκιζόμενο περισσότερες από μια φορές κατά τη διάρκεια του έτους, αντιστοιχεί σε ετήσιο επιτόκιο υψηλότερου του ονομαστικού σε ετήσια βάση.
- Λογαριασμοί ταμιευτηρίου με το ίδιο ονομαστικό επιτόκιο αλλά υψηλότερη συχνότητα ανατοκισμού, είναι προτιμότεροι από αυτούς με μικρότερη συχνότητα ανατοκισμού.
- Η μελλοντική αξία ποσού είναι ανάλογη της συχνότητας ανατοκισμού κατά τη διάρκεια του έτους (όπως και του επιτοκίου και της τοκοφόρου περιόδου) – η αύξηση είναι εκθετική σε σχέση με τη συχνότητα. Η εκθετική αυτή σχέση, ΜΑ και συχνότητας ανατοκισμού κατά τη διάρκεια του έτους, παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 13.3.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.3: ***Σχέση Μελλοντικής Αξίας Επένδυσης και Συχνότητας Ανατοκισμού***



13.1.3 Προβλήματα παρούσας αξίας (Present value problems)

Αφού η μελλοντική αξία του ποσού ΠΑ είναι ΜΑ = ΠΑ$(1+r)^{\nu}$, η παρούσα αξία (ΠΑ) του ποσού ΜΑ, που θα πληρωθεί σε ν περιόδους με επιτόκιο προεξόφλησης r, είναι:

$$\Pi A = \frac{MA}{(1+r)^{\nu}}$$

Παράδειγμα:

Η ΠΑ του μελλοντικού ποσού € 125 λαμβανόμενου σε 2 έτη, με επιτόκιο προεξόφλησης 10%, είναι:

$$\Pi A = €\,125/(1+0{,}1)^2 = €\,103{,}31$$

13.1.3.1 Συντελεστής προεξόφλησης ή αναγωγής – Discount factor

Ο συντελεστής $\frac{1}{(1+r)^{\nu}}$ με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ένα μελλοντικό ποσό για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας του, είναι γνωστός ως ***συντελεστής προεξόφλησης ή συντελεστής αναγωγής (Discount factor)***. Το επιτόκιο r είναι γνωστό ως το ***επιτόκιο προεξόφλησης ή επιτόκιο αναγωγής (discount rate)***.

Παράδειγμα:

Εάν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι r = 10%, ο συντελεστής προεξόφλησης που πολλαπλασιάζει οποιοδήποτε ποσό λαμβανόμενο 2 χρόνια στο μέλλον, είναι:

$$d_2 = \frac{1}{(1+0{,}1)^2} = 0{,}8264$$

Συμπεράσματα:

- Η παρούσα αξία (ΠΑ), ενός Ευρώ, το οποίο αποδίδεται σε ν περιόδους στο μέλλον, είναι $1/(1+r)^{\nu}$.

Το *Excel* έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία του πίνακα συντελεστών αναγωγής που βλέπουμε στον πίνακα 13.4. Στη σειρά 4 του φύλλου εργασίας ορίζονται τα επιτόκια, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί B4, ενώ στη στήλη A ορίζεται η τοκοφόρος περίοδος, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί A5. Στο κελί B5 ορίζουμε τον τύπο του συντελεστή αναγωγής, =1/((1+B$4/100)^$A5). Αυτός χρησιμοποιεί ως εισόδους τα επιτόκια και την περίοδο ανατοκισμού για να υπολογίσει το συντελεστή προεξόφλησης για r = 1,ν = 1. Βλέπουμε ότι η τιμή του είναι 0,19901. Αντιγράφοντας τον τύπο οριζοντίως και καθέτως στα υπόλοιπα κελιά του πίνακα υπολογίζονται όλοι οι συντελεστές ανατοκισμού για τους συνδυασμούς r και ν που έχουμε θέσει. Έτσι, στο κελί K2 του φύλλου εργασίας παρουσιάζεται ο συντελεστής ανατοκισμού για το συνδυασμό r = 10, n = 2, η τιμή του οποίου είναι 0,8264. Δηλαδή, ΣΑ(r = 10, ν = 2) = 0,8264

- Οποιοδήποτε ποσό πολλαπλασιαζόμενο με την ΠΑ ενός Ευρώ δίνει την ΠΑ του ποσού αυτού.

Παράδειγμα:

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα συντελεστών αναγωγής που δημιουργήσαμε, βρίσκουμε ότι η ΠΑ € 100 λαμβανόμενη σε 2 έτη, με επιτόκιο 10%, είναι € 100 × 0,8264 = € 103,31.

- Η ΠΑ είναι αντιστρόφως ανάλογη του επιτοκίου προεξόφλησης (r), και της τοκοφόρου περιόδου (ν).

Η σχέση αυτή παρουσιάζεται γραφικά στα Διαγράμματα 13.4 και 13.5. Αυτά δημιουργήθηκαν στο Excel. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούνται τα δεδομένα των σειρών 5, 6, 7 και 8 του φύλλου εργασίας για τη δημιουργία του γραφήματος. Στην περίπτωση του Διαγράμματος 13.5 χρησιμοποιούνται τα δεδομένα της στήλης K του φύλλου εργασίας για τη δημιουργία του γραφήματος.

- Ένα χρηματικό ποσό λαμβανόμενο στο μέλλον ισοδυναμεί με ένα άλλο μικρότερο ποσό σήμερα.

Παράδειγμα:

€ 100 λαμβανόμενα σε 2 έτη, ισοδυναμούν με € 82,64 σήμερα, δεδομένου του επιτοκίου προεξόφλησης 10%. Ο επενδυτής θα πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.4: ***Παρούσα Αξία € 1 (ΠΑ), ως συνάρτηση του Ύψους των Επιτοκίων (r), και της Τοκοφόρου Περιόδου (ν)***

Microsoft Excel - Parouses axies

B5 =1/(1+B$4/100)^$A5

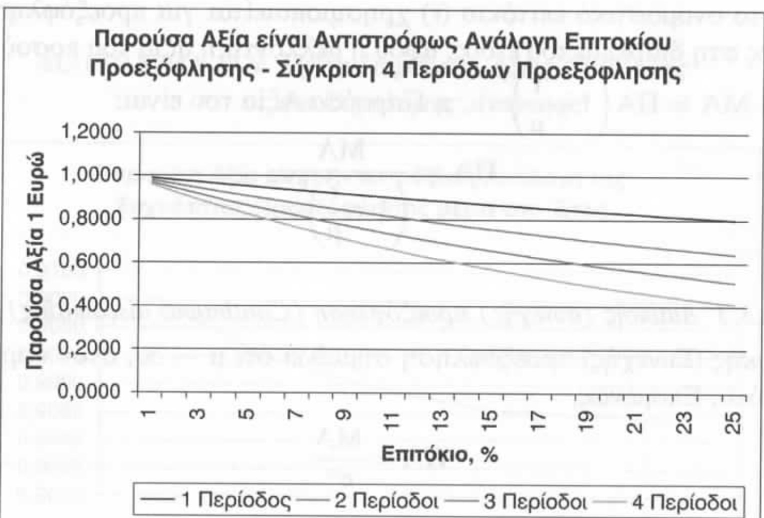
Πίνακας Συντελεστών Αναγωγής ή Προεξόφλησης

Παρούσα Αξία 1 Ευρώ λαμβανομένης στο τέλος της περιόδου ν: ΠΑ=1/(1+r)^ν

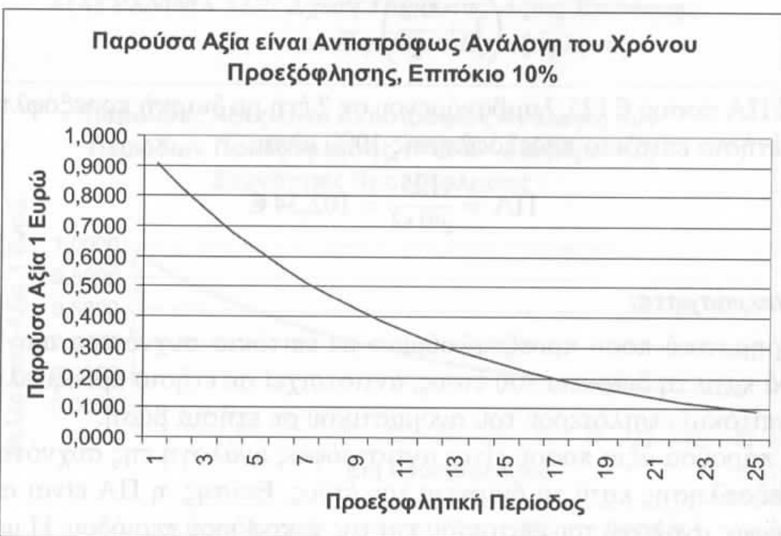
Περίοδος, ν	Επιτόκιο, r% 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.9009	0.8929	0.8850	0.8772	0.8696	0.8621	0.8547	0.8475	0.84
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417	0.8264	0.8116	0.7972	0.7831	0.7695	0.7561	0.7432	0.7305	0.7182	0.70
3	0.9706	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722	0.7513	0.7312	0.7118	0.6931	0.6750	0.6575	0.6407	0.6244	0.6086	0.59
4	0.9610	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084	0.6830	0.6587	0.6355	0.6133	0.5921	0.5718	0.5523	0.5337	0.5158	0.49
5	0.9515	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499	0.6209	0.5935	0.5674	0.5428	0.5194	0.4972	0.4761	0.4561	0.4371	0.41
6	0.9420	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963	0.5645	0.5346	0.5066	0.4803	0.4556	0.4323	0.4104	0.3898	0.3704	0.35
7	0.9327	0.8706	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470	0.5132	0.4817	0.4523	0.4251	0.3996	0.3759	0.3538	0.3332	0.3139	0.29
8	0.9235	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019	0.4665	0.4339	0.4039	0.3762	0.3506	0.3269	0.3050	0.2848	0.2660	0.24
9	0.9143	0.8368	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604	0.4241	0.3909	0.3606	0.3329	0.3075	0.2843	0.2630	0.2434	0.2255	0.20
10	0.9053	0.8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224	0.3855	0.3522	0.3220	0.2946	0.2697	0.2472	0.2267	0.2080	0.1911	0.17
11	0.8963	0.8043	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751	0.4289	0.3875	0.3505	0.3173	0.2875	0.2607	0.2366	0.2149	0.1954	0.1778	0.1619	0.14
12	0.8874	0.7885	0.7014	0.6246	0.5568	0.4970	0.4440	0.3971	0.3555	0.3186	0.2858	0.2567	0.2307	0.2076	0.1869	0.1685	0.1520	0.1372	0.12
13	0.8787	0.7730	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150	0.3677	0.3262	0.2897	0.2575	0.2292	0.2042	0.1821	0.1625	0.1452	0.1299	0.1163	0.10
14	0.8700	0.7579	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878	0.3405	0.2992	0.2633	0.2320	0.2046	0.1807	0.1597	0.1413	0.1252	0.1110	0.0985	0.08
15	0.8613	0.7430	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2745	0.2394	0.2090	0.1827	0.1599	0.1401	0.1229	0.1079	0.0949	0.0835	0.07
16	0.8528	0.7284	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387	0.2919	0.2519	0.2176	0.1883	0.1631	0.1415	0.1229	0.1069	0.0930	0.0811	0.0708	0.06
17	0.8444	0.7142	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166	0.2703	0.2311	0.1978	0.1696	0.1456	0.1252	0.1078	0.0929	0.0802	0.0693	0.0600	0.05
18	0.8360	0.7002	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959	0.2502	0.2120	0.1799	0.1528	0.1300	0.1108	0.0946	0.0808	0.0691	0.0592	0.0508	0.04
19	0.8277	0.6864	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765	0.2317	0.1945	0.1635	0.1377	0.1161	0.0981	0.0829	0.0703	0.0596	0.0506	0.0431	0.03
20	0.8195	0.6730	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1784	0.1486	0.1240	0.1037	0.0868	0.0728	0.0611	0.0514	0.0433	0.0365	0.03
21	0.8114	0.6598	0.5375	0.4388	0.3589	0.2942	0.2415	0.1987	0.1637	0.1351	0.1117	0.0926	0.0768	0.0638	0.0531	0.0443	0.0370	0.0309	0.02
22	0.8034	0.6468	0.5219	0.4220	0.3418	0.2775	0.2257	0.1839	0.1502	0.1228	0.1007	0.0826	0.0680	0.0560	0.0462	0.0382	0.0316	0.0262	0.02
23	0.7954	0.6342	0.5067	0.4057	0.3256	0.2618	0.2109	0.1703	0.1378	0.1117	0.0907	0.0738	0.0601	0.0491	0.0402	0.0329	0.0270	0.0222	0.01
24	0.7876	0.6217	0.4919	0.3901	0.3101	0.2470	0.1971	0.1577	0.1264	0.1015	0.0817	0.0659	0.0532	0.0431	0.0349	0.0284	0.0231	0.0188	0.01
25	0.7798	0.6095	0.4776	0.3751	0.2953	0.2330	0.1842	0.1460	0.1160	0.0923	0.0736	0.0588	0.0471	0.0378	0.0304	0.0245	0.0197	0.0160	0.01
30	0.7419	0.5521	0.4120	0.3083	0.2314	0.1741	0.1314	0.0994	0.0754	0.0573	0.0437	0.0334	0.0256	0.0196	0.0151	0.0116	0.0090	0.0070	0.00
35	0.7059	0.5000	0.3554	0.2534	0.1813	0.1301	0.0937	0.0676	0.0490	0.0356	0.0259	0.0189	0.0139	0.0102	0.0075	0.0055	0.0041	0.0030	0.00
40	0.6717	0.4529	0.3066	0.2083	0.1420	0.0972	0.0668	0.0460	0.0318	0.0221	0.0154	0.0107	0.0075	0.0053	0.0037	0.0026	0.0019	0.0013	0.00
45	0.6391	0.4102	0.2644	0.1712	0.1113	0.0727	0.0476	0.0313	0.0207	0.0137	0.0091	0.0061	0.0041	0.0027	0.0019	0.0013	0.0009	0.0006	0.00

PV-Single Payment / Frequent Compounding / PV-SinglePayment / Frequent Discounting / PV-Annuity / PV-Annuity / NPV-IRR

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.4: ***Σχέση Μελλοντικής Αξίας Επένδυσης και Συχνότητας Ανατοκισμού***



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.5: ***Σχέση Μελλοντικής Αξίας Επένδυσης και Προεξοφλητικής Περιόδου***



13.1.3.2 Προεξόφληση συχνότερη από μία φορά το έτος, διακριτή (Frequent discounting, discrete)

Εάν το ονομαστικό επιτόκιο (r) χρησιμοποιείται για προεξόφληση μ φορές στη διάρκεια του έτους, αφού η μελλοντική αξία του ποσού ΠΑ είναι $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu}$, η Παρούσα Αξία του είναι:

$$\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΜΑ}}{\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu}}$$

13.1.3.3 Διαρκής (συνεχής) προεξόφληση (Continuous discounting)

Διαρκής (Συνεχής) προεξόφληση σημαίνει ότι $\mu \to \infty$, στον παραπάνω τύπο. Επομένως,

$$\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΜΑ}}{e^{r\nu}}$$

Παραδείγματα:

1. Η ΠΑ ποσού € 125, λαμβανόμενου σε 2 έτη με εξαμηνιαία προεξόφληση και ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης 10%, είναι:

$$\text{ΠΑ} = \frac{125}{\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{2\times2}} = 102,84\,€$$

2. Η ΠΑ ποσού € 125, λαμβανόμενου σε 2 έτη με διαρκή προεξόφληση και ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης 10%, είναι:

$$\text{ΠΑ} = \frac{125}{e^{0,1\times2}} = 102,34\,€$$

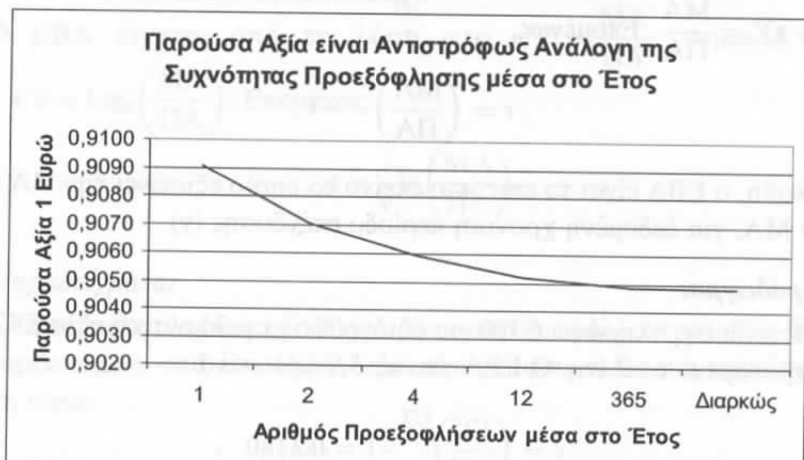
Συμπεράσματα:

• Χρηματικό ποσό προεξοφλούμενο με επιτόκιο συχνότερα από μία φορά κατά τη διάρκεια του έτους, αντιστοιχεί σε ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο υψηλότερου του ονομαστικού σε ετήσια βάση.

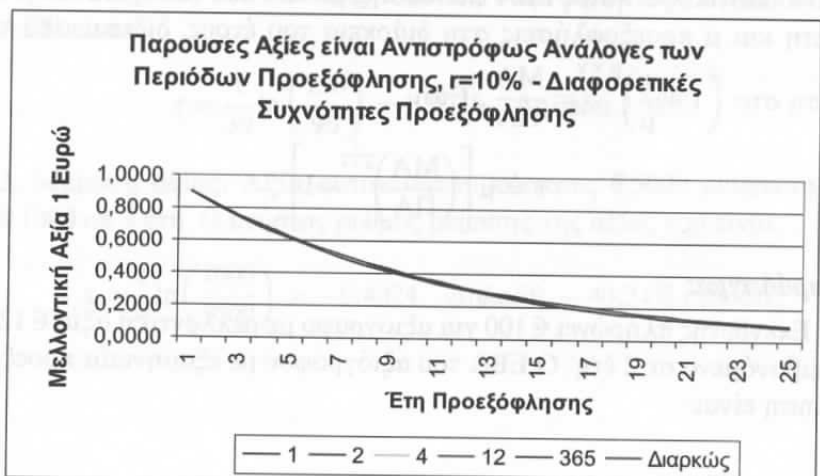
• Η παρούσα αξία ποσού είναι αντιστρόφως ανάλογη της συχνότητας προεξόφλησης κατά τη διάρκεια του έτους. Επίσης, η ΠΑ είναι αντιστρόφως ανάλογη του επιτοκίου και της τοκοφόρου περιόδου. Η μείωση είναι εκθετική σε σχέση με τη συχνότητα. Η εκθετικά φθίνουσα

σχέση ΠΑ και συχνότητας ανατοκισμού, κατά τη διάρκεια του έτους, παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 13.6.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.6: ***Σχέση Παρούσας Αξίας Επένδυσης και Συχνότητας Αναγωγής***



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 13.7: ***Σχέση Παρούσας Αξίας Επένδυσης και Περιόδων Προεξόφλησης***



13.1.4 Προβλήματα εσωτερικού βαθμού απόδοσης (Internal rate of return)

Αφού η $ΜΑ = ΠΑ(1+r)^ν$, ο ***εσωτερικός βαθμός απόδοσης, ΕΒΑ (Internal rate of return)*** αξιόγραφου με τρέχουσα τιμή ΠΑ, και μελλοντική αξία ΜΑ, σε ν περιόδους στο μέλλον, δίδεται από τη λύση του $(1+r)^ν = \frac{ΜΑ}{ΠΑ}$. Επομένως,

$$r = \left(\frac{ΜΑ}{ΠΑ}\right)^{1/ν} - 1$$

Δηλαδή, ο ΕΒΑ είναι το επιτόκιο εκείνο το οποίο εξισώνει την ΠΑ με την ΜΑ, για δεδομένη χρονική περίοδο επένδυσης (ν).

Παράδειγμα:

Επενδυτής πληρώνει € 100 για αξιόγραφο με μελλοντική αξία € 125, λαμβανόμενο σε 2 έτη. Ο ΕΒΑ του αξιόγραφου είναι:

$$r = \left(\frac{125}{100}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}1180$$

13.1.4.1 ΕΒΑ: Προεξοφλήσεις συχνότερες από μια φορά στο έτος (Frequent discounting)

Ο ονομαστικός ετήσιος ΕΒΑ επένδυσης, με ΠΑ που υπόσχεται ΜΑ σε ν έτη και μ προεξοφλήσεις στη διάρκεια του έτους, δίδεται από τη λύση στο $\left(1+\frac{r}{μ}\right)^{μ\times ν} = \frac{ΜΑ}{ΠΑ}$. Έτσι,

$$r = μ\left[\left(\frac{ΜΑ}{ΠΑ}\right)^{\frac{1}{μ\times ν}} - 1\right]$$

Παράδειγμα:

Επενδυτής πληρώνει € 100 για αξιόγραφο με μελλοντική αξία € 125, λαμβανόμενο σε 2 έτη. Ο ΕΒΑ του αξιόγραφου με εξαμηνιαία προεξόφληση είναι:

$$r = 2\left[\left(\frac{125}{100}\right)^{\frac{1}{2\times 2}} - 1\right] = 0{,}1147 \quad \text{Δηλαδή} \quad r \approx 11\frac{1}{2}\%$$

13.1.4.2 ΕΒΑ: Διαρκώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο (Continuous compounding)

Ο ΕΒΑ δίνεται από τη λύση στο $e^{r\times ν} = \frac{ΜΑ}{ΠΑ}$. Δηλαδή στο $r\times ν = \log_e\left(\frac{ΜΑ}{ΠΑ}\right)$. Επομένως:

$$r = \frac{1}{ν}\ln\left(\frac{ΜΑ}{ΠΑ}\right)$$

Παραδείγματα:

1. Επενδυτής πληρώνει € 100 για αξιόγραφο με μελλοντική αξία € 125, λαμβανόμενο σε 2 έτη. Ο ΕΒΑ του αξιόγραφου με διαρκή προεξόφληση είναι:

$$r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{125}{100}\right) = 0{,}1116 \quad \text{Δηλαδή } 11{,}16\%$$

2. Εκθετική αύξηση: Ας υποθέσουμε ότι το ακαθάριστο εθνικό προϊόν (ΑΕΠ) αυξήθηκε σε πραγματικές τιμές από € 96 δις το 1970 σε € 196 δις το 2000. Ως αποτέλεσμα, ο μέσος ετήσιος ρυθμός αύξησης του ΑΕΠ είναι:

$$r = \frac{1}{30}\ln\left(\frac{196}{96}\right) = 0{,}0238 \quad \text{Δηλαδή } 2{,}38\%$$

3. Μείωση αξίας: Αξία αυτοκινήτου κόστους € 5000 μειώνεται σε € 1000 σε 4 έτη. Ο ετήσιος ρυθμός μείωσης της αξίας του είναι:

$$r = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1000}{5000}\right) = -0{,}4024 \quad \text{Δηλαδή } -40{,}24\% \text{ ετησίως}$$

13.2 Προβλήματα ραντών (Πολλαπλών επενδύσεων) (Multiple payment problems)

13.2.1 Εισαγωγή

Το μέρος αυτό του κεφαλαίου εξετάζει τα ακόλουθα είδη προβλημάτων, που έχουν σχέση με προβλήματα επενδύσεων πέραν του ενός αρχικού ποσού. Αυτά αφορούν προβλήματα ραντών. Διακρίνονται σε:

1) *Πρόβλημα μελλοντικής / Τελικής αξίας – Μη σταθερές ράντες (Ανισόποσες ροές)*: Ζητούμενο το ΜΑ, δεδομένων των C_i, r, ν.
2) *Πρόβλημα παρούσας αξίας (ή Αποτίμησης αξιόγραφων)*: Ζητούμενο το ΠΑ, δεδομένων των C_i, r, ν.
3) *Προβλήματα βαθμού απόδοσης:*
   A. *Μέσος βαθμός απόδοσης – Money weighted rate of return (MWRR)*: Ζητούμενο το r, δεδομένων των C_i, ν και ΜΑ.
   B. Εσωτερικός βαθμός απόδοσης (ΕΒΑ) – Internal rate of return, «yield»: Ζητούμενο το r, δεδομένων των C_i, ν, ΠΑ.
4) *Προβλήματα σταθερής ράντας (Ισόποσων ροών) – Annuity size problems:* Ζητούμενο το C (όρος), δεδομένων των r, ν, ΜΑ ή ΠΑ.
5) *Προβλήματα χρονικής περιόδου – Time period problems:*
   A. Απαιτούμενος χρόνος για επίτευξη στόχου ΜΑ.
   B. Περίοδος αποπληρωμής: Απαιτούμενος χρόνος επίτευξης του ΠΑ.

Ειδικές περιπτώσεις:

A. *Μη σταθερές ράντες* – Δηλαδή, ανισόποσες ροές – Irregular payments.
B. *Σταθερές ράντες* – Δηλαδή, ισόποσες ροές – Regular payments.
   i. Στο διηνεκές – Infinite horizon (*Perpetuities*).
   ii. *Πρόσκαιρες ράντες* (πεπερασμένες) – Finite horizon (*Annuities*).

Συμβολισμοί: C_i = Ταμειακές ροές στο τέλος της περιόδου i.

13.2.2 Τελική αξία – Μη σταθερές ράντες (Ανισόποσες ταμειακές ροές) – (Compound amount, Irregular payments)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε όχι μία, αλλά C_i ταμειακές ροές, $i = 1, \ldots, \nu$, σε λογαριασμό ταμιευτηρίου (savings fund) για μία χρονική περίοδο, όπου οι ταμειακές ροές πραγματοποιούνται στο τέλος κάθε περιόδου. Πρόκειται για μια ***ληξιπρόθεσμη μη σταθερή ράντα***. Τότε

Η πρώτη ροή C_1 τοκίζεται για $\nu - 1$ περίοδους
Η δεύτερη ροή C_2 τοκίζεται για $\nu - 2$ περίοδους
⋮
Η ν ροή C_ν τοκίζεται για $\nu - \nu$ περίοδους

Επομένως:

$$MA = C_1(1+r)^{\nu-1} + C_2(1+r)^{\nu-2} + \ldots + C_\nu$$

$$MA = \sum_{i=1}^{\nu} C_i(1+r)^{\nu-i}$$

Παράδειγμα:

Συνταξιοδοτικό πρόγραμμα (pension fund) αναμένει την ακόλουθη ταμειακή ροή στο τέλος των 3 πρώτων ετών ύπαρξής του:

Ετος	**Ποσό (€ εκ)**
1	100
2	50
3	75

Η αναμενόμενη απόδοση σε επενδύσεις είναι 10%. Ποιά θα είναι η αξία του προγράμματος στο τέλος της περιόδου;

$$MA = 100(1+0{,}1)^{3-1} + 50(1+0{,}1)^{3-2} + 75(1+0{,}1)^{3-3}$$

Επομένως, ΜΑ = 121 + 55 + 75 = €251 εκ

13.2.3 Προβλήματα παρούσας αξίας (Present value problems)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε C_i ταμειακές ροές, στις χρονικές περιόδους $i = 1, \ldots, \nu$, στο μέλλον και θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία τους την περίοδο 0. Τότε την περίοδο 0:

ΠΑ του C_1 είναι $\dfrac{C_1}{(1+r)}$

ΠΑ του C_2 είναι $\dfrac{C_2}{(1+r)^2}$

$\vdots \qquad \vdots$

ΠΑ του C_ν είναι $\dfrac{C_\nu}{(1+r)^\nu}$

Επομένως:

$$\text{ΠΑ} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{C_i}{(1+r)i}$$

Συμπεράσματα: Η παρούσα αξία (τιμή) της επένδυσης είναι:
- ανάλογη του μεγέθους των μελλοντικών ταμειακών ροών (C_i),
- αντιστρόφως ανάλογη του επιτοκίου προεξόφλησης (r).

Παράδειγμα:

Προσφέρεται σε επενδυτή η δυνατότητα να πληρώσει €200 σε αντάλλαγμα της ακόλουθης ταμειακής ροής

Ετος	Ποσό (€ εκ)
1	100
2	50
3	75

Εάν οι εναλλακτικές επενδύσεις έχουν 10% απόδοση, συμφέρει η προσφορά;

ΠΑ των ταμειακών ροών:

$$\text{ΠΑ} = \frac{100}{(1+0{,}1)} + \frac{50}{(1+0{,}1)^2} + \frac{75}{(1+0{,}1)^3}$$

$$= 90{,}9 + 41{,}3 + 56{,}3 = €\,188{,}5$$

Το ποσό αυτό είναι μικρότερο των €200. Επομένως, η πρόταση δε συμφέρει τον επενδυτή.

Γενικά, για να ληφθεί η απόφαση αποδοχής ή μη επιχειρηματικού σχεδίου, η παρούσα αξία των καθαρών ταμειακών ροών της επένδυσης συγκρίνεται με το κεφάλαιο (την επένδυση), που απαιτείται σήμερα για την απόκτηση των μελλοντικών ροών. Όταν η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη του κεφαλαίου, η επένδυση γίνεται αποδεκτή.

13.2.4 Προβλήματα βαθμού απόδοσης (Rate of return problems)

13.2.4.1 Βαθμός απόδοσης (Money weighted rate of return – MWRR)

Ο MWRR ορίζεται ως το μοναδικό εκείνο επιτόκιο το οποίο, όταν χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τελικής αξίας μιας σειράς ταμειακών ροών, δίνει μία συγκεκριμένη τελική αξία.

Παράδειγμα:

Το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα του προηγούμενου παραδείγματος εκτιμάται σε €300 εκ στο τέλος των 3 ετών. Τι MWRR πέτυχε;

Απάντηση:

r είναι η λύση στο

$$300 = 100(1+r)^2 + 50(1+r) + 75$$

Επομένως, r = 0,27 (δηλ. 27% ετησίως)

13.2.4.2 Εσωτερικός βαθμός απόδοσης (ΕΒΑ) – («yield»)

Ο ΕΒΑ είναι το μοναδικό εκείνο επιτόκιο, το οποίο όταν χρησιμοποιηθεί για προεξόφληση μια σειράς ταμειακών ροών, δίνει μία συγκεκριμένη παρούσα αξία.

Παράδειγμα:

Επενδυτής πληρώνει € 200 για ταμειακές ροές € 100, € 50, € 75 σε 3 συνεχόμενα έτη. Τι ΕΒΑ πέτυχε;

Με τη ***μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων (trial and error)***, r είναι η λύση στο

$$200 = \frac{100}{(1+r)} + \frac{50}{(1+r)^2} + \frac{75}{(1+r)^3}$$

Επομένως, r = 0,065 δηλαδή 6,5%

Στο παραπάνω παράδειγμα η συνάρτηση είναι τρίτου βαθμού και οι χρηματοροές σχετικά «εύκολα» νούμερα. Όμως για προβλήματα υπολογισμού του ΕΒΑ με περισσότερες περιόδους απαιτείται χρήση Η/Υ στην επίλυση των προβλημάτων.

Το φύλλο εργασίας του ***Excel*** μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του ΕΒΑ. Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε το σχεδιασμό της λύσης του προβλήματος στην περιοχή A1 με F3 του φύλλου εργασίας. Στο χώρο B2:E2 τοποθετούνται οι χρονικές περίοδοι 0, 1, 2 και 3, ενώ στην περιοχή B3:E3 εισάγουμε τις χρηματοροές, -200, 100, 50, 75. Στο κελί F3 χρησιμοποιείται ο τύπος = IRR(B3 : E3), ο οποίος υπολογίζει τον ΕΒΑ σε 6,52%. Εάν δεν γνωρίζουμε ή δεν θυμόμαστε τον τύπο, τότε αυτός βρίσκεται μέσω των ακόλουθων βημάτων στο Excel: «Insert», «Function», «Financial Functions», IRR

13.2.5 Σταθερές ράντες (Ισόποσες ταμειακές ροές) στο διηνεκές (Regular payments – Perpetuities)

Επένδυση δίνει ταμειακές ροές C σε κάθε περίοδο στο διηνεκές. Η σειρά αυτή των χρηματοροών της επένδυσης ονομάζεται ***σταθερή ράντα στο διηνεκές (άπειρο) – perpetuity***.

Η τελική αξία ράντας στο διηνεκές είναι άπειρη. Η παρούσα αξία (ΠΑ) και ο ΕΒΑ όμως είναι πεπερασμένα (συγκεκριμένα) ποσά.

$$\Pi A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^i}$$

Γεωμετρικές πρόοδοι – στο διηνεκές (άπειρο)

Μία σειρά (πρόοδος) της μορφής a, ad, ad^2, ad^3, ... $(0 < d < 1)$ έχουμε δει ότι ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος. Το άθροισμα των όρων της είναι:

$$a + ad + ad^2 + ad^3 + \ldots$$

και μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\Pi A = \frac{a}{1-d}$$

όπου a = 1ος όρος και d = λόγος.

13.2.5.1 Παρούσα αξία σταθερής ράντας στο διηνεκές

Ας υποθέσουμε ότι ράντα στο διηνεκές δίνει ταμειακές ροές ***(τοκομερίδια – coupon payments)*** C σε κάθε περίοδο, ξεκινώντας από την περίοδο 1. Τότε

$$\Pi A = C\frac{1}{(1+r)} + C\frac{1}{(1+r)^2} + C\frac{1}{(1+r)^3} + \ldots$$

$$= Cd + Cd^2 + Cd^3 + \ldots = C(d + d^2 + d^3 + \ldots)$$

$$= C\frac{d}{1-d}$$

όπου $d = \frac{1}{1+r}$ αποτελεί το συντελεστή προεξόφλησης.

Αντικαθιστώντας ως προς το d, βρίσκουμε ότι:

$$\Pi A = \frac{C}{r}$$

Παράδειγμα:

Η Βρετανική κυβερνητική ομολογία («Gilt-Edged Stock»), $3\frac{1}{2}\%$ δάνειο πολέμου, δίνει ***τοκομερίδιο (coupon payment)*** (C) αξίας € 1, 75, δύο φορές το χρόνο για κάθε € 100 ονομαστικής αξίας της ομολογίας.

Ποια είναι η τιμή της ομολογίας στις 14 Οκτωβρίου 2002, αν τα μακροχρόνια επιτόκια είναι 10%;

$$\Pi A = \frac{1{,}75}{0{,}05} = 35\,€$$

Αν η τιμή της ομολογίας είναι € 30, ποιός είναι ο εσωτερικός βαθμός απόδοσής (ΕΒΑ) της;

$$r = \frac{1{,}75}{30} = 0{,}0583 \quad (\text{δηλ. } 11{,}67\% \text{ ανά έτος})$$

13.2.5.2 Πρόσκαιρες σταθερές ράντες – Ισόποσες ροές στο πεπερασμένο μέλλον (Annuities)

Ένα αξιόγραφο το οποίο δίνει ταμειακές ροές C ανά περίοδο για ένα σταθερό αριθμό περιόδων (ν), ονομάζεται ***πρόσκαιρη/πεπερασμένη σταθερή ράντα (annuity)***. Για μια ράντα η μελλοντική αξία και η παρούσα αξία της είναι πεπερασμένη, όπου C είναι το ***τοκοχρεωλύσιο (μέγεθος ή ποσό ή όρος)*** της ράντας. Το τοκοχρεωλύσιο περιλαμβάνει την πληρωμή των τόκων και την αποπληρωμή του κεφαλαίου (το χρεωλύσιο).

Γεωμετρικές πρόοδοι (ΓΠ) – Διακριτές

Η σειρά $a, ad^2, ad^3, \ldots, ad^\nu$ ονομάζεται διακριτή γεωμετρική πρόοδος. Το άθροισμά της είναι ισοδύναμο με το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου, που ξεκινά από το a, στο άπειρο μείον το άθροισμα της διακριτής της γεωμετρικής προόδου που ξεκινά από το $d^{\nu+1}$:

$$\Pi A = \frac{a}{1-d} - \frac{ad^{\nu+1}}{1-d}. \text{ Επομένως, } \Pi A = \frac{a(1-d^{\nu+1})}{1-d}$$

13.2.5.2.1 Παρούσα αξία πρόσκαιρης σταθερής ράντας

Για μια ράντα που ξεκινά την περίοδο 1,

$$\Pi A = \sum_{i=1}^{\nu-1} Cd^i$$

όπου d = συντελεστής προεξόφλησης, $d = \frac{1}{(1+r)}$. Τότε:

$$\Pi A = \frac{Cd(1-d^\nu)}{1-d}$$

ή

$$\Pi A = C\left[\frac{(1+r)^\nu - 1}{r(1+r)^\nu}\right] = C\left[\frac{1 - 1/(1+r)^\nu}{r}\right]$$

Ο όρος εντός της αγκύλης είναι ο ***συντελεστής παρούσας αξίας (Series present worth factor ή annuity certain)***. Είναι ο συντελεστής ο οποίος πολλαπλασιάζει το τοκοχρεωλύσιο (C) κατά τον υπολογισμό της ΠΑ. Υπάρχουν ειδικοί πίνακες που παρουσιάζουν τους συντελεστές αυτούς προς διευκόλυνσή μας.

Το ***Excel*** έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία του πίνακα συντελεστών παρούσας αξίας (ΣΠΑ), που παρουσιάζεται στον Πίνακα 13.5. Στη σειρά 4 του φύλλου εργασίας ορίζονται τα επιτόκια, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί B4, ενώ στη στήλη A ορίζεται η τοκοφόρος περίοδος, ξεκινώντας από την τιμή 1 στο κελί A5. Στο κελί B5 ορίζουμε τον τύπο του ΣΠΑ ως =PV(B$4/100,$A5,-1). Αυτός εμφανίζεται, όταν επιλέξουμε «Insert», «Function», «Financial Function», «PV», οπότε εμφανίζεται το κουτί διαλόγου που φαίνεται στον πίνακα 13.5. Σ' αυτό, επιλέγουμε ως εισόδους τα επιτόκια στο κελί B4, την περίοδο ανατοκισμού στο κελί A5 και το τοκοχρεωλύσιο το οποίο ορίζουμε ως 1 σε κάθε περίοδο, αφού αφορά επένδυση € 1. Επομένως η ΠΑ της ράντας για r = 1, ν = 1, C = −1 είναι 0,9901. Αντιγράφοντας τον τύπο οριζοντίως και καθέτως στα υπόλοιπα κελιά του πίνακα υπολογίζονται όλοι οι ΣΠΑ για τους συνδυασμούς r και ν που έχουμε θέσει. Έτσι, στο κελί K2 του φύλλου εργασίας παρουσιάζεται ο ΣΠΑ για το συνδυασμό r = 10, ν = 10, η τιμή του οποίου είναι 6,1446. Δηλαδή, ΣΑ(r = 10, ν = 10) = 6,1446

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.5: ***Συντελεστές Παρούσας Αξίας Πρόσκαιρης Σταθερής Ράντας, ως συνάρτηση του Ύψους των Επιτοκίων (r) και της Τοκοφόρου Περιόδου (ν)***

Παράδειγμα:

Ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα προσφέρει € 1000 ανά έτος για 10 χρόνια ή το συνολικό ποσό των € 6500 αμέσως. Ποιο είναι προτιμότερο, δεδομένου ότι r = 10%;

Η ΠΑ της ράντας είναι:

$$\Pi A = 1000\left\{\frac{(1+0{,}1)^{10}-1}{0{,}1(1{,}1)^{10}}\right\} = 1000 \times 6{,}1446 = 6144{,}6\,€$$

Συμπέρασμα: Το συνολικό ποσό είναι προτιμητέο.

Χρησιμοποιώντας το συντελεστή ΣΠΑ = 6,1446 από τον πίνακα που δημιουργήσαμε στο ***Excel***, πολλαπλασιάζουμε το C = € 1000 με το 6,1446 και έχουμε την απάντηση. Εναλλακτικά, εάν χρησιμοποιούμε όπου Pmt, –1000 στο κουτί διαλόγου του Excel που βλέπουμε στον πίνακα 13.5, λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Στο παράρτημα του κεφαλαίου παρουσιάζουμε και αυτήν την επιλογή στα κελιά A6:E7 του φύλλου εργασίας. Στο κελί A7 τοποθετείται η τιμή του C = 1000, στο B7 η τιμή του r = 10%, στο C7 η τιμή του ν = 10, ενώ στο κελί E7 χρησιμοποιούνται τα προηγούμενα ως είσοδοι στον τύπο υπολογισμού της ΠΑ που παρουσιάζονται στο κελί G7

13.2.5.2.2 Μελλοντική αξία σταθερής πρόσκαιρης ράντας

Η μελλοντική αξία μιας ράντας μπορεί να προσδιοριστεί ως η τελική αξία της παρούσας αξίας της. Δηλαδή

$$MA = \Pi A(1+r)^{\nu}$$

$$MA = C\left[\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r}\right]$$

Η όρος ανάμεσα στις αγκύλες είναι ο ***συντελεστής μελλοντικής αξίας της ράντας (Series compound amount factor ή annuity sum).***

Για άλλη μια φορά χρησιμοποιείται το ***Excel*** για την κατασκευή του πίνακα συντελεστών μελλοντικής αξίας (ΣΜΑ), που βλέπουμε στον πίνακα 13.6. Η διαδικασία που ακολουθείται κατά την κατασκευή του πίνακα είναι ανάλογη των ΣΠΑ. Η κατάλληλη συνάρτηση βρίσκεται πάλι στην ομάδα συναρτήσεων Financial Functions του φύλλου εργασίας του Excel, και είναι: =FV(B$4/100,$A5,-1). Οι τιμές των ΣΜΑ, από πίνακες αυτού του είδους, χρησιμοποιούνται στη λύση προβλημάτων που αφορούν τον υπολογισμό των ΜΑ, πολλαπλασιάζοντας το C με τον κατάλληλο ΣΜΑ

Παράδειγμα:

Πληρώνουμε € 50 ανά μήνα σε συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για 15 χρόνια. Τι συνολικό ποσό θα συγκεντρωθεί στο τέλος, αν το κεφάλαιο επιτυγχάνει απόδοση επένδυσης ίση με 12%;

$$MA = 50\left[\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{180}-1}{\frac{0{,}12}{12}}\right] = 24.979{,}01\ €$$

Σημειώνεται ότι η τιμή του ν είναι 12 μήνες επί 15 έτη = 180 περίοδοι. Αυτό χρησιμοποιείται ως ν στον παραπάνω τύπο. Επίσης το επιτόκιο της περιόδου που χρησιμοποιείται είναι το μηνιαίο επιτόκιο 0,12/12 = 0,01, καθώς η περίοδος αναφοράς είναι σε μήνες.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες ΣΜΑ για την εύρεση της τιμής του ΣΜΑ για ν = 180, r = 0,01, και να πολλαπλασιάσουμε το C = 50 με αυτήν την τιμή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.6: ***Συντελεστές Μελλοντικής Αξίας Πρόσκαιρης Σταθερής Ράντας, ως συνάρτηση του Ύψους των Επιτοκίων (r) και της Τοκοφόρου Περιόδου (ν)***

Πίνακας Συντελεστών Μελλοντικής Αξίας Σταθερής Ράντας

Μελλοντική Αξία Σειράς Πληρωμών 1 Ευρώ κάθε περίοδο λαμβανομένων στο τέλος ν περιόδων: ΜΑ=(((1+r)^ν)-1)/r

Περίοδος, ν	Επιτόκιο, r% 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0200	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700	2.0800	2.0900	2.1000	2.1100	2.1200	2.1300	2.1400	2.1500	2.1600	2.1700
3	3.0301	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149	3.2464	3.2781	3.3100	3.3421	3.3744	3.4069	3.4396	3.4725	3.5056	3.5389
4	4.0604	4.1216	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399	4.5061	4.5731	4.6410	4.7097	4.7793	4.8498	4.9211	4.9934	5.0665	5.1405
5	5.1010	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507	5.8666	5.9847	6.1051	6.2278	6.3528	6.4803	6.6101	6.7424	6.8771	7.0144
6	6.1520	6.3081	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533	7.3359	7.5233	7.7156	7.9129	8.1152	8.3227	8.5355	8.7537	8.9775	9.2068
7	7.2135	7.4343	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540	8.9228	9.2004	9.4872	9.7833	10.0890	10.4047	10.7305	11.0668	11.4139	11.7720
8	8.2857	8.5830	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598	10.6366	11.0285	11.4359	11.8594	12.2997	12.7573	13.2328	13.7268	14.2401	14.7733
9	9.3685	9.7546	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780	12.4876	13.0210	13.5795	14.1640	14.7757	15.4157	16.0853	16.7858	17.5185	18.2847
10	10.4622	10.9497	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164	14.4866	15.1929	15.9374	16.7220	17.5487	18.4197	19.3373	20.3037	21.3215	22.3931
11	11.5668	12.1687	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836	16.6455	17.5603	18.5312	19.5614	20.6546	21.8143	23.0445	24.3493	25.7329	27.1999
12	12.6825	13.4121	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885	18.9771	20.1407	21.3843	22.7132	24.1331	25.6502	27.2707	29.0017	30.8502	32.8239
13	13.8093	14.6803	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406	21.4953	22.9534	24.5227	26.2116	28.0291	29.9847	32.0887	34.3519	36.7862	39.4040
14	14.9474	15.9739	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505	24.2149	26.0192	27.9750	30.0949	32.3926	34.8827	37.5811	40.5047	43.6720	47.1027
15	16.0969	17.2934	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290	27.1521	29.3609	31.7725	34.4054	37.2797	40.4175	43.8424	47.5804	51.6595	56.1101
16	17.2579	18.6393	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881	30.3243	33.0034	35.9497	39.1899	42.7533	46.6717	50.9804	55.7175	60.9250	66.6488
17	18.4304	20.0121	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402	33.7502	36.9737	40.5447	44.5008	48.8837	53.7391	59.1176	65.0751	71.6730	78.9792
18	19.6147	21.4123	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990	37.4502	41.3013	45.5992	50.3959	55.7497	61.7251	68.3941	75.8364	84.1407	93.4056
19	20.8109	22.8406	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790	41.4463	46.0185	51.1591	56.9395	63.4397	70.7494	78.9692	88.2118	98.6032	110.2846
20	22.0190	24.2974	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955	45.7620	51.1601	57.2750	64.2028	72.0524	80.9468	91.0249	102.4436	115.3797	130.0329
21	23.2392	25.7833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927	44.8652	50.4229	56.7645	64.0025	72.2651	81.6987	92.4699	104.7684	118.8101	134.8405	153.1385
22	24.4716	27.2990	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923	49.0057	55.4568	62.8733	71.4027	81.2143	92.5026	105.4910	120.4360	137.6316	157.4150	180.1721
23	25.7163	28.8450	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361	60.8933	69.5319	79.5430	91.1479	104.6029	120.2048	138.2970	159.2764	183.6014	211.8013
24	26.9735	30.4219	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767	66.7648	76.7898	88.4973	102.1742	118.1552	136.8315	158.6586	184.1678	213.9776	248.8076
25	28.2432	32.0303	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490	73.1059	84.7009	98.3471	114.4133	133.3339	155.6196	181.8708	212.7930	249.2140	292.1049
30	34.7849	40.5681	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582	94.4608	113.2832	136.3075	164.4940	199.0209	241.3327	293.1992	356.7868	434.7451	530.3117	647.4391
35	41.6603	49.9945	60.4621	73.6522	90.3203	111.4348	138.2369	172.3168	215.7108	271.0244	341.5896	431.6635	546.6808	693.5727	881.1702	1120.7130	1426.4910
40	48.8864	60.4020	75.4013	95.0255	120.7998	154.7620	199.6351	259.0565	337.8824	442.5926	581.8261	767.0914	1013.7042	1342.0251	1779.0903	2360.7572	3134.5218
45	56.4811	71.8927	92.7199	121.0294	159.7002	212.7435	285.7493	386.5056	525.8587	718.9048	986.6386	1358.2300	1874.1646	2590.5648	3585.1285	4965.2739	6879.2907

Η απευθείας χρήση του ***Excel*** για τον υπολογισμό της ΜΑ αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση. Στην περιοχή A8 με D8 του φύλλου εργασίας του **Excel**, που φαίνεται στο παράρτημα του κεφαλαίου, επιλύεται το πρόβλημα. Χρησιμοποιείται ο τύπος *=FV(B8,C8,A8)* στο κελί D8, με εισόδους τα δεδομένα των κελιών B8, C8 και A8. Δηλαδή τα −50, 0,12/12 και 12 ∗ 15. Το αποτέλεσμα 24979,01 είναι στο κελί D8

13.2.5.2.3 Τοκοχρεωλύσια και βαθμός απόδοσης κεφαλαίου

Το ***τοκοχρεωλύσιο (C)*** μίας Ράντας και ο ***ΕΒΑ (r) (amortisation rate)***, που απαιτούνται για την επίτευξη προκαθορισμένης παρούσας ή μελλοντικής αξίας, μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο της παρούσας αξίας ή τον τύπο της μελλοντικής αξίας που ορίσθηκαν παραπάνω. Ας δούμε τα προβλήματα αυτά με μερικά παραδείγματα.

Παραδείγματα:

1. Υποθήκες (Mortgages)

Στεγαστικό δάνειο αξίας € 30.000 πρέπει να αποπληρωθεί με ισόποσες μηνιαίες δόσεις σε 15 χρόνια με 10% επιτόκιο. Πόσο θα πρέπει να είναι το μέγεθος της κάθε τοκοχρεωλυτικής δόσης;

Λύνοντας τον τύπο της ΠΑ ως προς C δίνει:

$$C = 30.000\left[\frac{\frac{0{,}1}{12}\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{180}}{\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{180}-1}\right] = 322{,}38\ €$$

Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε τη λύση με χρήση του ***Excel*** στην περιοχή A9 με E9. Ο σωστός τύπος για τον υπολογισμό του τοκοχρεωλυσίου, όπως στην παραπάνω λύση, εισάγεται στο κελί A9 και είναι = PMT(B9, C9, E9)

2. Αποταμιεύσεις (Savings)

Τι ποσό πρέπει να αποταμιεύεται κάθε μήνα για να εξασφαλιστεί το συνολικό ποσό των € 30.000 σε διάστημα 15 ετών, υποθέτοντας μέσο βαθμό απόδοσης (Money weighted rate of return – MWRR) ίσο με 10% των επενδυμένων κεφαλαίων;

Λύνοντας τον τύπο της ΜΑ ως προς C δίνει:

$$C = 30.000\left[\frac{\frac{0,1}{12}}{\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{180}-1}\right] = 72,38\,€$$

Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε τη λύση μέσω του **Excel** στην περιοχή A10 με E10. Ο τύπος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της δόσης, όπως στην παραπάνω λύση, εισάγεται στο κελί A10 και είναι = PMT(B10, C10, , D10)

3. Μέσος βαθμός απόδοσης (M.W.R.R.)

Συνδρομητής πληρώνει € 50 ανά μήνα για 10 χρόνια σε αντάλλαγμα για την υπόσχεση του συνολικού ποσού των € 11.500. Ποιο μέσο βαθμό απόδοσης πρέπει να επιτύχει το κεφάλαιο για να ικανοποιηθεί η ανωτέρω υπόσχεση;

Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων (successive approximation), χρησιμοποιώντας τον τύπο της ΜΑ, r = 12%.

Καθώς η λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρονοβόρα, η χρήση Η/Υ είναι απαραίτητη. Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε τη λύση μέσω του ***Excel*** στην περιοχή A11 με E11 του φύλλου εργασίας. Ο τύπος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της δόσης, εισάγεται στο κελί B11 και είναι =RATE(C11, A11, ,D11)*12. Αυτό επιβεβαιώνει τη λύση του 12% που βρήκαμε προηγουμένως

4. Ανάλυση χρονοδιαγράμματος αποπληρωμής δανείου

Κατά την αποπληρωμή δανείου ένα μέρος του τοκοχρεωλυσίου αφορά τους τόκους, και το υπόλοιπο, το χρεωλύσιο, χρησιμοποιείται για την αποπληρωμή του δανείου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε συνάψει καταναλωτικό δάνειο € 2000, για 3 έτη με ετήσιο επιτόκιο 12%. Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ***Excel*** για την ανάλυση του χρονοδιαγράμματος αποπληρωμής του δανείου. Τα δεδομένα και οι λύσεις φαίνονται στην περιοχή A13 με G22 του φύλλου εργασίας. Στη στήλη G παρουσιάζονται οι τύποι που χρησιμοποιούνται για τους υπολογισμούς των τοκοχρεωλυσίων, των τόκων και του υπόλοιπου κεφαλαίου (ξεκινώντας από τη σειρά 20 του φύλλου εργασίας για το τελευταίο). Τέλος, το χρεωλύσιο υπολογίζεται στη στήλη D ως τα δεδομένα των στηλών (B)-(C). Δηλαδή του τοκοχρεωλυσίου μείον των τόκων. Έτσι, στη στήλη B υπολογίζεται το τοκοχρεωλύσιο μέσω του γνωστού τύπου, τον οποίο δείχνουμε στο κελί G20. Βλέπουμε ότι η τοκοχρεωλυτική δόση κάθε περιόδου είναι σταθερή και ίση με € 832,70. Στη στήλη C υπολογίζεται ο τόκος κάθε περιόδου ως ποσοστό 12% του εναπομείναντος κεφαλαίου κάθε περιόδου, το οποίο βρίσκεται στη στήλη E. Οι τόκοι κατά την πρώτη περίοδο υπολογίζονται ως 12% του 2000 = 240. Έχοντας υπολογίσει το τοκοχρεωλύσιο και τους τόκους, υπολογίζεται το χρεωλύσιο ως η διαφορά 832,7 – 240 = 592,70 για την πρώτη περίοδο. Το εναπομένον κεφάλαιο της πρώτης περιόδου υπολογίζεται ως 2000 – 592,7 = 1407,30. Αντιγράφοντας το περιεχόμενο των κελιών B20 με E20 στο χώρο B21 με E22 συμπληρώνεται ο πίνακας. Παρατηρούμε ότι το τοκοχρεωλύσιο παραμένει σταθερό σε κάθε περίοδο, ενώ η κατανομή του σταθερού αυτού ποσού μεταξύ τόκων και χρεωλυσίου μεταβάλλεται διαχρονικά. Έτσι, οι τόκοι μειώνονται, ενώ το χρεωλύσιο αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε το τέλος ζωής του δανείου. Όπως φαίνεται στο κελί E22, το δάνειο έχει εξοφληθεί στο τέλος του τρίτου έτους

13.3 Περίληψη

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΑΣ (ΜΟΝΑΔΙΚΗΣ) ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ

Μελλοντική αξία (ΜΑ):

Απλό επιτόκιο: $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}(1 + \nu r)$

Σύνθετος ανατοκισμός: $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}(1 + r)^{\nu}$

Ανατοκισμός συχνότερα από μια φορά κατά τη διάρκεια του έτους:

$$\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu} \quad \text{δηλ. μν ροές των } \frac{r}{\mu}\%$$

Συνεχής ανατοκισμός: $\text{ΜΑ} = \text{ΠΑ}e^{r\times\nu}$

Ετησιοποιημένο επιτόκιο (i): $1 + i = \left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu}$

Παρούσα αξία (ΠΑ):

Σύνθετος ανατοκισμός: $\text{ΠΑ} = \dfrac{\text{ΜΑ}}{(1 + r)^{\nu}}$

Ανατοκισμός συχνότερα από μια φορά κατά τη διάρκεια του έτους:

$$\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΜΑ}}{\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu}}$$

Συνεχής ανατοκισμός: $\text{ΠΑ} = \dfrac{\text{ΜΑ}}{e^{r\times\nu}}$

Εσωτερικός βαθμός απόδοσης (ΕΒΑ):

Σύνθετος ανατοκισμός:

$$\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΜΑ}}{(1 + r)^{\nu}} \Rightarrow r = \left(\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΠΑ}}\right)^{1/\nu} - 1$$

Ανατοκισμός συχνότερα από μια φορά κατά τη διάρκεια του έτους:

$$\text{ΠΑ} = \text{ΜΑ}/\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu\times\nu} \Rightarrow r = \mu\left[\left(\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΠΑ}}\right)^{1/\nu\mu} - 1\right]$$

Συνεχής ανατοκισμός: $\text{ΠΑ} = \text{ΜΑ}/e^{r\times\nu} \Rightarrow r = \frac{1}{\nu}\ln\left(\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΠΑ}}\right)$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΑΝΤΩΝ (ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ)

Μη σταθερές ράντες (Ανισόποσες ταμειακές ροές)

1. *Μελλοντική αξία:* $\text{ΜΑ} = \sum_{i=1}^{\nu} C_i(1 + r)^{\nu-1}$

2. *Παρούσα αξία:* $\text{ΠΑ} = \sum_{i=1}^{\nu} \dfrac{C_i}{(1 + r)^{i}}$

3. *Βαθμός απόδοσης:*

Α. *Μέσος βαθμός απόδοσης (MWRR)* είναι το ύψος του απλού επιτοκίου, το οποίο όταν χρησιμοποιείται στον ανατοκισμό μιας σειράς πληρωμών, αποδίδει μια προκαθορισμένη *μελλοντική αξία*. Δηλαδή, λύνουμε το πρόβλημα 1 ως προς r.

Β. *Εσωτερικός βαθμός απόδοσης (ΕΒΑ) – (yield)*, είναι το απλό εκείνο επιτόκιο το οποίο, αν χρησιμοποιηθεί για την προεξόφληση μιας σειράς ταμειακών ροών, αποδίδει μια συγκεκριμένη *παρούσα αξία*. Δηλαδή, λύνουμε το πρόβλημα 2 ως προς r.

4. *Σταθερές ράντες (Ισόποσες ταμειακές ροές)*

Α. *Σταθερή ράντα στο διηνεκές (Perpetuity)* είναι περιουσιακό στοιχείο που πληρώνει ποσό C ανά περίοδο ΓΙΑ ΠΑΝΤΑ (στο διηνεκές). Το ΜΑ είναι άπειρο αλλά τα ΠΑ και r είναι πεπερασμένα μεγέθη. Έτσι,

$$\text{ΠΑ} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C}{(1 + r)^{i}} \Rightarrow \text{ΠΑ} = \frac{C}{r}$$

Β. *Πρόσκαιρη σταθερή ράντα (Annuity)*, είναι περιουσιακό στοιχείο, που πληρώνει ποσό C ανά περίοδο για ν (πεπερασμένο) αριθμό περιόδων. Τα ΜΑ, ΠΑ και r είναι πεπερασμένα.

$$\text{ΠΑ} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{C}{(1 + r)^{i}} \Rightarrow \text{ΠΑ} = C\left[\frac{(1 + r)^{\nu} - 1}{r(1 + r)^{\nu}}\right] = C\left[\frac{1 - 1/(1 + r)^{\nu}}{r}\right]$$

Μελλοντική αξία ράντας:

$$\text{ΜΑ} = C\left[\frac{(1 + r)^{\nu} - 1}{r}\right]$$

13.4 Εφαρμογές της ανάλυσης των προεξοφλημένων χρηματικών ροών ή χρηματορροών ανηγμένων σε παρούσες αξίες (Discounted cash flow DCF analysis)

13.4.1 Αξιολόγηση επενδύσεων (Investment appraisal, PHASING)

Παράδειγμα:

Το 2ο Αεροδρόμιο της Αθήνας αναμένει να εξυπηρετήσει 3 εκατομύρια επιβάτες ανά έτος από το 2005. Μπορεί είτε:
Α. Να χτίσει ένα μεγάλο σταθμό τώρα, το 2000, με κόστος €9 δις.
Β. Να χτίσει 3 μικρότερους σταθμούς το 2000, 2005 και 2010 με κόστος €4 δις το καθένα.
Ποια λύση είναι προτιμότερη;

Απάντηση:

Α. ΠΑ = €9 δις.
Β. ΠΑ, υποθέτοντας προεξοφλητικό επιτόκιο ίσο με 10%, είναι:

$$\text{ΠΑ} = 4 + \frac{4}{(1,1)^5} + \frac{4}{(1,1)^{10}} = 8,03 \text{ δις}$$

Συνεπώς το Β είναι προτιμητέο.
Γενικά, μια σειρά από μικρά έργα υπερτερούν έναντι ενός μεγάλου έργου.

13.4.1.1 Τεχνικές αξιολόγησης επενδύσεων – Το κριτήριο της ΚΠΑ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε:
- Εναλλακτικούς τρόπους για την πραγματοποίηση του ιδίου στόχου.
- Εναλλακτικούς τρόπους για την επένδυση ενός δεδομένου ποσού χρημάτων.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, δεδομένου του αντικειμενικού στόχου της επιχείρησης να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, βέλτιστη κατανομή των πόρων επιτυγχάνεται αν επιλέξουμε το έργο με τη:

Μεγαλύτερη Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) – (Net Present Value, NPV),

δεδομένου του τρέχοντος προεξοφλητικού επιτοκίου.

Παράδειγμα:

Τρία εναλλακτικά επιχειρηματικά σχέδια προβλέπουν τις ακόλουθες τετραετείς χρηματικές ροές:

Ετος	Α	Β	Γ
0	–1900	–1500	–1900
1	400	600	1900
2	800	1200	200
3	800	200	100
4	700	10	10

Αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 10%
Α. ΚΠΑ = 203,95
Β. ΚΠΑ = 194,28
Γ. ΚΠΑ = 74,52
Συνεπώς επιλέγεται το σχέδιο Α σύμφωνα με το κριτήριο της ΚΠΑ.

13.4.1.2 Εναλλακτικά κριτήρια αξιολόγησης επενδύσεων: ΕΒΑ, Διάρκεια αποπληρωμής

Στην πράξη οι επιχειρήσεις συχνά επιλέγουν το:
- Σχέδιο με τον υψηλότερο ΕΒΑ (με την προϋπόθεση ότι ΕΒΑ > r)
- Σχέδιο με τη μικρότερη περίοδο αποπληρωμής (ή επαν-είσπραξης)

Αυτά είναι συνήθως μη ιδεατά (sub-optimal). Δηλαδή δεν οδηγούν στην επιλογή του σχεδίου με την υψηλότερη ΠΑ, και ως εκ τούτου του σχεδίου το οποίο επιτυγχάνει βέλτιστη κατανομή των πόρων.

Παράδειγμα:

Στο τελευταίο παράδειγμα:

Επενδυτικό Κριτήριο	Σχέδιο		
	Α	Β	Γ
ΚΠΑ	203,95	194,28	74,52
ΕΒΑ(%)	14,5	17,9	13,7
Αποπληρωμή (έτη)	3	2	1

Στο παράρτημα του κεφαλαίου βλέπουμε τον υπολογισμό των ΚΠΑ και των ΕΒΑ για τα επιχειρηματικά σχέδια Α, Β και Γ στο ***Excel***. Στις τρεις στήλες της περιοχής B26 με D26 εισάγουμε τα δεδομένα των σχεδίων Α, Β και Γ. Στη σειρά 31 υπολογίζονται οι ΕΒΑ των τριών σχεδίων, σύμφωνα με τον τύπο που βλέπουμε στο κελί G31. Για παράδειγμα, για το σχέδιο Α, = IRR(B26:B30). Ομοίως, στη σειρά 32 υπολογίζονται οι ΚΠΑ σύμφωνα με τον τύπο που βλέπουμε στο κελί G32. Έτσι, για το επιχειρηματικό σχέδιο Α, υποθέτουμε επιτόκιο 10% και ταμειακές εισροές οι οποίες παρουσιάζονται στα κελιά B27 με B30. Χρησιμοποιείται ο τύπος = NPV (0.1, B27:B30) και σε αυτό προστίθεται η αρχική εκροή που παρουσιάζεται στο κελί B26 του φύλλου εργασίας

13.4.2 Αποτίμηση αξιόγραφων

13.4.2.1 Ομολογίες και μετοχές (Bonds and stocks)

Ομόλογα (< 1 έτους) και ομολογίες (> 1 έτους) είναι χρεόγραφα, μέσω των οποίων κράτη και επιχειρήσεις δανείζονται. Παραδείγματα των πρώτων είναι τα Βρετανικά «Gilt-edged», τα ομόλογα του δημοσίου των Ηνωμένων Πολιτειών (U.S. Treasury bonds), τα ομόλογα του Ελληνικού δημοσίου, και των τελευταίων τα εταιρικά ομόλογα (Corporate bonds).

Μετοχές είναι αξιόγραφα μέσω των οποίων οι επιχειρήσεις προσφέρουν στους μετόχους συμμετοχή στα κέρδη της επιχείρησης. Διακρίνονται σε κοινές και σε προνομιούχες. Οι τελευταίες εξασφαλίζουν συμμετοχή στα κέρδη πριν από τους μετόχους των κοινών μετοχών.

13.4.2.2 Προβλήματα ομολογιών

13.4.2.2.1 Εισαγωγή

Μία τυπική ομολογία υπόσχεται:

α. ***Τιμή εξόφλησης (redemption value)***, συμβατικά € 100, η οποία θα πληρωθεί την ημερομηνία λήξης, ν εξάμηνα στο μέλλον.

β. Μια ροή ***τοκομεριδίων (coupons)*** C, τα οποία πληρώνονται ανά εξάμηνο και εκφράζονται ως ποσοστό της ετήσιας τιμής εξόφλησης.

Παράδειγμα:

4% Consols θα έδινε τόκους € 4 πληρωτέα ανά εξάμηνο. Δηλαδή € 2 ανά εξάμηνο για τιμή εξόφλησης € 100.

Μερικά παραδείγματα ομολογιών παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα, υποθέτοντας ότι στην παρούσα στιγμή βρισκόμαστε στον Οκτώβριο του 2000.

	Τοκομερίδια	Όνομα	Ημερομηνία Λήξης	Τύπος
Low	$9\frac{1}{2}\%$	treasury	25 Oct. 2003	Short
High	15%	exchequer	27 Oct. 2012	Medium
Med	12%	exchequer	12 Dec. 2028	Long

Παράδειγμα:

Το 12% exchequer δίνει € 6 στις 12 Δεκεμβρίου και 12 Ιουνίου, για ονομαστική αξία € 100.

13.4.2.2.2 Αποτίμηση Ομολογιών

Τιμή = ΠΑ των τόκων + ΠΑ της τιμής εξόφλησης

Επομένως,

$$\Pi A = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{C}{(1+r)^i}\right) + \left(\frac{100}{(1+r)^{\nu}}\right)$$

Όπου C = εξαμηνιαίο τοκομερίδιο
r = εξαμηνιαίο προεξοφλητικό επιτόκιο
ν = αριθμός των εξαμήνων πριν τη λήξη

Παραδείγματα:

Να βρεθούν οι τιμές των ακόλουθων ομολογιών στις 21 Οκτωβρίου του 2000, υποθέτοντας προεξοφλητικό επιτόκιο 10%.

1. $9\frac{1}{2}\%$ treasury 25 Οκτ. 2003
2. 15% exchequer 27 Οκτ. 2012

Απαντήσεις:

1. Αυτό εγγυάται 6 τοκομερίδια των € 4,75 + € 100 στα επόμενα 6 εξάμηνα: Επομένως,

$$\Pi A = \sum_{i=1}^{6} \frac{4{,}75}{\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^i} + \frac{100}{\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^6} = 24{,}11 + 74{,}62 = 98{,}73\,€$$

Ένας εύκολος τρόπος προσδιορισμού της παρούσας αξίας των τόκων στον παραπάνω τύπο δίδεται από τον τύπο της ΠΑ ράντας. Δηλαδή

$$\Pi A = C\left\{\frac{(1+r)^\nu - 1}{r(1+r)^\nu}\right\} = C\left\{\frac{1 - 1/(1+r)^\nu}{r}\right\},$$

όπου $C = 4{,}75$, $r = 0{,}1$, $\nu = 6$

2. Αυτό εγγυάται 24 τοκομερίδια €7,50 + €100 σε 24 εξάμηνα: Επομένως,

$$\Pi A = \sum_{i=1}^{24} \frac{7{,}5}{\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^i} + \frac{100}{\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{24}} = 103{,}49 + 31{,}00 = 134{,}50\,€$$

13.4.2.3 Προβλήματα μετοχών

Μια τυπική μετοχή υπόσχεται άπειρη ροή μερισμάτων, που ποικίλουν σε μέγεθος με το χρόνο, πληρωτέα συνήθως στα μισά του κάθε έτους.

13.4.2.3.1 Αποτίμηση μετοχών: Το υπόδειγμα του Gordon

Ας υποθέσουμε κέρδη (μερίσματα) τα οποία αυξάνουν με ρυθμό g% για κάθε μερισματική περίοδο. Τότε

$$P = \Pi A \text{ των μελλοντικών μερισμάτων}$$

$$= \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots$$

$$= \frac{C_1}{1+r}\left[1 + \frac{1+g}{1+r} + \frac{(1+g)^2}{(1+r)^2}\right] + \ldots$$

Αν θυμηθούμε ότι το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου στο άπειρο είναι:

$$MA_\nu = \frac{a}{1-d} = \frac{1\text{ος όρος}}{1 - \text{λόγος}}$$

$$\text{Επομένως, } \Pi A = \frac{C_1/(1+r)}{1 - \frac{1+g}{1+r}}. \text{ Επομένως, } \Pi A = \frac{C_1}{r-g}$$

Παράδειγμα:

Επενδυτής αναμένει ετήσια αύξηση στα κέρδη του ΟΤΕ και μέρισμα 30 λεπτά ανά μετοχή σε χρονική περίοδο 6 μηνών. Παρατηρεί τιμή ίση με € 7,00 για τον ΟΤΕ.

1. Θα πρέπει να αγοράσει ή να πουλήσει; Τα τρέχοντα και μακροχρόνια επιτόκια είναι περίπου 10%.

$$\Pi A = \frac{0{,}30}{0{,}05 - 0{,}01} = 7{,}50\,€$$

Επομένως, η τρέχουσα τιμή δείχνει πολύ χαμηλή. Οπότε αγοράζει.

2. Τι ρυθμό αύξησης κερδών αναμένει η αγορά για τον ΟΤΕ;

$$g = r\frac{C_1}{\Pi A} = 0{,}05 - \frac{0{,}3}{7{,}0} = 0{,}071$$

ανά εξάμηνο. Δηλαδή, 1,42% ανά έτος.

13.4.2.3.2 Απόδοση στη λήξη ομολογίας (Yield to redemption)

Ο ετήσιος ονομαστικός εσωτερικός βαθμός απόδοσης μίας ομολογίας ονομάζεται απόδοση στη λήξη (Yield to redemption). Δεδομένων των ΠΑ, C, και ν, η απόδοση στη λήξη μπορεί να βρεθεί μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων, χρησιμοποιώντας τον τύπο αποτίμησης ομολογιών.

$$\Pi A = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{100}{(1+r)^\nu}$$

Επομένως, Απόδοση στη Λήξη = 2r

Παράδειγμα:

Την 21η Οκτ. 2000, 15% exch. 27 Οκτ. 2012 διαπραγματεύεται στην αγορά στις € 118,83. Ποιά είναι η απόδοση στη λήξη;

Από το προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι με επιτόκιο 10%, ΠΑ = € 134,5. Συνεπώς, η απόδοση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 10%. Δοκιμάζουμε 11%, τότε ΠΑ = € 126,31. Δοκιμάζουμε 12%, τότε ΠΑ = € 118,83, που είναι η σωστή απάντηση. Βεβαίως, χρήση Η/Υ επιλύει το πρόβλημα σε απειροελάχιστο χρόνο.

13.4.3 Περίληψη

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΡΟΩΝ

1. *Αξιολόγηση επενδύσεων*
Βέλτιστη κατανομή των πόρων επιτυγχάνεται όταν επιλέγεται το έργο με τη μεγαλύτερη καθαρή παρούσα αξία (ΚΠΑ).
Εναλλακτικά κριτήρια: Επιλέγουμε το έργο με τον υψηλότερο ΕΒΑ ή τη μικρότερη περίοδο αποπληρωμής του δανείου.
2. *Τιμή ομολογιών* = ΠΑ των τόκων + ΠΑ της τιμής εξόφλησης

$$\text{ΠΑ} = \left(\sum_{i=1}^{v} \frac{C}{(1+r)^i}\right) + \left(\frac{100}{(1+r)^v}\right)$$

C = Εξαμηνιαίο τοκομερίδιο
r = Εξαμηνιαίο προεξοφλητικό επιτόκιο
v = Αριθμός εξαμήνων από την εξόφληση
Ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης (Annual redemption yield) = 2r. Βρίσκουμε το r με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στον παραπάνω τύπο.
3. *Οι μετοχές* υπόσχονται μια άπειρη ροή μερισμάτων, τα οποία κυμαίνονται με το χρόνο και είναι πληρωτέα ανά εξάμηνο. Έστω g ο ρυθμός αύξησης των κερδών ανά περίοδο. Η τιμή των μετοχών μπορεί να υπολογιστεί με το υπόδειγμα του Gordon σύμφωνα με το οποίο:

$$\text{ΠΑ} = \frac{C_1}{r-g}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Χρήση του Excel στην επίλυση προβλημάτων χρηματοοικονομικής

Microsoft Excel - Parouses axies

F3 =IRR(B3:E3)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Υπολογισμός Εσωτερικού Βαθμού Απόδοσης (ΕΒΑ)					
2	Περίοδος	0	1	2	3	ΕΒΑ	
3	Χρηματοροή	-200	100	50	75	6.52%	=IRR(B3:E3)
4							
5	Προβλήματα Ραντών (Annuity Type Problems)						
6	C	r	v	ΜΑ	ΠΑ		
7	-1000	0.1	10		€ 6,144.57		=PV(B7,C7,A7)
8	-50	0.01	180	€ 24,979.01			=FV(B8,C8,A8)
9	€ 322.38	0.008	180		-30000		=PMT(B9,C9,E9)
10	€ 72.38	0.008	180	-30000			=PMT(B10,C10,,D10)
11	-50	12.0%	120	11500			=RATE(C11,A11,,D11)*12
12							
13	Ανάλυση Χρονοδιαγράμματος Αποπληρωμής Δανείου, 2000, σε 3 περιόδους, με r=12%						
14		ΠΑ	v	r			
15		2000	3	0.12			
16							
17		(1)	(2)	(3)=(1)-(2)	Υπόλοιπο		
18	Έτος	Τοκοχρεωλύσιο	Τόκος	Χρεωλύσιο	Κεφάλαιο		
19	0				2000	Τύποι Υπολογισμών για:	
20	1	832.70	240.00	592.70	1407.30	Τοκοχρεωλύσιο	=PMT(D$15,C$15,-B$15)
21	2	832.70	168.88	663.82	743.48	Τόκος	=E19*D$15
22	3	832.70	89.22	743.48	0.00	Υπόλοιπο Κεφάλαιο	=E19-D20
23							
24			ΤΑΜΕΙΑΚΕΣ ΡΟΕΣ				
25	ΣΧΕΔΙΟ	A	B	C			
26		-1900	-1500	-1900			
27		400	600	1900			
28		800	1200	200			
29		800	200	100			
30		700	10	10			
31	ΕΒΑ	14.49%	17.87%	13.69%			=IRR(B26:B30)
32	ΚΠΑ	203.95	194.28	74.52			=NPV(0.1,B27:B30)+B26
33							

Frequent Compounding / PV-SinglePayment / Frequent Discounting / PV-Annuity / PV-Annuity / NPV-IRR / Risky Cash Flows

Ασκήσεις για λύση

1. Η τράπεζα Α προσφέρει σταθερό ετήσιο επιτόκιο 8%, ανατοκιζόμενο ανά τρίμηνο, σε όλες τις καταθέσεις. Ανάληψη των χρημάτων μπορεί να γίνει κατόπιν ειδοποίησης 3 μηνών.

a) Ποιο είναι το ετήσιο ετησιοποιημένο επιτόκιο (effective interest rate) που προσφέρει η τράπεζα;

b) Αν μια εταιρεία τοποθετήσει €75.000 σε μια κατάθεση πέντε ετών, τι συνολικό ποσό θα λάβει στη λήξη;

c) Αν μια εταιρεία σχεδιάζει να αγοράσει ένα μηχάνημα στην τιμή των €75.000 μέσα σε χρονικό διάστημα 3 ετών, πόσο πρέπει να καταθέσει τώρα για να πληρώσει γι' αυτό το μηχάνημα;

d) Μια τράπεζα ανταγωνιστής, η Τράπεζα Β, προσφέρεται να μετατρέψει €100.000 σε €160.000 μέσα σε 5 χρόνια, αλλά δεν επιτρέπει ανάληψη των χρημάτων πριν από τη λήξη της κατάθεσης. Τι

«πριμ ρευστότητας» –η διαφορά μεταξύ του ετησιοποιημένου επιτοκίου (effective interest rate) των A and B– πληρώνουμε στην Τράπεζα B για την εκχώρηση του προνομίου ανάληψης μετά από ειδοποίηση τριών μηνών;

e) Πόσο χρόνο θα χρειαστούμε για να διπλασιάσουμε τα χρήματά μας με την Τράπεζα A και την Τράπεζα B;

2. Δανειζόμαστε €50.000 με υποθήκη, με τον όρο μηνιαίων εξοφλήσεων για 25 χρόνια. Αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 12%,

a) Ποιο είναι το ετησιοποιημένο επιτόκιο (Annual Percentage Return – APR) της υποθήκης;

b) Ποιο είναι το μηνιαίο τοκοχρεωλύσιο (το ποσό της μηνιαίας δόσης);

3. Αποταμιεύουμε σταθερά ποσά κάθε μήνα έτσι ώστε να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο Land Rover σε 25 χρόνια. Η τρέχουσα τιμή του Land Rover είναι €50.000 αλλά η τιμή του αυξάνεται με τον πληθωρισμό περίπου κατά 5% κάθε χρόνο. Μπορούμε να αποκομίσουμε ετησιοποιημένο επιτόκιο στις καταθέσεις ίσο με 12% ανά έτος.

a) Πόσο θα πρέπει να πληρώσουμε για το Land Rover;

b) Πόσο πρέπει να αποταμιεύουμε κάθε μήνα;

4. Συνδρομητής πληρώνει €50 ανά μήνα για 10 χρόνια σε αντάλλαγμα ενός συνολικού ποσού €11.500 σε δέκα χρόνια. Τι Μέσο Βαθμό Απόδοσης (MWRR) πρέπει να επιτύχει το κεφάλαιο προκειμένου να ικανοποιηθεί η υπόσχεση;

5. Εταιρεία εξετάζει δυο ανταγωνιστικές επενδυτικές στρατηγικές τις A και B. Οι ταμειακές ροές που συνδέονται με τις στρατηγικές αυτές απεικονίζονται παρακάτω:

Έτος	A	B
0	−3000	−3800
1	+1100	+800
2	+2800	+1600
3	0	+1600
4	0	+1400

a) Δεδομένου ότι τα τρέχοντα βραχυχρόνια και μακροχρόνια επιτόκια είναι περίπου 10% ανά έτος, ποιό σχέδιο πρέπει να επιλεχθεί με βάση

– το κριτήριο της ΚΠΑ,

– το κριτήριο του Εσωτερικού Βαθμού Απόδοσης (ΕΒΑ),

– το κριτήριο της περιόδου αποπληρωμής;

b) Άν τα επιτόκια αυξηθούν σε 14%, πώς αυτό θα επηρεάσει την απόφασή μας;

Απαντήσεις των ασκήσεων για λύση

Κεφάλαιο 2: Άλγεβρα – Εισαγωγικά

1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

3)
- $x = 2/3$
- $x = 5/3$
- $x = 1/3$
- $x_1 = 1,\ x_2 = -1$
- $x_1 = 0{,}8685,\ x_2 = -1{,}535,\ x_3 = -3$
- $x_1 = -1{,}7032,\ x_2 = 1{,}3699$
- $x_1 = 4,\ x_2 = -4$
- $x_1 = -2,\ x_2 = 6$

4) **α)** Η εξίσωση του συνολικού κόστους μεταφοράς (TCT) είναι:

$$TCT = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}C_{ij}$$

β) Η μαθηματική σχέση που ορίζει ότι η συνολική μεταφερόμενη ποσότητα από κάθε εργοστάσιο δεν μπορεί να υπερβαίνει την ποσότητα που έχει παραχθεί είναι:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} X_i$$

Η μαθηματική σχέση που ορίζει ότι η μεταφερόμενη ποσότητα σε κάθε αποθήκη θα πρέπει να ικανοποιεί την αντίστοιχη ζήτηση είναι:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

γ) Η σχέση μεταξύ των X_i και D_j ώστε να ισχύουν όλες οι σχέσεις στο

ερώτημα (β) είναι:

$$\sum_{j=1}^{n} D_j = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

5) α) Ο τύπος που υπολογίζει τον μέσο όρο είναι:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

β)
$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}n\overline{X} + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$$

6)
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)}{n-1} = \ldots$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n-1} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

7) Η μέση τιμή της μεταβλητής είναι:

$$E(X) = 0(1/4) + 1(1/2) + 2(1/4) = 1$$

Η διακύμανση της μεταβλητής είναι:

$$V(X) = E[X_i - E(X)]^2 = \sum_i [X_i - E(X)]^2 P(X_i)$$

$$V(X) = (0-1)^2(1/4) + (1-1)^2(1/2) + (2-1)^2(1/4) = 1/2$$

8) Μέση τιμή του X:

$$\mu_X \equiv E(X) = \sum_X \sum_Y X_{ij}P(X_i,\ Y_j) = \sum_X X_i P(X_i)$$

$$\mu_X \equiv E(X) = 1 \times 0{,}26 + 2 \times 0{,}1 + \ldots + 2 \times 0{,}02 + 3 \times 0{,}26$$
$$= 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}3 = \mathbf{2{,}0}$$

Μέση τιμή του Y:

$$\mu_Y \equiv E(Y) = \sum_X \sum_Y Y_{ij}P(X_i,\ Y_j) = \sum_X Y_j P(Y_j)$$

$$\mu_Y \equiv E(Y) = 8{,}5 \times 0{,}36 + 11{,}5 \times 0{,}36 + 17{,}5 \times 0{,}28 = \mathbf{12{,}10}$$

Διακύμανση του X:

$$V(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_X \sum_Y (X_{ij} - \mu_X)^2 P(X_i,\ Y_j) = \sum_X (X_i - \mu_X)^2 P(X_i)$$

$$\sigma_X^2 = (1-2)^2 0{,}3 + (2-2)^2 0{,}4 + (3-2)^2 0{,}3 = \mathbf{0{,}59}$$

Τυπική απόκλιση του Y: $\sigma_X = 0{,}77$

Διακύμανση του Y:

$$V(Y) \equiv \sigma_Y^2 = \sum_X \sum_Y (Y_{ij} - \mu_Y)^2 P(X_i,\ Y_j) = \sum_Y (Y_j - \mu_Y)^2 P(Y_j)$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbf{12{,}96}$$

Τυπική απόκλιση του Y: $\sigma_Y = 3{,}6$

Συνδιακύμανση των X και Y:

$$C(X,\ Y) \equiv \sigma_{XY} = E\{[X_i - E(X)][Y_j - E(Y)]\}$$
$$= \sum_X \sum_Y (X_i - \mu_X)(Y_j - \mu_Y)P(X_i,\ Y_j)$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= \sum_X \sum_Y X_i Y_j P(X_i,\ Y_j) - \mu_X \mu_Y$$

$$\sigma_{XY} = [(8{,}5 \times 1 \times 0{,}26) + (8{,}5 \times 2 \times 0{,}1) + \ldots$$
$$+ (17{,}5 \times 3 \times 0{,}26)] - 2 \times 12{,}1 = \mathbf{2{,}34}$$

Φαίνεται ότι η απόδοση και ο κίνδυνος των ομολογιών συσχετίζονται θετικά μεταξύ τους. Δηλαδή όταν αυξάνεται (μειώνεται) ο κίνδυνος αυξάνεται (μειώνεται) και η απόδοση.

Κεφάλαιο 3: Συναρτήσεις

1) Το πεδίο ορισμού και πεδία τιμών, αντίστοιχα είναι:
$x \in [-4, 10)$ και $y \in [-3, 11)$
$x \in [-4, 10)$ και $y \in [-1, 99]$

2) Με αντικατάσταση στο γνωστό τύπο $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ λαμβάνουμε:

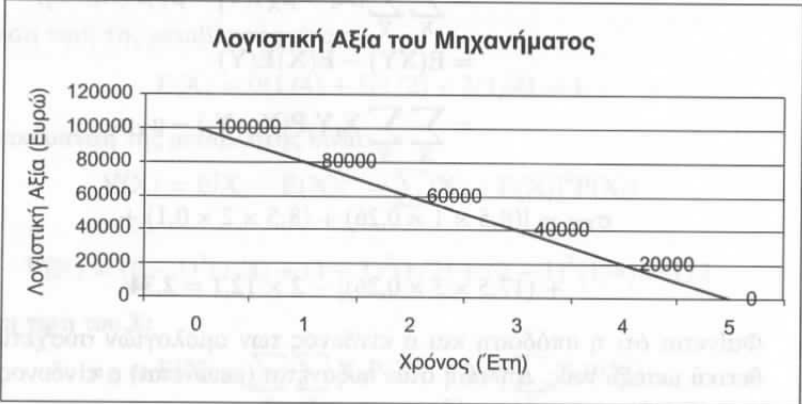
$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-2}{6-2}$. Επομένως: $2y = x + 4 \Rightarrow y = 0,5x + 2$.

3) a) Η απόσβεση ανά έτος στα 5 έτη, με την ευθεία μέθοδο είναι: $100.000/5 = 20.000$, ενώ η αξία του μηχανήματος περιγράφεται από την εξίσωση

$$V = 100.000 - 20.000t,\ \text{όπου } 0 \le t \le 5$$

b) Ο πίνακας με τα ποσά απόσβεσης και τη λογιστική αξία του μηχανήματος ανά έτος είναι

Χρόνος, t	Απόσβεση, D	Αξία Μηχανήματος, V
0		100000
1	20000	80000
2	20000	60000
3	20000	40000
4	20000	20000
5	20000	0



c) Η απόσβεση ανά έτος στα 5 έτη, με την ευθεία μέθοδο υπολογίζεται τώρα ως εξής: $(100.000 - 10.000)/5 = 18.000$, ενώ η αξία του μηχανήματος περιγράφεται από την εξίσωση

$$V = 100.000 - 18.000t,\ \text{όπου } 0 \le t \le 5$$

d) Ο πίνακας με τα ποσά απόσβεσης και τη λογιστική αξία του μηχανήματος ανά έτος διαμορφώνεται ως εξής:

	Υπολειμματική Αξία	0	Υπολειμματική Αξία	10000
Χρόνος, t	**Απόσβεση, D**	**Αξία Μηχανήματος, V**	**Απόσβεση, D**	**Αξία Μηχανήματος, V**
0		**100000**		**100000**
1	20000	80000	18000	82000
2	20000	60000	18000	64000
3	20000	40000	18000	46000
4	20000	20000	18000	28000
5	20000	0	18000	10000

4) a) Σύμφωνα με τον πίνακα, φορολογούμενος με εισόδημα

i. Έως 11.000 € δεν πληρώνει φόρο - το αφορολόγητο εισόδημα είναι 11.000 €. Η ακόλουθη συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των φόρων του.

$$T_i = 0 \times I = 0$$

ii. Έως 13.000 €, τα πρώτα 11.000 € είναι αφορολόγητα, ενώ στα επόμενα 2.000 € (= 13.000 − 11.000) φορολογείται με 15%. Η ακόλουθη συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των φόρων του.

$$T_{ii} = 0 \times 11.000 + 0,15(I - 11.000) = 0,15I - 1.650$$

iii. Έως 23.000 €, τα πρώτα 11.000 € είναι αφορολόγητα, τα επόμενα 2.000 € (= 13.000 − 11.000) φορολογούνται με 15%, ενώ τα επόμενα 10.000 € (= 23.000 − 13.000) φορολογούνται με 30%. Η ακόλουθη συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των φόρων του.

$$T_{iii} = 0 \times 11.000 + 0,15 \times 2.000 + 0,3(I - 13.000)$$
$$= 300 - 3.900 + 0,3I = 0,3I - 3.600$$

iv. Άνω των 23.000 €, τα πρώτα 11.000 € είναι αφορολόγητα, τα επόμενα 2.000 € φορολογούνται με 15%, τα επόμενα 10.000 € φορολογούνται με 30%, ενώ εισοδήματα άνω των 23.000 € φορολογούνται με 40%. Η ακόλουθη συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των φόρων του.

$$T_{iv} = 0 \times 11.000 + 0{,}15 \times 2.000 + 0{,}3 \times 10.000 + 0{,}4(I - 23.000)$$

$$= 300 + 3.000 - 9.200 + 0{,}4I = 0{,}4I - 5.900$$

Επομένως απαιτούνται τέσσερις συναρτήσεις για τον υπολογισμό του φόρου για κάθε εύρος φορολογητέων εισοδημάτων, ως εξής:

$$T = f(I) = \begin{cases} 0 \times I & 0 < I \leq 11.000 \\ 0{,}15 \times I - 1.650 & 11.000 < I \leq 13.000 \\ 0{,}30 \times I - 3.600 & 13.000 < I \leq 23.000 \\ 0{,}40 \times I - 5.900 & 23.000 < I \end{cases}$$

b) Σύμφωνα με τον πίνακα, φορολογούμενος με εισόδημα

$I = 10.000 \Rightarrow T = 0$

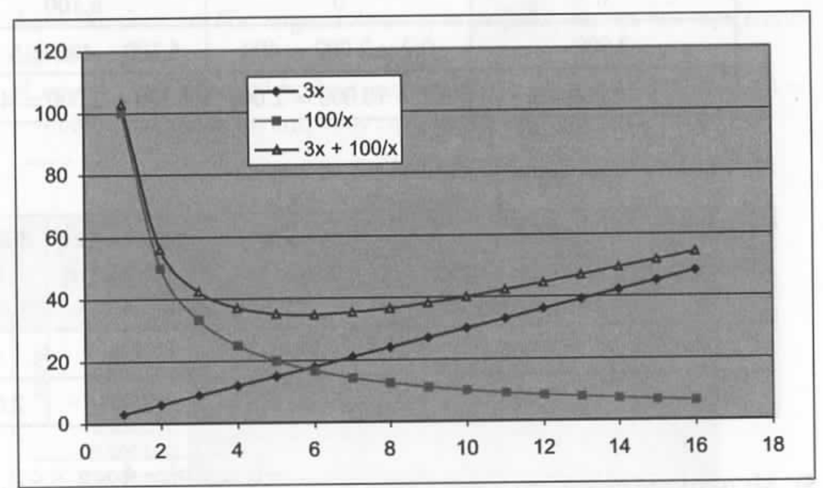
$I = 12.000 \Rightarrow T = 0{,}15 \times I - 1.650 = 0{,}15 \times 12.000 - 1.650 = 150$

$I = 20.000 \Rightarrow T = 0{,}3 \times I - 3.600 = 0{,}3 \times 20.000 - 3.600 = 2.400$

$I = 100.000 \Rightarrow T = 0{,}4 \times I - 5.900 = 0{,}4 \times 100.000 - 5.900 = 34.100$

c) Ο σχετικός πίνακας και γράφημα είναι:

Συνολικό Εισόδημα	**Φορολογικός Συντελεστής Κλιμακίου**	**Φόρος Κλιμακίου**	**Συνολικός Φόρος**
1000	0	0	0
2000	0	0	0
3000	0	0	0
4000	0	0	0
5000	0	0	0
6000	0	0	0
7000	0	0	0
8000	0	0	0
9000	0	0	0
10000	0	0	0
11000	0	0	0
12000	0.15	150	**150**
13000	0.15	300	300
14000	0.3	300	**600**
15000	0.3	600	900
16000	0.3	900	1200
17000	0.3	1200	1500
18000	0.3	1500	1800
19000	0.3	1800	2100
20000	0.3	2100	2400
21000	0.3	2400	2700
22000	0.3	2700	3000
23000	0.3	3000	3300
24000	0.4	400	**3700**
25000	0.4	800	4100
26000	0.4	1200	4500
27000	0.4	1600	4900
28000	0.4	2000	5300
29000	0.4	2400	5700
30000	0.4	2800	6100



d) Η εξίσωση του σκέλους α) τροποποιείται ως εξής:

Για 2 παιδιά:

$$T = f(I) = \begin{cases} 0 \times I & 0 < I \leq 13.000 \\ 0 \times 13.000 + 0,3(I - 13.000) & \\ = 0,30 \times I - 3.600 & 13.000 < I \leq 23.000 \\ 0,40 \times I - 5.900 & 23.000 < I \end{cases}$$

Για 3 παιδιά:

$$T = f(I) = \begin{cases} 0 \times I & 0 < I \leq 21.000 \\ 0 \times 21.000 + 0,3(I - 21.000) & \\ = 0,30 \times I - 6.300 & 21.000 < I \leq 23.000 \\ 0,40 \times I - 5.900 & 23.000 < I \end{cases}$$

Έστω I = 30.000 €

0 παιδιά: T = 6.100 €

Με 2 παιδιά: T = 5.800 €, εξοικονόμηση € 300(= 6.100 – 5.800)

Με 3 παιδιά: T = 3.400 €, εξοικονόμηση € 2.700 (= 6.100 – 3.400)

e) Φορολογική υποχρέωση για άτεκνους μισθωτούς με εισόδημα € 30.000, T = 6.100 €.

Έξοδα Νοσοκομειακής περίθαλψης, €	Φορολογική Εξοικονόμηση, €	Φορολογική Υποχρέωση, €
0	0	6.100
2.000	0,2 × 2.000 = 400	6.100 – 400 = 5.700
10.000	0,2 × 10.000 = 2.000	6.100 – 2.000 = 4.100

f) Έξοδα νοσοκομειακής περίθαλψης € 2.000.

Εισόδημα Μισθωτού, €	Έξοδα Νοσοκομειακής περίθαλψης, €	Έκπτωση φόρου, €	Φορολογική Υποχρέωση, €	Φόρος, €
12.000	2.000	0,2 × 2.000 = 400	150	0
20.000	2.000	0,2 × 2.000 = 400	2.400	2.000

5) Με αντικατάσταση στο γνωστό τύπο $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times \alpha \times c}}{2 \times \alpha}$ λαμβάνουμε: $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$.

Επομένως, $x_1 = 9,58$, $x_2 = 0,42$.

6) $y = 300(10)^3 - 20(10)^2 = 298,000$ άνθρωποι.

7) a) $V = 300.000(2,5)^{-0,1(5)} =$ €189.736,66.

b) Για t = 0, V = €300.000.

8) a) Κέρδος = Έσοδα – Κόστος

$= X(7.000 - X) - 1.000(7.000 - X)$

$= (7.000-X)(X-1.000) = 7.000X - X^2 - 7.000.000 + 1.000X$

$= -X^2 + 8.000X - 7.000.000$

b) Άρα πρόκειται για μια παραβολή κοίλη, αφού ο συντελεστής του X^2 είναι αρνητικός (–1), και η γραφική παράσταση της καμπύλης θα τέμνει τον κάθετο άξονα στην τιμή –7.000.000.

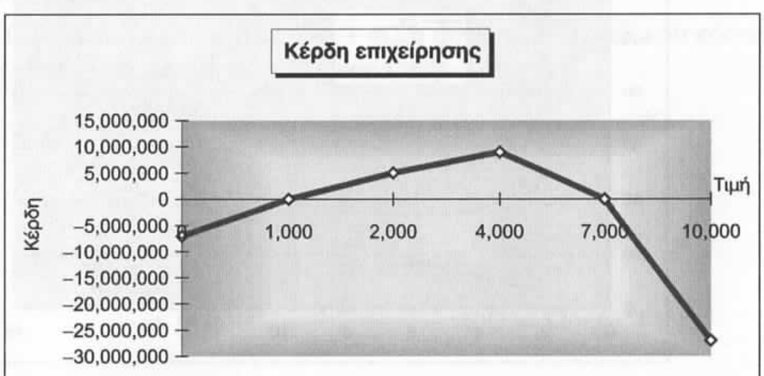
Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$X_{1,2} = \frac{-8.000 \pm \sqrt{(64-28)10^6}}{-2}$$

$$= \frac{-8.000 \pm 6.000}{-2} = 1.000 \text{ ή } 7.000$$

Αυτά θα είναι τα δύο σημεία όπου η παραβολή τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

c) Η κορυφή της παραβολής θα αντιστοιχεί στο σημείο (–8.000)/(–2) = = 4.000, όπου τα κέρδη παίρνουν τη μέγιστη τιμή των 9.000.000.

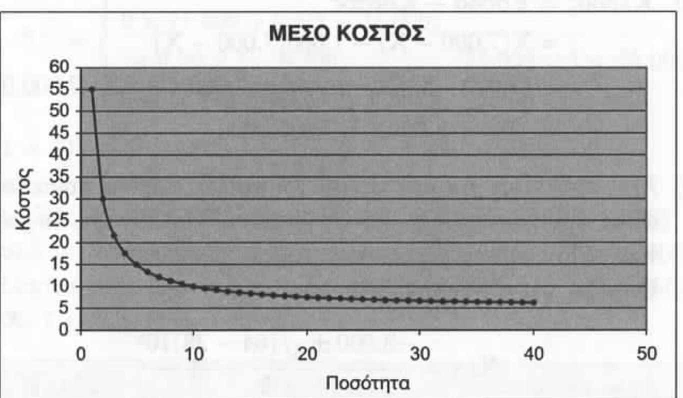


9) a) Εφόσον το συνολικό κόστος (TC) είναι γραμμική συνάρτηση της παραγωγής, ισχύει ότι $TC = a + bQ$.
Για $Q = 0$, $TC = 50 \Rightarrow a = 50$.
Για $Q = 100$, $TC = 550 \Rightarrow 550 = 50 + 100b \Rightarrow 100b = 500 \Rightarrow b = 5$.
Επομένως η εξίσωση του συνολικού κόστους είναι:

$$TC = 50 + 5Q$$

Και η εξίσωση του μέσου κόστους είναι:

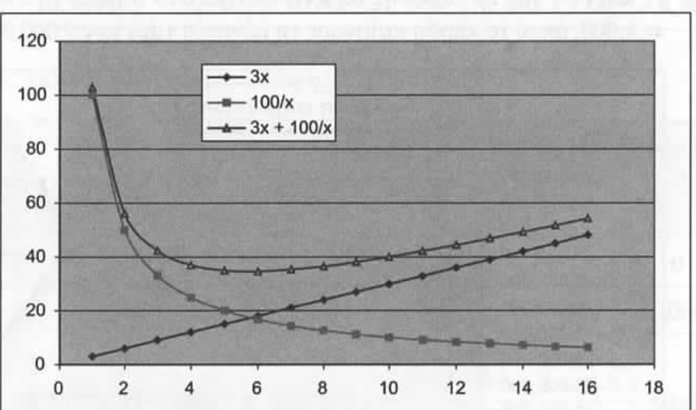
$$AC = TC/Q = (50 + 5Q)/Q = (50/Q) + 5$$



b) Οι ασύμπτωτες ευθείες είναι η $AC = 5$ και η $Q = 0$.

c) $C = (50/Q) + 5 \Rightarrow AC \cdot Q = 50 + 5Q \Rightarrow Q = 50/(AC - 5)$.
Επειδή $Q \geq 0 \Rightarrow AC \geq 5$.
Πεδίο Τιμών της αντίστροφης $(5, \infty)$.

10) a)



b) Η συνάρτηση κόστους αποτελείται από δύο μέρη. Το ένα είναι γραμμικό δηλαδή ευθέως ανάλογο με την παραγόμενη ποσότητα. Το δεύτερο μέρος είναι αντιστρόφως ανάλογο με την παραγόμενη ποσότητα. Τέτοιου είδους συναρτήσεις κόστους περιγράφουν το κόστος αποθεμάτων όπου το πρώτο κομμάτι είναι το κόστος διατήρησης αποθεμάτων (χρηματοοικονομικό, αποθηκευτικοί χώροι κλπ) το δε δεύτερο είναι το κόστος παραγγελιών (όσο μεγαλύτερη η ποσότητα παραγωγής τόσο λιγότερες παραγγελίες αποθεμάτων θα γίνουν). Στον οριζόντιο άξονα μετράται η παραγωγή και στον κάθετο το κόστος παραγωγής.

c) Η ελαχιστοποίηση του κόστους επιτυγχάνεται στο σημείο τομής των δύο επί μέρους συναρτήσεων

$$3x = 100/x \Rightarrow 3x^2 = 100 \Rightarrow x = 10/\sqrt{3} = 5{,}773$$

$$\text{Για } x = 10/\sqrt{3} \Rightarrow C(x) = \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{100\sqrt{3}}{10} = \frac{30}{\sqrt{3}} + 10\sqrt{3} = 34{,}64$$

11) Για $t = 0$, $x(0) = 10$. Επομένως, $x(0) = 50 - A = 10 \Rightarrow A = 40$.
Για $t = 1$, $x(1) = 20$. Επομένως,

$$x(1) = 50 - 40e^{-k} = 20 \Rightarrow e^{-k} = 3/4$$

$$\Rightarrow -k = \ln(3/4) = -0{,}2877 \Rightarrow k = 0{,}2877$$

Επομένως, για $t = 5$:

$$x(5) = 50 - 40e^{-0{,}2877.5} = 50 - 40e^{-1{,}4385}$$

$$= 50 - 40(0{,}237283) = 40{,}5$$

12) $Q + P - 20 = 0 \Rightarrow P = 20 - Q$ η συνάρτηση ζήτησης.
$TC - 48 - 4Q = 0 \Rightarrow TC = 48 + 4Q$ η συνάρτηση συνολικού κόστους.
Η συνάρτηση κερδών παίρνει τη μορφή:

$$\Pi = TR - TC = PQ - TC = 20Q - Q^2 - 48 - 4Q$$

$$= -Q^2 + 16Q - 48$$

i) $\Pi = 0 \Rightarrow -Q^2 + 16Q - 48 = 0$

$$\Rightarrow Q = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 192}}{-2} \Rightarrow Q = 12 \quad \text{ή} \quad 4$$

Αποδεχόμαστε την τιμή Q = 12.

ii) $\Pi = 12 \Rightarrow -Q^2 + 16Q - 48 = 12 \Rightarrow -Q^2 + 16Q - 60 = 0$

$$\Rightarrow Q = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 240}}{-2} \Rightarrow Q = 10 \quad \text{ή} \quad 6$$

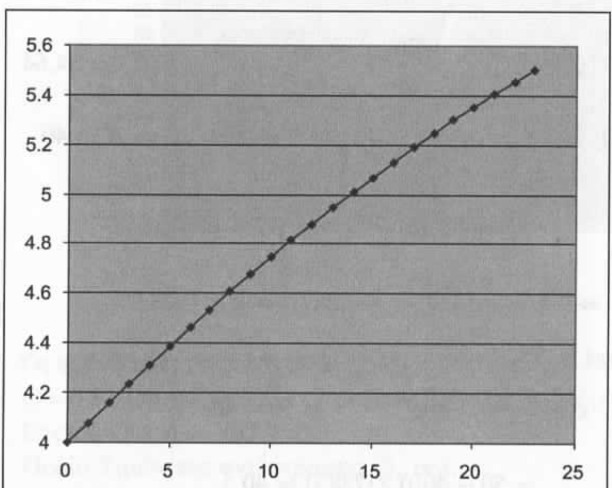
Αποδεχόμαστε την τιμή Q = 10.

iii) $\Pi = -20 \Rightarrow Q^2 + 16Q - 48 = -20 \Rightarrow -Q^2 + 16Q - 28 = 0$

$$\Rightarrow Q = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 112}}{-2} \Rightarrow Q = 14 \quad \text{ή} \quad 2$$

Αποδεχόμαστε την τιμή Q = 14.

13) a)



Στον οριζόντιο άξονα μετράται ο χρόνος και στον κάθετο ο αριθμός των παραγωγών.

b) Έως τώρα την καινοτομία έχουν υιοθετήσει:

$N(0) = 20/(3 + 2) = 4$ χιλιάδες.

c) Σε 5 χρόνια θα την έχουν υιοθετήσει:

$N(5) = 20/(3 + 2e^{-0,05 \cdot 5}) = 20/(3 + 2e^{-0,25}) = 4,388$ χιλιάδες.

d) Θα την υιοθετήσουν στο μέλλον:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{20}{3 + 2\lim_{t\to\infty} e^{-0,05t}} = \frac{20}{3 + 2 \cdot 0} = \frac{20}{3} = 6,66 \text{ χιλιάδες.}$$

Κεφάλαιο 4: Συστήματα εξισώσεων

1) Μια τετραγωνική συνάρτηση έχει τη μορφή $y = ax^2 + bx + c$. Αντικαθιστώντας τα σημεία στη συνάρτηση λαμβάνουμε

$$\left.\begin{aligned} 182 &= a2^2 + b2 + c \\ 168 &= a4^2 + b4 + c \\ 150 &= a10^2 + b10 + c \end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς a, b, c, λαμβάνουμε:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -10, \quad c = 200$$

Επομένως $2y = 0,5x^2 - 10x + 200$.

2) $Y = C + I$ ισορροπία αγοράς προϊόντος

$M_S = M_{d1} + M_{d2}$ ισορροπία αγοράς χρήματος

$Y = 100 + 0,8Y + 1200 - 30r \Rightarrow 0,2Y = 1300 - 30r$

$\Rightarrow Y = 6500 - 150r$

$2500 = 0,25Y + 1375 - 25r \Rightarrow 0,25Y = 1125 + 25r$

$\Rightarrow Y = 4500 + 100r$

$6500 - 150r = 4500 + 100r \Rightarrow 2000 = 250r \Rightarrow r^* = 8$

$Y = 6500 - 150 \cdot 8 \Rightarrow Y^* = 5300$

3) Συνθήκη ισορροπίας $Q_s = Q_d$

a) $-2 + P^2 = 14 - 3P^2 \Rightarrow 4P^2 = 16 \Rightarrow P^2 = 4 \Rightarrow P = 2$ (η αρνητική ρίζα $P = -2$ απορρίπτεται) και επομένως $Q_s = Q_d = 2$.

b) $-6 + 3P^2 = 15 - 2P \Rightarrow 3P^2 + 2P - 21 = 0$

$$\Rightarrow P_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-2 \pm 16}{6} = -3$$

και $\frac{14}{6} = 2\frac{1}{3} \Rightarrow P = 2\frac{1}{3}$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται) και επομένως

$Q_s = Q_d = 31/3 = 10\frac{1}{3}$

5) a) Έστω P_o το επίπεδο ισορροπίας πριν την φορολογία, τότε:

$$a - bP_o = -c + dP_o \Rightarrow (b + d)P_o = (a + c)$$

$$\Rightarrow P_o = (a+c)/(b+d)$$

Αν η φορολογία αφαιρείται από την τιμή που χρεώνουν οι παραγωγοί τότε: $Q_D = a - bP$ αλλά $Q_S = -c + d(P-t)$, επομένως η τιμή ισορροπίας P_1 προσδιορίζεται ως:

$$a - bP_1 = -c + d(P_1 - t) \Rightarrow (b+d)P_1 = (a+c) + dt$$

$$\Rightarrow P_1 = (a+c)/(b+d) + dt/(b+d) = P_o + dt/(b+d)$$

b) Αν η φορολογία προστίθεται στην τιμή που πληρώνουν οι καταναλωτές τότε:

$$Q_D = a - b(P+t) \quad \text{και} \quad Q_S = -c + dP$$

επομένως η τιμή ισορροπίας P_2 προσδιορίζεται ως:

$$a - bP_2 - bt = -c + dP_2 \Rightarrow (b+d)P_2 = (a+c) - bt$$

$$\Rightarrow P_2 = (a+c)/(b+d) - bt/(b+d) = P_o - bt/(b+d)$$

Οι ποσότητες ισορροπίας βρίσκονται με αντικατάσταση.

5)

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = nb_1 + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 \quad (2)$$

$$(1) \times \sum X_i : \sum X_i \sum Y_i = nb_1 \sum X_i + b_2 (\sum X_i)^2 \quad (3)$$

$$(2) \times n : \quad n \sum Y_i X_i = nb_1 \sum X_i + nb_2 \sum X_i^2 \quad (4)$$

$$(4) - (3) : \quad n \sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i = b_2 \left[n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 \right] \quad (5)$$

Επομένως

$$b_2 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (6)$$

Όπου

$$x_i = X_i - \overline{X}, \quad y_i = Y_i - \overline{Y}, \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην εξίσωση (1) προκύπτει: $b_1 = \overline{Y} - b_2\overline{X}$.

6) Από τη συνθήκη ισορροπίας των τριών αγορών ισχύει:

$$Q_{D1} = Q_{S1}, \quad Q_{D2} = Q_{S2}, \quad Q_{D3} = Q_{S3}$$

Επομένως,

$$45 - 2P_1 + 2P_2 - 2P_3 = -5 + 2P_1 \Rightarrow 2P_2 - 2P_3 - 4P_1 = -50 \quad (1)$$

$$16 + 2P_1 - P_2 + 2P_3 = -4 + 2P_2 \Rightarrow 2P_1 + 2P_3 - 3P_2 = -20 \quad (2)$$

$$30 - P_1 + 2P_2 - P_3 = -5 + P_3 \Rightarrow 2P_2 - 2P_3 - P_1 = -35 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -P_2 - 2P_1 = -70 \Rightarrow P_2 = 70 - 2P_1 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) απαλείφεται το P_2:

$$2(70 - 2P_1) - P_1 - 2P_3 = -35 \Rightarrow -5P_1 - 2P_3 = -175$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{175 - 5P_1}{2} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (4) και (5) στην (1) λαμβάνεται η λύση για το P_1:

$$2(70 - 2P_1) - (175 - 5P_1) - 4P_1) - 4P_1 = -50$$

$$\Rightarrow -3P_1 = -15 \Rightarrow P_1 = 5$$

Οπότε με τις σχετικές αντικαταστάσεις λαμβάνουμε $P_2 = 60$ και $P_3 = 75$.

Με αντικατάσταση των τιμών στις συναρτήσεις προσφοράς κάθε προϊόντος λαμβάνουμε: $Q_1 = 5$, $Q_2 = 116$ και $Q_3 = 70$.

7) Ζήτηση για

π1: $q_{d1} = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$ (1)

π2: $q_{d2} = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3$ (2)

π3: $q_{d3} = c_0 + c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$ (3)

Προσφορά για

π1: $q_{s1} = d_0 + d_1p_1 + d_2p_2 + d_3p_3$ (4)

π2: $q_{s2} = e_0 + e_1p_1 + e_2p_2 + e_3p_3$ (5)

π3: $q_{s3} = h_0 + h_1p_1 + h_2p_2 + h_3p_3$ (6)

Οι συνθήκες ισορροπίας των 3 αγορών είναι:

$$q_{d1} = q_{s1} \Leftrightarrow q_{d1} - q_{s1} = 0 \quad (7)$$

$$q_{d2} = q_{s2} \Leftrightarrow q_{d2} - q_{s2} = 0 \quad (8)$$

$$q_{d3} = q_{s3} \Leftrightarrow q_{d3} - q_{s3} = 0 \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (4) στην (7), τις (2) και (5) στην (8) και τις (3) και (6) στην (9) λαμβάνουμε:

$$(a_0 - d_0) + (a_1 - d_1)p_1 + (a_2 - d_2)p_2 + (a_3 - d_3)p_3 = 0$$

$$(b_0 - e_0) + (b_1 - e_1)p_1 + (b_2 - e_2)p_2 + (b_3 - e_3)p_3 = 0$$

$$(c_0 - h_0) + (c_1 - h_1)p_1 + (c_2 - h_2)p_2 + (c_3 - h_3)p_3 = 0$$

Απλοποιούμε με $l_i = a_i - d_i$, $m_i = b_i - e_i$, $n_i = c_i - h_i$, όπου $i = 0, 1, 2, 3$.

$$\left.\begin{aligned} l_0 + l_1p_1 + l_2p_2 + l_3p_3 = 0 \\ m_0 + m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = 0 \\ n_0 + n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow p_3 = \frac{-l_0 - l_1p_1 - l_3p_2}{l_3}$$

$$\Leftrightarrow m_0 + m_1p_1 + m_2p_2 + m_3\left(\frac{-l_0 - l_1p_1 - l_2p_2}{l_3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow n_0 + n_1p_1 + n_2p_2 + n_3\left(\frac{-l_0 - l_1p_1 - l_2p_2}{l_3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{-l_0m_3n_2 + l_3m_0n_2 + l_0m_2n_3 - l_2m_0n_3 - l_3m_2n_0 + l_2m_3n_0}{-l_3m_2n_1 + l_2m_3n_1 + l_3m_1n_2 - l_1m_3n_2 - l_2m_1n_3 + l_1m_2n_3}$$

$$\Leftrightarrow p_2 = -\frac{l_0m_3n_1 - l_3m_0n_1 - l_0m_1n_3 + l_1m_0n_3 + l_3m_1n_0 - l_1m_3n_0}{-l_3m_2n_1 + l_2m_3n_1 + l_3m_1n_2 - l_1m_3n_2 - l_2m_1n_3 + l_1m_2n_3}$$

$$\Leftrightarrow p_3 = \frac{-l_0m_2n_1 + l_2m_0n_1 + l_0m_1n_2 - l_1m_0n_2 - l_2m_1n_0 + l_1m_2n_0}{-l_3m_2n_1 + l_2m_3n_1 + l_3m_1n_2 - l_1m_3n_2 - l_2m_1n_3 + l_1m_2n_3}$$

Κεφάλαιο 5: Πίνακες / Γραμμική Άλγεβρα

1) a) $(A+B) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 14 \\ 4 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & -6 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Η ορίζουσα μη τετραγωνικού πίνακα δεν ορίζεται.

2) Ορίζεται ο πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ με διαστάσεις (200×3) όπου α_{ij} = ο βαθμός του υποψηφίου i ($i = 1, ..., 200$) στο μάθημα j ($j = 1, 2, 3$).

Ορίζεται επίσης το διάνυσμα στήλη $\underline{w} = (w_j)$ με διαστάσεις (3×1) όπου $w_1 = 50\%$, $w_2 = 30\%$ και $w_3 = 20\%$.

Τότε οι τελικοί βαθμοί όλων των υποψηφίων δίνονται από το διάνυσμα στήλη $\underline{b} = (\beta_i)$, β_i ο τελικός βαθμός του i υποψηφίου $\underline{b} = A \cdot \underline{w}$ $\beta_i = \alpha_{i1} \cdot w_1 + \alpha_{i2} \cdot w_2 + \alpha_{i3} \cdot w_3$.

3) Με τη μέθοδο αναπτύγματος κατά Laplace (1η στήλη)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

ανάπτυγμα 1ης κατά την πρώτη στήλη της 2ης κατά τη δεύτερη και της 3ης κατά την πρώτη (τα μηδενικά στοιχεία παραλήπονται)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-6) + (4-15) = -23$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot(-4-5) + (2-2) = 27$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(4-15) - 2\cdot(12-6) = 11 - 12 = -1$$

$$|B| = -23 + 2\cdot 27 - 3(-1) = -23 + 54 + 3 = 34$$

Η ορίζουσα της B

Συμβολίζοντας τις στήλες του πίνακα B με σ_1, σ_2, σ_3 και σ_4 και με τη χρήση ιδιοτήτων οριζουσών, λαμβάνουμε:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-2\sigma_1 + \sigma_3 \to \sigma_3) \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-3\sigma_1 + \sigma_4 \to \sigma_4) \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -9 & -8 \end{vmatrix}$$

$$(-2\sigma_1 + \sigma_3 \to \sigma_3) \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & -18 \end{vmatrix}$$

$$(-\sigma_1 + \sigma_2 \to \sigma_2) \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -11 & -18 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -11 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(72-55) = 34$$

4) *Η ορίζουσα της A*

1. Με τη μέθοδο του επεκτεταμένου πίνακα

$$|A| = \left[\begin{matrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 & 4 \\ 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{matrix}\right. = 0\cdot 5\cdot 5 + 4\cdot 1\cdot 7$$

$$+ (-2)\cdot 3\cdot(-3) - 4\cdot 3\cdot 5 - 0\cdot 1\cdot(-3) - (-2)\cdot 5\cdot 7$$

$$= 0 + 28 + 18 - 60 - 0 + 70 = 56$$

2. Με τη μέθοδο αναπτύγματος κατά Laplace (1η γραμμή)

$$|A| = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot(25+3) - 4\cdot(15-7) + (-2)\cdot(-9-35)$$
$$= 0 - 32 + 88 = 56$$

3. Με χρήση ιδιοτήτων των οριζουσών

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(\sigma_2 + 2\sigma_3 \rightarrow \sigma_2) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(\text{Ανάπτυγμα Laplace})|A| = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot 7\cdot(3-7) = 56$$

5) Υπολογίζεται πρώτα η ορίζουσα:

$$|A| = (2\cdot 2 - 1\cdot 3) = (4-3) = 1 \neq 0$$

και στη συνέχεια τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα Α:

$$A_{11} = 2 \qquad A_{12} = -1$$
$$A_{21} = -3 \qquad A_{22} = 2$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα Β η ορίζουσα είναι:

$$|B| = \alpha d - cb$$

Τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα Β είναι:

$$B_{11} = d \qquad B_{12} = -c$$
$$B_{21} = -b \qquad B_{22} = \alpha$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$B^{-1} = \frac{1}{\alpha d - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \alpha \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα C η ορίζουσα είναι:

$$|C| = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(2-4) + 0 = 4 \neq 0$$

Τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα C είναι:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-4) = 4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

6) Τα αποτελέσματα έχουν βρεθεί μέσω του Excel

a) $3A + 2B - C = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 28 & 30 \end{vmatrix}$

b) $AB = \begin{vmatrix} -20 & 43 \\ 44 & 23 \end{vmatrix} \qquad BA = \begin{vmatrix} 56 & 77 \\ -8 & -53 \end{vmatrix}$

c) $BC = \begin{vmatrix} 28 & -21 \\ 20 & 17 \end{vmatrix} \qquad CB = \begin{vmatrix} 8 & 50 \\ -12 & 37 \end{vmatrix}$

7) Τα αποτελέσματα έχουν βρεθεί μέσω της συνάρτησης MMULT του Excel

$$AC = \begin{vmatrix} 41 \\ 88 \\ 113 \end{vmatrix} \qquad BA = |110 \quad 56 \quad 145| \qquad BC = 63$$

$$CB = \begin{vmatrix} 16 & 40 & 72 \\ 8 & 20 & 36 \\ 6 & 15 & 27 \end{vmatrix}$$

Κεφάλαιο 6: Συστήματα εξισώσεων σε μορφή πίνακα και εφαρμογές τους

1) A) $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ και $\underline{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$|A| = 15 - 24 = -9$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 4/9 & -5/9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -21/3 - 6/3 \\ 84/9 + 15/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27/3 \\ 99/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

B) $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ και } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(-2\sigma_2 + \sigma_1 \to \sigma_1) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(-5\sigma_2 + \sigma_3 \to \sigma_3) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 14 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -(77 - 56) = -21$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 + 15) = -11,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (4 + 10) = 14$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -(-12 + 8) = 4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 10) = 2,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 15) = 7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-9 - 4) = -13,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 2) = 4,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 3) = -7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} 20 & 4 & -13 \\ -11 & 2 & 4 \\ 14 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} 20 & 4 & -13 \\ -11 & 2 & 4 \\ 14 & 7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} 20 - 36 - 26 \\ -11 - 18 + 8 \\ 14 - 63 - 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -42 \\ -21 \\ -63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) **a)** Το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}
Q_1^D \quad & + 3P_1 - P_2 = 82 \\
Q_1^S \quad & - 15P_1 = -5 \\
Q_2^D \quad & - 2P_1 + 4P_2 = 92 \\
Q_2^S \quad & - 32P_2 = -6 \\
Q_1^D - Q_1^S \quad & = 0 \\
Q_2^D - Q_2^S \quad & = 0
\end{aligned}$$

σε μορφή πίνακα είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -32 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1^D \\ Q_1^S \\ Q_2^D \\ Q_2^S \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ -5 \\ 92 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Για τις τιμές και ποσότητες ισορροπίας απαιτείται ο υπολογισμός του A^{-1}.

Υπολογισμοί με τη βοήθεια συναρτήσεων του Excel MINVERSE για τον αντίστροφο και MMULT για τον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουν ως εξής:

Πίνακας A

1	0	0	0	3	−1
0	1	0	0	−15	0
0	0	1	0	−2	4
0	0	0	1	0	−32
1	−1	0	0	0	0
0	0	1	−1	0	0

Πίνακας A^{-1}

0,84	0,16	0,02	−0	0,16	−0
0,84	0,16	0,02	−0	−0,8	−0
0,1	−0,1	0,89	0,11	−0,1	0,11
0,1	−0,1	0,89	0,11	−0,1	−0,9
0,06	−0,1	0	−0	−0,1	−0
0	−0	0,03	−0	−0	−0

Διάνυσμα $\underline{b}$

82
−5
92
−6
0
0

Διάνυσμα $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

70	Q_1^D
70	Q_1^S
90	Q_2^D
90	Q_2^S
5	P_1
3	P_2

3) Λύνοντας το ακόλουθο σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους

$$2X + 3Y + 4{,}5Z = 55$$

$$9X + 5Y + 12Z = 139$$

$$7X + 6Y + 8Z = 108$$

προκύπτει η λύση: $X = 2,\ Y = 5,\ Z = 8.$

4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ k_1 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^* \\ b \\ d \\ M_S^* \end{bmatrix}, \quad r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & G^* \\ -a & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ k_1 & 0 & 0 & M_S^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ k_1 & 0 & 0 & k_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ k_1 & 0 & 0 & k_2 \end{vmatrix} = -k_1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{vmatrix} + k_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -k_1 \cdot (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -c \end{vmatrix} + k_2 \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\alpha & 1 \end{vmatrix} = ck_1 + k_2 \cdot (1 - a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & G^* \\ -a & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ k_1 & 0 & 0 & M_S^* \end{vmatrix} = -k_1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & G^* \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} + M_S^* \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -k_1 \cdot (-1)\begin{vmatrix} -1 & G^* \\ 1 & b \end{vmatrix} - k_1 \cdot d \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + M_S^* \cdot (-1 - a)$$

$$= k_1(-b - G^*) - k_1 \cdot d + M_S^* \cdot (1 - a)$$

Επομένως

$$r = \frac{k_1(-b - G^*) - k_1 \cdot d + M_S^* \cdot (1 - a)}{ck_1 + k_2 \cdot (1 - a)}$$

5)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-10 + 2) - 2(-4) = 0$$

Επομένως $\text{Rank}(A) < 3$.

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\text{Rank}(A) = 2$.

Εξετάζουμε την τάξη του A|B

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

με πράξεις γραμμών

$$(-2\gamma_1 + \gamma_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} (\gamma_2 + \gamma_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\text{Rank}(A|B) < 3$ και αναγκαστικά $\text{Rank}(A|B) = 2$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

6) a) Το διάνυσμα εκροών x δίνεται από τα στοιχεία της συνολικής ζήτησης

$$X = \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

b) Ο πίνακας των τεχνολογικών συντελεστών, A έχει ως στοιχεία τις αναλογίες (ποσοστά) που προκύπτουν διαιρώντας κάθε στοιχείο του πίνακα εισροών-εκροών με το σύνολο της στήλης στην οποία βρίσκεται.

$$A = \begin{pmatrix} 100/500 & 100/1000 \\ 200/500 & 500/1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + D = X \quad \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

c) Ο αντίστροφος του πίνακα Leontief θα είναι ίσος με:

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$|I - A| = 0{,}8 \cdot 0{,}5 - (-0{,}4) \cdot (-0{,}1) = 0{,}4 - 0{,}04 = 0{,}36$$

$$[I - A]^{-1} = \frac{1}{0{,}36}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}388 & 0{,}277 \\ 1{,}111 & 2{,}222 \end{bmatrix}$$

d) Το νέο διάνυσμα εκροών θα είναι:

$$X' = [I - A]^{-1} \cdot D' \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 1{,}388 & 0{,}277 \\ 1{,}111 & 2{,}222 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 450 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 693{,}85 \\ 1055{,}45 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου} \quad D' = \begin{bmatrix} 300 + 150 \\ 300 - 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 250 \end{bmatrix}$$

7) a) Έστω

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 105 & 12 & 150 & 25 \\ 75 & 34 & 130 & 20 \\ 47 & 17 & 100 & 60 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}25 \\ 1 - 0{,}30 \\ 1 - 0{,}35 \\ 1 - 0{,}40 \end{bmatrix}$$

Το αφορολόγητο κέρδος ανά κατάστημα είναι:

$$K = \text{price} \times \text{Quantity} - \text{Cost} \times \text{Quantity} = (\text{Price} - \text{Cost}) \times \text{Quantity}$$

Με πίνακες

$$K = P_{3\times1}Q_{3\times4} - C_{3\times1}Q_{3\times4}$$

ή

$$(P_{3\times1} - C_{3\times1})Q_{3\times4}$$

Αλλά για να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί, πρέπει οι πίνακες να είναι συμβατοί, δηλαδή:

$$P'_{1\times3}Q_{3\times4} - C'_{1\times3}Q_{3\times4}$$

ή

$$(P_{3\times1} - C_{3\times1})'Q_{3\times4}$$

$$(P_{3\times1} - C_{3\times1})' = \left(\begin{bmatrix}0,5\\0,7\\0,8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0,2\\0,4\\0,6\end{bmatrix}\right)' = \begin{bmatrix}0,3\\0,3\\0,2\end{bmatrix}' = [0,3 \quad 0,3 \quad 0,2]$$

$$(P_{3\times1} - C_{3\times1})'Q_{3\times4} = [0,3 \quad 0,3 \quad 0,2]\begin{bmatrix}105 & 12 & 150 & 25\\75 & 34 & 130 & 20\\47 & 17 & 100 & 60\end{bmatrix}$$

$$= 0,3\times105 + 0,3\times75 + 0,2\times47 + 0,3\times12 + 0,3\times34 + 0,2\times17$$
$$+ 0,3\times150 + 0,3\times130 + 0,2\times100 + 0,3\times25 + 0,3\times20 + 0,2\times60]$$
$$= [63,4 \quad 17,2 \quad 104 \quad 25,5] = K_{1\times4}$$

β) Το μετά φόρων, κέρδος της επιχείρησης είναι:

$$K_{1\times4}T_{4\times1} \quad ή \quad T'_{1\times4}K'_{4\times1}$$

$$[63,4 \quad 17,2 \quad 104 \quad 25,5]\begin{bmatrix}0,75\\0,70\\0,65\\0,60\end{bmatrix}$$

$$= [63,4\times0,75 + 17,2\times0,70 + 104\times0,65 + 25,5\times0,60] = [142,49]$$

8) $B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$ και έστω $A = \begin{bmatrix}\kappa & \lambda\\\mu & \nu\end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix}\kappa+2\mu & \lambda+2\nu\\2\kappa+3\mu & 2\lambda+3\nu\end{bmatrix}, \quad B+A = \begin{bmatrix}1+\kappa & 2+\lambda\\2+\mu & 3+\nu\end{bmatrix}$$

$$(B+A)^T = \begin{bmatrix}1+\kappa & 2+\mu\\2+\lambda & 3+\nu\end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

$$(B+A)^TB^{-1} = \begin{bmatrix}-3-3\kappa+4+2\mu & 2+2\kappa-2-\mu\\-6-3\lambda+6+2\nu & 4+2\lambda-3-\nu\end{bmatrix}$$

$$BA - 2(B+A)^TB^{-1} = I_{2\times2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\kappa+2\mu+6+6\kappa-8-4\mu & \lambda+2\nu-4-4\kappa+4+2\mu\\2\kappa+3\mu+12+6\lambda-12-4\nu & 2\lambda+3\nu-8-4\lambda+6+2\nu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7\kappa - 2\mu = 3\\-4\kappa + \lambda + 2\mu + 2\nu = 0\\2\kappa + 6\lambda + 3\mu - 4\nu = 0\\-2\lambda + 5\nu = 3\end{cases}$$

Λύνω με τη μέθοδο Cramer (η επίλυση μπορεί να γίνει εναλλακτικά με άλλες μεθόδους):

$$|\Gamma| = 7(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\6 & 3 & -4\\-2 & 0 & 5\end{vmatrix} + 0 - 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 1 & 2\\2 & 6 & -4\\0 & -2 & 5\end{vmatrix} + 0$$

$$= 7[-2(-1)^{3+1}(-8-6) + 0 + 5(-1)^{3+3}(3-12)]$$
$$- 2[0 - 2(-1)^{3+2}(16-4) + 5(-1)^{3+3}(-24-2)]$$
$$= 7(28+0-45) - 2(0+24-130) = 93$$

$$|\Gamma_\kappa| = \begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 2 & 2\\0 & 6 & 3 & -4\\3 & -2 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\6 & 3 & -4\\-2 & 0 & 5\end{vmatrix} + 0 - 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 6 & -4\\3 & -2 & 5\end{vmatrix} + 0$$

$$= 3[-2(-1)^{3+1}(-8-6) + 0 + 5(-1)^{3+3}(3-12)] -$$

$$-2[0 + 1(-1)^{1+2}(0+12) + 2(-1)^{1+3}(0-18)]$$

$$= 3(28 + 0 - 45) - 2(0 - 12 - 36) = 45$$

Άρα $\kappa = \frac{|\Gamma_\kappa|}{|\Gamma|} = \frac{45}{93} = \frac{15}{31}$

$$|\Gamma_\lambda| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} + 0 + 5(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3[7(-1)^{1+1}(-8-6) - 2(-1)^{1+2}(16-4) + 0]$$

$$+ 5[2(-1)^{3+1}(6-0) + 0 + 3(-1)^{3+3}(0+12)]$$

$$= 3(-98 + 24 + 0) + 5(12 + 0 + 36) = 18$$

Άρα $\lambda = \frac{|\Gamma_\lambda|}{|\Gamma|} = \frac{18}{93} = \frac{6}{31}$

$$|\Gamma_\mu| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 7[1(-1)^{1+1}(0+12) + 0 + 2(-1)^{1+3}(18-0)]$$

$$+ 3[0 - 2(-1)^{3+2}(16-4) + 5(-1)^{3+3}(-24-2)]$$

$$= 7(12 + 0 + 36) + 3(0 + 24 - 130) = 18$$

Άρα $\mu = \frac{|\Gamma_\mu|}{|\Gamma|} = \frac{18}{93} = \frac{6}{31}$

$$|\Gamma_\nu| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2[2(-1)^{3+1}(0-6) + 3(-1)^{3+2}(0+12) + 0]$$

$$+ 3[7(-1)^{1+1}(3-12) + 0 - 2(-1)^{1+3}(-24-2)]$$

$$= -2(-12 - 36) + 3(-63 + 52) = 63$$

Άρα $\nu = \frac{|\Gamma_\nu|}{|\Gamma|} = \frac{63}{93} = \frac{21}{31}$

Συνεπώς: $A = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{31} & \frac{6}{31} \\ \frac{6}{31} & \frac{21}{31} \end{bmatrix}$

Κεφάλαιο 7: Ανάλυση Ι: Παραγώγιση – Διαφορικός Λογισμός

1) **Συνάρτηση: y = f(x)**	**Παράγωγος: f′(x) ≡ dy/dx**
a) $6x^4$	$24x^3$
b) x	1
c) $4x^{-5}$	$-20x^{-6}$
d) $6(x-5)^{1/2}$	$3(x-5)^{-1/2}$
e) e^{3x}	$3e^{3x}$

f) $e^{4(x-2)^3}$ $\quad 12(x-2)^2e^{4(x-2)^3}$

g) $\log_e x^2$ $\quad \dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$

h) $\log_e(x-5)^{1/2}$ $\quad \dfrac{1}{2(x-5)}$

i) $6x+3x^{-4}+8x^2+9x^8+10$ $\quad 6-12x^{-5}+16x+72x^7$

j) $6x-2x^{-1}+6x^3-20(x-2)^2$ $\quad 6+2x^{-2}+18x^2-40(x-2)$
$= 18x^2-40x+2x^{-2}+86$

k) $e^x(x-2)^{1/2}$ $\quad e^x\dfrac{1}{2}(x-2)^{-1/2}+(x-2)^{1/2}e^x$

l) $(3x-2+6x^2)(6x-1)^{-4}$ $\quad -24(3x-2+6x^2)(6x-1)^{-5}$
$+(6x-1)^{-4}(3+12x)$

m) $\dfrac{(2x-3)}{5x}$ $\quad \dfrac{5x(2)-(2x-3)5}{(5x)^2}=\dfrac{3}{5x^2}$

n) $\dfrac{x^5+3x}{(7x-1)^2}$ $\quad \dfrac{(7x-1)^2(5x^4+3)-(x^5+3x)14(7x-1)}{(7x-1)^4}$

$$=\frac{(7x-1)(5x^4+3)-(x^5+3x)14}{(7x-1)^3}$$

2) a. Πεπλεγμένη συνάρτηση $3x^2-y^5=10$

$$\frac{d}{dx}(3x^2-y^5)=\frac{d}{dx}(10)\Rightarrow\frac{d}{dx}(3x^2)-\frac{d}{dx}(y^5)=0$$

$$\Rightarrow 6x-5y^4\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{5y^4}$$

b. Συνάρτηση: $x^3y^2=-3$

$$\frac{d}{dx}(x^3y^2)=\frac{d}{dx}(-3)\Rightarrow x^3\frac{d}{dx}(y^2)+y^2\frac{d}{dx}(x^3)=0$$

$$\Rightarrow x^3 2y\frac{dy}{dx}+y^2 3x^2=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y^2}{2x^3y}=-\frac{3y}{2x}$$

c. Συνάρτηση: $6x^2+4xy-2y^3=5$

$$\frac{d}{dx}(6x^2)+\frac{d}{dx}(4xy)-\frac{d}{dx}(2y^3)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$\Rightarrow 12x+\left[4x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\cdot 4\right]-6y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 12x+4y+(4x-6y^2)\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{12x+4y}{6y^2-4x}$$

3) $z=x^2-y^2$, όπου $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(x^2-y^2)}{dt}=\frac{d(x^2)}{dt}-\frac{d(y^2)}{dt}=\frac{d(x^2)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=2x(e^t\cos t)-2y(e^t\sin t)=2e^t\cos t(e^t\cos t-e^t\sin t)$$

$$-\ 2e^t\sin t(e^t\sin t+e^t\cos t)=2e^{2t}(\cos^2 t-\sin^2 t-2\cos t\sin t)$$

$$=2e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)$$

$z=x^3y^2$, όπου $x=e^t$, $y=(1+t)^2$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(x^3y^2)}{dt}=\frac{d(x^3)}{dt}y^2+\frac{d(y^2)}{dt}x^3=\frac{d(x^3)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}y^2+\frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}x^3$$

$$=3x^2e^ty^2+2y2(1+t)x^3=3e^{2t}e^t(1+t)^4+4(1+t)^2(1+t)e^{3t}$$

$$=3e^{3t}(1+t)^4+4(1+t)^3e^{3t}=e^{3t}(1+t)^3(7+3t)$$

$z=x\cos y$, όπου $x=e^t$, $y=1+t^2$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(x\cos y)}{dt}=\frac{d(x)}{dt}\cos y+\frac{d(\cos y)}{dt}x$$

$$=e^t\cos(1+t^2)-\sin(1+t^2)2te^t=e^t(\cos(1+t^2)-2t\sin(1+t^2))$$

4) Ο ρυθμός διάδοσης της καινοτομίας είναι:

$$N'(t)=-\frac{A}{(1+be^{-ct})^2}(-bce^{-ct})=N(t)\frac{bce^{-ct}}{1+be^{-ct}}=N(t)\frac{bc}{e^{ct}+b}$$

Ο μέγιστος ρυθμός διάδοσης επιτυγχάνεται όταν $N''(t)=0$.

$$N''(t) = N'(t)\frac{bc}{e^{ct}+b} + N(t)\left(-\frac{bc}{(e^{ct}+b)^2}\right)ce^{ct}$$

$$= N(t)\left(\frac{bc}{e^{ct}+b}\right)^2 - N(t)\frac{bc^2e^{ct}}{(e^{ct}+b)^2} = N(t)\frac{bc^2}{(e^{ct}+b)^2}(b-e^{ct})$$

$N''(t) = 0 \Rightarrow b = e^{ct}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για N(t) έχουμε:

$$N(t) = \frac{A}{1+be^{-ct}} = \frac{A}{1+e^{ct}e^{-ct}} = \frac{A}{2}$$

5) a) $\varepsilon_d = (dq/dp)(p/q) = (-4)[p/(20-4p)] = -4p/(20-4p)$.

b) $p = 4 \Rightarrow \varepsilon_d = -16/(20-16) = -4$ (Ζήτηση Ελαστική).

c) Ελαστική ζήτηση

d) $\varepsilon_d = -1 \Rightarrow -4p/(20-4p) = -1 \Rightarrow -20+4p = -4p \Rightarrow p = 20/8 = 2{,}5$

6) a) $\varepsilon = (dq/dp)/(p/q)$

$dq/dp = -4$

Όταν $p = 1$, $q = 12$, και $\varepsilon = -1/3$. Επομένως, η ζήτηση είναι ανελαστική ως προς την τιμή στο σημείο $(p = 1, q = 12)$.

b) Η καμπύλη ζήτησης είναι ανελαστική στο διάστημα $-1 \le \varepsilon \le 0$. Έτσι,

$$\varepsilon = -1 = -4(p/q) \Rightarrow -1 = -4[p/(16-4p)], \quad \text{άρα} \quad p = 2$$
$$\varepsilon = \ \ 0 = -4(p/q) \Rightarrow \ \ 0 = -4[p/(16-4p)], \quad \text{άρα} \quad p = 0$$

Επομένως, η ζήτηση είναι ανελαστική στο διάστημα τιμών [0, 2).

7) a) $dq/dp = cap^{a-1}$,

$(dq/dp)(p/q) = c \cdot a \cdot p^{a-1}(p/q) = c \cdot a \cdot p^a/q = a \cdot q/q = a$

b) $R = p \cdot q \Rightarrow dR/dp = q + p(dq/dp) = q[1 + (p/q)(dq/dp)]$

$= q(1+a)$

c) $MR = dR/dq = p + q(dp/dq) = p[1 + (q/p)(dp/dq)]$

$= p(1 + 1/a)$

d) $MR > 0 \Rightarrow 1 + 1/a > 0 \Rightarrow 1/a > -1 \Rightarrow 1 < -a$

$(a < 0)$ ή $a < -1$

$MR = 0 \Rightarrow 1 + 1/a = 0 \Rightarrow a = -1$

$MR < 0 \Rightarrow 1 + 1/a < 0 \Rightarrow 1/a < -1 \Rightarrow 1 > -a$

$(a < 0)$ ή $a > -1$

8) $dR/dt = R'(x)(dx/dt) = (120(80 + 4t^2/5) - 4500)(8t/5)$

$= (9600 + 96t^2 - 4500)(8t/5) = 8160t + 153{,}6t^3$

$dC/dt = C'(x)(dx/dt)[0{,}3(80 + 4t^2/5)^2 - 40(80 + 4t^2/5) + 800](8t/5)$

$$d\Pi/dt = \left[-0{,}3\left(80 + \frac{4t^2}{5}\right)^2 + 160\left(80 + \frac{4t^2}{5}\right) - 5300\right]\left(\frac{8t}{5}\right)$$

9) Έστω y(t) η αξία του οικοπέδου. Η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας του σε σχέση με τον χρόνο είναι $(dy/y)/dt$. Επομένως, εφ όσον $(dy/y)/dt > 10\%$ δεν συμφέρει να πωληθεί το οικόπεδο. Θα πωληθεί όταν το ποσοστό $(dy/y)/dt$ είναι $< 10\%$. Για εκθετικές συναρτήσεις ισχύει ότι:

$$y = \alpha^t \rightarrow y = e^{t\ln\alpha}$$

$$y = \alpha^{f(t)} \rightarrow y = e^{f(t)\ln\alpha}$$

$$\frac{dy}{dt} = \ln(\alpha)f'(t)e^{f(t)\ln\alpha} = \ln(\alpha)f'(t)y \Rightarrow \frac{dy/y}{dt} = \ln(\alpha)f'(t)$$

Εφαρμόζοντας στην προκειμένη περίπτωση:

$$\ln(\alpha)f'(t) = \ln(1{,}5)\frac{1}{2\sqrt{t}} = 0{,}1$$

$$\Rightarrow 0{,}2\sqrt{t} = \ln(1{,}5) \simeq 0{,}4 \Rightarrow \sqrt{t} \simeq 2 \Rightarrow t \simeq 4$$

10) a) $\Pi = TR - TC = pq - (2q^2 + 10q)$

$= (30 - 3q)q - (2q^2 + 10q) = -5q^2 + 20q$

Εναλλακτικά, εφόσον η συνάρτηση ζήτησης είναι $q = 10 - \frac{1}{3}p$,

$\Pi = -300 + \frac{80}{3}p - \frac{5}{9}p^2$.

$d\Pi/dq = 0 \Rightarrow -10q + 20 = 0 \Rightarrow q = 2, \quad p = 24$

b) $\varepsilon = (dq/dp)(p/q) = ((-1/3)(30 - 3q)/q) = -(30 - 3q)/3q$

για $q = 2$ $\varepsilon = -24/6 = -4$.

c) Η συνάρτηση ζήτησης είναι $q = 10 - \frac{1}{3}p$. Δεδομένης της φορολογίας $q = 10 - \frac{1}{3}(p+t)$.

$$TR = p \cdot q = p(10 - (p+t)/3)$$

$$TC = 2(10 - (p+t)/3)^2 + 10(10 - (p+t)/3)$$

Η συνάρτηση κερδών λαμβάνοντας υπόψη τη φορολογία είναι:

$$\Pi = -300 + \frac{80}{3}(p+t) - \frac{5}{9}(p+t)^2$$

$$\text{ΚΠΠ}: \frac{d\Pi}{dp} = 0 : \frac{80}{3} - \frac{10}{9}(p+t) = 0 \Rightarrow p = 24 - t$$

Φορολογικά έσοδα:

$$TX = tq = t(10 - (p+t)/3) = 10t - \frac{1}{3}pt - \frac{1}{3}t^2$$

Για μέγιστο ΤΧ, ΚΠΠ:

$$\frac{d(TX)}{dt} = 10 - \frac{1}{3}p - \frac{2}{3}t = 0 \Rightarrow t^* = 15 - 0{,}5p$$

Τα φορολογικά έσοδα είναι συνάρτηση της τιμής του προϊόντος, p.

ΚΔΠ: $\frac{d^2(TX)}{dt^2} = -\frac{2}{3} < 0$, επομένως μέγιστο.

Στο μέγιστο σημείο παραγωγής για την επιχείρηση, q = 2. Επομένως, μέγιστη φορολογία όταν η επιχείρηση λειτουργεί στο σημείο μεγιστοποίησης των κερδών της είναι

$$t^*(q = 2) = 15 - 0{,}5 \cdot 2 = 14$$

11) a) Οι συναρτήσεις μέσου (AC) και οριακού κόστους παραγωγής (MC) είναι:

$$TC = 3x + 8x^2 + 2x^3$$

$$AC = \frac{TC}{x} = 3 + 8x + 2x^2$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dx} = 3 + 16x + 6x^2$$

b) Το συνολικό, μέσο και οριακό κόστος παραγωγής όταν η επιχείρηση παράγει 5 μονάδες προϊόντος είναι:
Για x = 5:

$$TC = 15 + 200 + 250 = 465$$

$$AC = 3 + 40 + 50 = 93$$

$$MC = 3 + 80 + 150 = 233$$

c) Οι συναρτήσεις μέσων (AR) και οριακών εσόδων (MR) είναι:

$$TR = 20x - 3x^2$$

$$AR = \frac{TR}{x} = 20 - 3x$$

$$MR = \frac{d(TR)}{dx} = 20 - 6x$$

d) Το ύψος των συνολικών, μέσων και οριακών εσόδων όταν η επιχείρηση παράγει και πουλάει 5 μονάδες του προϊόντος είναι:
Για x = 5:

$$TR = 100 - 75 = 25$$

$$AR = 20 - 15 = 5$$

$$MR = 20 - 30 = -10$$

e) Η συνάρτηση κερδών της επιχείρησης είναι:

$$\pi = TR - TC = 20x - 3x^2 - 3x - 8x^2 - 2x^3 = 17x - 11x^2 - 2x^3$$

f) Το σημείο παραγωγής στο οποίο η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της είναι: ΚΠΠ για μέγιστο:

$$\frac{d\pi}{dx} = 0$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 17 - 22x - 6x^2 = 0$$

Ρίζες $x_1 = 0{,}66$ και $x_2 = -4{,}33$. Η τελευταία τιμή $x_2 = 4{,}33$ απορρίπτεται - αρνητική ποσότητα παραγωγής.
ΚΔΠ για μέγιστο:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -22 - 12x$$

Για $x_1 = 0{,}66$:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -22 - 12(0{,}66) = -29{,}92 < 0$$

Επομένως πρόκειται για μέγιστο.

g) Το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτύχει η επιχείρηση βρίσκεται αντικαθιστώντας την τιμή $x = 0{,}66$ στην ακόλουθη εξίσωση των κερδών

$$\pi = 17x - 11x^2 - 2x^3$$

Για $x = 0{,}66$: $\pi = 5{,}85$.

h) Το επίπεδο παραγωγής στο οποίο η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα έσοδά της βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{d(TR)}{dx} = 20 - 6x = 0 \quad \text{Επομένως } x = 3{,}33$$

$$\frac{d^2(TR)}{dx^2} = -6 < 0 \quad \text{Επομένως πρόκειται για μέγιστο}$$

Για $x = 3{,}33$, $\pi = -139{,}2$.

i) Το σημείο παραγωγής και τα μέγιστα κέρδη στα σημεία παραγωγής όπου μεγιστοποιούνται τα κέρδη και τα έσοδα είναι, αντίστοιχα. Όταν σκοπός είναι η μεγιστοποίηση κερδών: $x = 0{,}66$, $\pi = 5{,}85$.
Όταν σκοπός είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων: $x = 3{,}33$, $\pi = -139{,}2$.
Η επιχείρηση έχει ζημίες (στο παράδειγμα αυτό) εάν θέσει ως στόχο της τη μεγιστοποίηση των εσόδων και όχι του κέρδους. Αυτό συμβαίνει διότι κατά τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης των συνολικών εσόδων δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος παραγωγής, το οποίο υπεισέρχεται στη συνάρτηση των κερδών.

12) Συνάρτηση κόστους μεταφοράς: $KM = 400.000x^{-1} + 10$.
Συνάρτηση κόστους αποθήκευσης: $KA = 17{,}5x/100.000$.
Συνάρτηση συνολικού κόστους:

$$\Sigma K = KM + KA = (400.000x^{-1} + 10) + (17{,}5x/100.000)$$

Το ΚΠΠ για ελάχιστο είναι: $d(\Sigma K)/dx = 0$:

$$d(\Sigma K)/dx = -400.000x^{-2} + 0{,}000175 = 0$$

Επομένως, $x = 47.809$ μονάδες, και $\Sigma K|_{x=47.809} = 26,73/\text{μονάδα}$.

Το ΚΔΠ είναι: $d^2(\Sigma K)/dx^2 = 800.000x^{-3}$, το οποίο είναι θετικό για $x = 47.809$ μονάδες.
Επομένως, η λύση δίνει το ελάχιστο.

15) Σύμφωνα μα την ανάπτυξη των σειρών Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f^2(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^3(0)x^3 + \dots$$

a) $f(x) = \log_e(1+x)$ $\qquad f(0) = \log_e(1+0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = (1+0)^{-1} = \frac{1}{(1+0)} = 1$$

$$f^2(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2} \qquad f^2(0) = -(1+0)^{-2} = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f^3(x) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2(1+x)^{-3} \qquad f^3(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

$$f^4(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} = -6(1+x)^{-4} \qquad f^4(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6$$

κ.λπ.
Επομένως

$$\log_e(1+x) = 0 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}(-1)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2\cdot x^3 + \frac{1}{4!}(-6)x^4 + \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε για την επίλυση των μερών (b) και (c) της άσκησης.

Κεφάλαιο 8: Ανάλυση Ι: Παραγώγιση – Πολυμεταβλητές Συναρτήσεις

1) $z_x = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}(-\text{ημ}x)$

$z_y = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}\text{συν}y$

$z_{xx} = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}(-\text{ημ}x) + e^{x+y}(-\text{ημ}x) + e^{x+y}(-\text{συν}x)$

$z_{yy} = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}\text{συν}y + e^{x+y}\text{συν}y + e^{x+y}(-\text{ημ}y)$

$$z_{xy} = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}\text{συν}y + e^{x+y}(-\text{ημ}x)$$

$$z_{yx} = e^{x+y}(\text{συν}x + \text{ημ}y) + e^{x+y}(-\text{ημ}x) + e^{x+y}\text{συν}y$$

2) **a)** $z = e^{x^2+y^2}$

$$z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2},\ z_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2},\ z_{xx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$$

$$z_{yy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2},\ z_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xe^{x^2+y^2})}{\partial y} = 4xye^{x^2+y^2}$$

$$z_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xe^{x^2+y^2})}{\partial y} = 4xye^{x^2+y^2}$$

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

c) $z = \ln(\sin x + \cos y)$

$$z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos y},\ z_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sin y}{\sin x + \cos y}$$

$$z_{xx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-\sin x(\sin x + \cos y) - \cos x(\cos x)}{(\sin x + \cos y)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \sin x \cos y - \cos^2 x}{(\sin x + \cos y)^2} = \frac{-1 - \sin x \cos y}{(\sin x + \cos y)^2}$$

$$z_{yy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-\cos y(\sin x + \cos y) + \sin y(-\sin y)}{(\sin x + \cos y)^2}$$

$$= \frac{-\cos y \sin x - \cos^2 y - \sin^2 y}{(\sin x + \cos y)^2} = \frac{-1 - \sin x \cos y}{(\sin x + \cos y)^2}$$

$$z_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos y}\right)}{\partial y} = \frac{\cos x \sin y}{(\sin x + \cos y)^2}$$

$$Z_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{-\sin y}{\sin x + \cos y}\right)}{\partial x} = \frac{\sin y \cos x}{(\sin x + \cos y)^2}$$

3) Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:

$$z_x = -2x + y + 2 = 0$$

$$z_y = x - 2y + 1 = 0$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού προκύπτει $x = 5/3$ και $y = 4/3$. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης μας δίνουν:

$$|H| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (4-1) = 3 > 0$$

Δεδομένου ότι z_{xx}, $z_{yy} < 0$ και $|H| > 0$ υπάρχει μέγιστο στη συνάρτηση, το $z(5/3, 4/3) = 21/9$.

4) **a)** $z|_{x=40,\, y=20} = 2.768.000$ μονάδες.

b) $\partial z/\partial x = 50.000 - 20x - 10y$.

Επομένως,
$\partial z/\partial x|_{x=40,\, y=20} = 49.000$.
$\partial z/\partial y = 40.000 - 40y - 10x$.
Επομένως, $\partial z/\partial y|_{x=40,\, y=20} = 38.800$.

Επομένως, οι αποδόσεις από την τηλεοπτική διαφήμιση είναι μεγαλύτερες.

c) ΚΠΠ:

$$\partial z/\partial x = 50.000 - 20x - 10y = 0$$

$$\partial z/\partial y = 40.000 - 40y - 10x = 0$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει: $x = 2285{,}72$ και $y = 428{,}57$.

Για το ΚΔΠ, προκύπτει ότι στο ακρότατο, η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα είναι 700, και, $\partial^2 z/\partial x^2 < 0$, $\partial^2 z/\partial y^2 < 0$, επαληθεύοντας ότι η

παραπάνω λύση δίνει το μέγιστο της συνάρτησης. Στο μέγιστο: z = 65.714.296 μονάδες.

5) Το ελάχιστο των τετραγώνων των αποκλίσεων των σημείων Y_i από τη μέση τιμή τους ($\hat{Y}_i = b_1 + b_2X_i$), δηλαδή των $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_1 - b_2X_i)^2$ μπορεί να εξαχθεί ελαχιστοποιώντας την τελευταία συνάρτηση ως προς b_1 και b_2. Δηλαδή

$$\min S = \min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \min \sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_1 - b_2X_i)^2$$

ΚΠΠ:

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = -2\sum(Y_i - b_1 - b_2X_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_2} = -2\sum X_i(Y_i - b_1 - b_2X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = nb_1 + b_2\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = b_1\sum_{i=1}^{n} X_i + b_2\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 \qquad (2)$$

$(1) \times \sum X_i$: $\quad \sum X_i \sum Y_i = nb_1 \sum X_i + b_2(\sum X_i)^2 \qquad (3)$

$(2) \times n$: $\quad n\sum Y_iX_i = nb_1 \sum X_i + nb_2 \sum X_i^2 \qquad (4)$

$(4) - (3)$: $\quad n\sum Y_iX_i - \sum X_i \sum Y_i = b_2[n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] \qquad (5)$

Επομένως,

$$b_2 = \frac{n\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2} \qquad (6)$$

Όπου $x_i = X_i - \overline{X}$, $y_i = Y_i - \overline{Y}$, $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$.

Αντικαθιστώντας την (6) στην εξίσωση (1) προκύπτει: $b_1 = \overline{Y} - b_2\overline{X}$

6) $\max U(x, y) = 4x^{1/2}y^{1/2}$ υπό τον περιορισμό $2x + 4y = 100$.

Η συνάρτηση Lagrange έχει την ακόλουθη μορφή:

$$L = 4x^{1/2}y^{1/2} + \lambda(100 - 2x - 4y)$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{4}{2}x^{-1/2}y^{1/2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{4}{2}x^{1/2}y^{-1/2} - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 100 = 0$$

Από την επίλυση του συστήματος (3 × 3) λαμβάνονται τα ακόλουθα αποτελέσματα: $x = 25$, $y = 12{,}5$ και $\lambda = \sqrt{12{,}5}/5$.

Από τις συνθήκες δεύτερης τάξης προκύπτει:

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -x^{-3/2}y^{1/2} & x^{-1/2}y^{-1/2} \\ 4 & x^{-1/2}y^{-1/2} & -x^{1/2}y^{-3/2} \end{vmatrix}$$

$$= -2(-2x^{1/2}y^{-3/2} - 4x^{-1/2}y^{-1/2}) + 4(2x^{-1/2}y^{-1/2} + 4x^{-3/2}y^{1/2}) > 0$$

οπότε διασφαλίζεται η ύπαρξη μέγιστου στο ακρότατο σημείο.

7) $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)]$$

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - 6y^2 + \lambda(6 - x - 2y)$$

ΚΠΠ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -12y - 2\lambda = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{6} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 6 = 0 \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (1) και (2) στην (3) λαμβάνουμε:

$$\frac{\lambda}{4} - 2\frac{\lambda}{6} - 6 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 4\lambda - 72 = 0 \Rightarrow \lambda = -72,\ x = -18,\ y = 12$$

Υπάρχει πιθανό ακρότατο στο $x = -18$, $y = 12$.

ΚΔΠ:
Εξετάζουμε την HB

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv g_x = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \equiv g_y = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \equiv L_{11} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \equiv L_{22} = -12, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \equiv L_{12} = 0$$

$$HB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -12 \end{bmatrix},$$

$$|HB_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-12) + 2(-8) = 12 - 16 = -4$$

Επομένως, στο σημείο $x = -18$, $y = 12$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο.

8) $$y = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} + 2x_1 + x_2$$

$$= x_1^2 + 3x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2$$

ΚΠΠ

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2 - x_2 + 2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_1 - x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

$$x_1 = -3/2, \; x_2 = 1/2$$

ΚΔΠ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad H_1 = 2 > 0,$$

$$H_2 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 > 0, \quad \text{επομένως ελάχιστο}$$

9) $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)]$$

$$L(x, y, \lambda) = x + y^2 + \lambda(1 - 2x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 4\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 2y(1 - \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ΚΠΠ:

Περίπτωση 1 ($y = 0$, $\lambda \neq 1$):

A) $y = 0 :\to x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \to \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **B)** $y = 0 :\to x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \to \lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Περίπτωση 2 ($y \neq 0$, $\lambda = 1$):

C) $\lambda = 1 :\to x = \dfrac{1}{4} \to y = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$ **D)** $\lambda = 1 :\to x = \dfrac{1}{4} \to y = -\sqrt{\dfrac{7}{8}}$

ΚΔΠ – Εξετάζουμε την HB:

$$g_x \equiv \frac{\partial g}{\partial x} = 4x, \quad g_y \equiv \frac{\partial g}{\partial y} = 2y,$$

$$L_{11} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 4\lambda, \quad L_{22} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 - 2\lambda = 2(1 - \lambda), \quad L_{12} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$HB = \begin{bmatrix} 0 & 4x & 2y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix}$$

Ανάπτυγμα 3ης σειράς:

$$|HB| = 2y\begin{vmatrix} 4x & 2y \\ -4\lambda & 0 \end{vmatrix} + (2-2\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 4x \\ 4x & -4\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 2y(0+8\lambda y) + (2-2\lambda)(0-16x^2) = 16\lambda y^2 - 16x^2(2-2\lambda)$$

Επομένως:

Περίπτωση 1

A) $y = 0, \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$|HB| = (-16)(1/2)(2-2\sqrt{2}/4) = -10{,}34 < 0$$

B) $y = 0, \rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$|HB| = (-16)(1/2)(2+2\sqrt{2}/4) = -21{,}66 < 0$$

Περίπτωση 2

C) $\lambda = 1, \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$$|HB| = (-16)(1)(\sqrt{7/8})^2 = 14 > 0$$

D) $\lambda = 1, \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow y = -\sqrt{\frac{7}{8}}$

$$|HB| = (16)(1)(-\sqrt{7/8})^2 = 14 > 0$$

Τα σημεία A και B αντιστοιχούν σε ελάχιστο, ενώ τα σημεία C και D αντιστοιχούν σε μέγιστο.

10) Διαμορφώνεται η Λαγκραζιανή συνάρτηση ως:

$$L = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_2x_3 + \lambda(1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

Λαμβάνοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους της Λαγκραζιανής ως προς x_1, x_2, x_3, και λ, και λύνοντας το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων, προκύπτει η ακόλουθη λύση:

$$x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = 0, \quad \left(\lambda = \frac{2}{5}\right)$$

11) a) $\frac{\partial q}{\partial P_q} = -5, \ \frac{\partial q}{\partial P_y} = 3, \ \frac{\partial q}{\partial I} = 4$

b) $\varepsilon_{pq} = \frac{\partial q/q}{\partial P_q/P_q} = \frac{\partial q}{\partial Pq}\frac{Pq}{q} = -5\frac{P_q}{q}$

$$\varepsilon_I = \frac{\partial q/q}{\partial I/I} = \frac{\partial q}{\partial I}\frac{I}{q} = 4\frac{I}{q}$$

$$\varepsilon_{qy} = \frac{\partial q/q}{\partial P_y/P_y} = \frac{\partial q}{\partial P_y}\frac{P_y}{q} = 3\frac{P_y}{q}$$

c) Όταν $P_q = 1$, $P_y = 1$, $I = 1$ τότε $q = 5$. Επομένως:

i) $\varepsilon_{pq} = -5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ μοναδιαία ελαστικότητα

ii) $\varepsilon_I = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} > 0$ η ηλεκτρική ενέργεια είναι φυσιολογικό αγαθό

iii) $\varepsilon_{qy} = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} > 0$ τα αγαθά ηλεκτρική ενέργεια και φυσικό αέριο είναι υποκατάστατα μεταξύ τους

d) Όταν $P_q = \frac{4}{5}$, $P_y = 1$, $I = 1$, $q = 6$ επομένως:

$$\varepsilon_{pq} = -5\frac{\frac{4}{5}}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

δηλαδή ανελαστική ζήτηση για ηλεκτρική ενέργεια σε αυτό το σημείο. Επομένως η ζήτηση δεν είναι μοναδιαίως ελαστική στο σημείο αυτό.

12)
$$f(\alpha, \beta) = [\alpha \quad \beta \quad 1-\alpha-\beta]\begin{bmatrix} 10\% \\ 20\% \\ 5\% \end{bmatrix}$$

$$-\lambda[\alpha \quad \beta \quad 1-\alpha-\beta]\begin{bmatrix} 1\% & 1{,}5\% & 0 \\ 1{,}5\% & 5\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$$= (0{,}10\alpha + 0{,}20\beta + 0{,}05(1-\alpha-\beta))$$

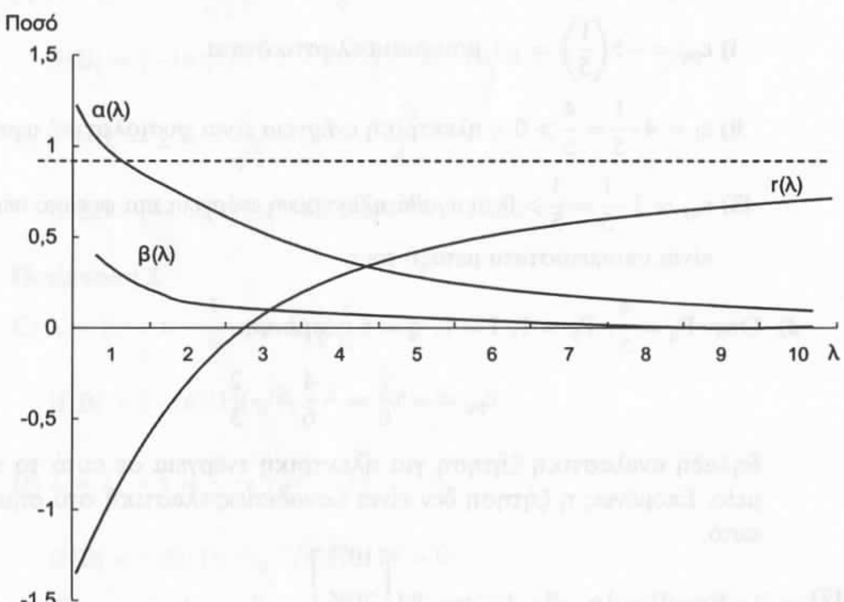
$$-\lambda[0{,}01\alpha + 0{,}015\beta \quad 0{,}015\alpha + 0{,}09\beta \quad 0]\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$$= 0{,}05\alpha + 0{,}15\beta + 0{,}05 - \lambda[\alpha(0{,}01\alpha + 0{,}015\beta) + \beta(0{,}015\alpha + 0{,}09\beta) + 0]$$

$$= 0{,}05\alpha + 0{,}15\beta + 0{,}05 - 0{,}01\lambda\alpha^2 - 0{,}09\lambda\beta^2 - 0{,}030\lambda\alpha\beta$$

ΚΠΠ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow 0{,}05 - 0{,}02\lambda\alpha - 0{,}030\lambda\beta = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow 0{,}15 - 0{,}18\lambda\beta - 0{,}030\lambda\alpha = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1{,}25}{0{,}75\lambda} \\ \beta = \dfrac{0{,}0135}{0{,}0243\lambda} \end{array}\right.$$



Ποσοστό του πλούτου του επενδυτή που έχει επενδυθεί στα αξιόγραφα με κίνδυνο (δηλαδή στις μετοχές) Α και Β (α και β, αντίστοιχα) και στο αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο (δηλαδή στον τραπεζικό λογαριασμό) (1 – α – β = r) ως συνάρτηση του συντελεστή αποστροφής του κινδύνου λ.

ΚΔΠ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = (-0{,}02\lambda)(-0{,}18\lambda) = 0{,}0036\lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} = -0{,}030\lambda$$

άρα όχι σαγματικό σημείο – υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο, και αφού $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} < 0$, το ακρότατο σημείο είναι μέγιστο.

Κεφάλαιο 9: Ανάλυση ΙΙ: Ολοκλήρωση – Ολοκληρωτικός Λογισμός

1) $\int dx = x + c$

$$\int 6x^6 dx = \frac{6}{7}x^7 + c$$

$$\int 7x^{-1} dx = 7\ln|x| + c$$

$$\int (3x+2)^{10} dx = \frac{1}{11} \times \frac{1}{3}(3x+2)^{11} + c = \frac{1}{33}(3x+2)^{11} + c$$

$$\int \frac{8x^7}{x^8} dx = 8\ln x + c = \ln x^8 + c$$

$$\int (6x^3 - 7x^2 + 3x + 1)dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

$$\int_1^4 5x^3 dx = \left[\frac{5}{4}x^4\right]_1^4 = 320 - \frac{5}{4} = 318{,}75$$

$$\int_{-1}^{1} (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_{-1}^{1} = 4 - (-2) = 6$$

2) $MC = \dfrac{dC}{dQ} \Rightarrow dC = MCdQ \Rightarrow C = \int MCdQ$

$C = \int (2 + 0{,}4Q)dQ = 2Q + \frac{0{,}4}{2}Q^2 + F$, όπου F το σταθερό κόστος

$$C = \int (2 - 4Q + 3Q^2) \cdot dQ = 2Q - \frac{4}{2}Q^2 + \frac{3}{3}Q^3 + F$$

a) Για $Q = 4 \;: C = 2\cdot 4 + 0{,}2\cdot 4^2 + F = 8 + 3{,}2 + F = 11{,}2 + F$

Για $Q = 10 : C = 2\cdot 10 + 0{,}2\cdot 10^2 + F = 20 + 20 + F = 40 + F$

b) Για $Q = 4 \;: C = 2\cdot 4 - 2\cdot 4^2 + 4^3 + F = 8 - 32 + 64 + F = 40 + F$

Για $Q = 10 : C = 2\cdot 10 - 2\cdot 10^2 + 10^3 + F$

$= 20 - 200 + 1000 + F = 820 + F$

3) $$S = \int\left(0{,}5 + \frac{0{,}3}{\sqrt{Y}}\right)\cdot dY = 0{,}5Y + \frac{0{,}3}{1/2}Y^{1/2} + c = 0{,}5Y + 0{,}6\sqrt{Y} + c$$

$$Y = 30,\ S = -5 \Rightarrow c = -5 - 15 - 0{,}6\sqrt{30} = -23{,}3$$

4) α) $R = pq = q\ 12{,}50\ e^{-0{,}005q}$.

ΚΠΠ:

$$\frac{dR}{dq} = 12,50e^{-0{,}005q} + q\ 12{,}50\ e^{-0{,}005q}(-0{,}005)$$

$$= 12{,}50\ e^{-0{,}005q}(1 - 0{,}005q) = 0$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{0{,}005} = 200 \quad \text{και} \quad p^* = 12{,}50\ e^{-1} = 4{,}60$$

ΚΔΠ:

$$\frac{d^2R}{dq^2} = 12{,}50e^{-0{,}005q}(-0{,}005) - (0{,}005)12{,}50e^{-0{,}005q}$$

$$-\ 0{,}005q12{,}50e^{-0{,}005q}(-0{,}005)$$

$$= 12{,}50e^{-0{,}005q}(-0{,}01 + 0{,}005^2q) < 0 \quad \text{για} \quad q = 200$$

οπότε διασφαλίζεται η ύπαρξη μέγιστου.

b) $\text{MaxR} = 200(12{,}5)e^{-1} = 2500e^{-1} = 919{,}70$.

c) Δεδομένου ότι

$$p = \frac{12{,}50}{e^{0{,}005q}} \Rightarrow e^{0{,}005q} = \frac{12{,}50}{p} \Rightarrow 0,005q = \ln\frac{12{,}50}{p}$$

$$\Rightarrow 0{,}005q = \ln 12{,}50 - \ln p \Rightarrow q = \frac{\ln 12{,}50 - \ln p}{0{,}005}$$

$$\varepsilon_d = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q} = \frac{-1}{0{,}005p}\cdot\frac{p}{q} = -1$$

d) $$\int_0^{200}(12{,}50e^{-0{,}005q})dq = \left[12{,}50e^{-0{,}005q}\frac{-1}{0{,}005}\right]_0^{200}$$

$$= \frac{-12{,}50}{0{,}005e} + \frac{12{,}50}{0{,}005} = 1.580{,}31$$

Επομένως, πλεόνασμα καταναλωτή:

$$1.580,31 - pq = 1.580,31 - 919,7 = 660,61$$

5) Έστω P(t) ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t. Ισχύει, $P'(t) = 1 + 3\sqrt{t}$ και επομένως

$$P(t) = \int(1 + 3\sqrt{t})\cdot dt = t + 2t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{Για } t = 0,\ P(t) = 10.000 \Rightarrow c = 10.000$$

$$P(10) = 10 + 2\cdot 10^{\frac{3}{2}} + 10.000 = 10.073{,}25$$

6) $$MC = -4Q^{-2} - 0{,}3 + Q$$

$$TC = \int MCdQ = \int(-4Q^{-2} - 0{,}3 + Q)dQ$$

Επομένως, $TC = 4Q^{-1} - 0{,}3Q + 0{,}5Q^2 + C$.

Για $Q = 1$, $AC = 6{,}2$, όπου $AC = TC/Q$.

Επομένως, $6{,}2 = 4 - 0{,}3 + 0{,}5 + C$, άρα $C = 2$.

και $TC = 4Q^{-1} - 0{,}3Q + 0{,}5Q^2 + 2$.

7) a) Ισορροπία στην αγορά προκύπτει όταν $y^d = y^s : 25 - 6x = 2 + 7x$.
Επομένως,

$$x = \frac{23}{13},\ y = \frac{187}{13}$$

b) Εισόδημα / δαπάνες στην αγορά είναι

$$xy = \frac{23}{13}\times\frac{187}{13} = \frac{4301}{169} \simeq 25{,}45$$

Πλεόνασμα Καταναλωτή:

$$\int_0^{\frac{23}{13}} (25-6x)dx - xy = [25x - 3x^2]_0^{\frac{23}{13}} - 25{,}45 = 9{,}39$$

Πλεόνασμα Παραγωγού:

$$xy - \int_0^{\frac{23}{13}} (2+7x)dx = 25{,}45 - \left[2x + \frac{7x^2}{2}\right]_0^{\frac{23}{13}} = 10{,}95$$

8) Ισορροπία στην αγορά επιτυγχάνεται όταν:

$$10 - Q - Q^2 = Q + 2 \Rightarrow Q^2 + 2Q - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (Q+4)(Q-2) = 0 \Rightarrow Q^* = 2$$

(η λύση $Q = -4$ απορρίπτεται), και επομένως $P^* = 4$

$$\int_0^2 (10 - Q - Q^2)dQ = \left[10Q - \frac{Q^2}{2} - \frac{Q^3}{3}\right]_0^2 = 20 - 2 - 2{,}66 = 15{,}34$$

Πλεόνασμα καταναλωτή: $15{,}34 - P^*Q^* = 15{,}34 - (4 \cdot 2) = 7{,}34$

$$\int_0^2 (Q+2)dQ = \left[\frac{Q^2}{2} + 2Q\right]_0^2 = 2 + 4 = 6$$

Πλεόνασμα παραγωγού: $P^*Q^* - 6 = (4 \cdot 2) - 6 = 2.$

Κεφάλαιο 12: Αριθμοδείκτες

1) a) Απλός δείκτης τιμών για το προϊόν Γ:

Έτος 0	Έτος 1	Έτος 2
(25/25) × 100 = 100	(8/25) × 100 = 32	(80/25) × 100 = 320

b)

Έτος	Δείκτης
1	100
2	26 = [(5 + 4 + 8)/(20 + 21 + 25)] × 100
3	364 = [(100 + 60 + 80)/(20 + 21 + 25)] × 100

c) Αλυσωτός δείκτης για το προϊόν Γ:

Έτος 0	Έτος 1	Έτος 2
(25/25) × 100 = 100	(8/25) × 100 = 32	(80/8) × 100 = 1000

d)

Έτος	Laspeyres (L)	Paasche (P)
1	100	100
2	24	27
3	397	371

e)

Έτος	Fisher = $\sqrt{L \times P}$
1	100
2	25
3	384

2)

P_0Q_0	P_1Q_1	P_1Q_0	P_0Q_1
800	720	960	600
320	480	384	400
1200	960	1440	800
320	192	384	160
2640	**2352**	**3168**	**1960**

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{1i}Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{4} P_{0i}Q_{0i}} \times 100 = \frac{3168}{2640} \times 100 = 120$$

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{1i}Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{4} P_{0i}Q_{1i}} \times 100 = \frac{2352}{1960} \times 100 = 120$$

3) α) Για να αλλάξει το έτος βάσης σε 2002, διαιρούμε τις τιμές όλων των προηγούμενων ετών της παλιάς σειράς με την τιμή 115 (του 2002) και πολλαπλασιάζουμε επί 100.

Π.χ. για το έτος 2000 θα έχουμε $\frac{100 \times 100}{115} = 86{,}95$ στη νέα σειρά.

για το έτος 2001 έχουμε $\frac{108}{115} \times 100 = 93{,}91$.

Έτσι λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

Έτος	Τιμάριθμος με βάση το 2002
2000	86,95
2001	93,91
2002	100
2003	110
2004	118

β) Για να αλλάξει το έτος βάσης σε 2000, πολλαπλασιάζουμε τις τιμές όλων των επόμενων ετών της νέας σειράς με 115 και διαιρούμε με 100.

Π.χ. για το έτος 2003 θα έχουμε $\frac{110 \times 115}{100} = 126{,}5$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα έτη, λαμβάνοντας τον πίνακα:

Έτος	Τιμάριθμος με βάση το 2000
2000	100
2001	108
2002	115
2003	126,5
2004	135,7

4) Ενοποιούμε τους δύο δείκτες τιμών βρίσκοντας τον αριθμό που θα πολλαπλασιάσει το ΑΕΠ1, ώστε να το καταστήσει συμβατό με τις αλλαγές στο

ΑΕΠ2. Αυτός ο αριθμός είναι, (87/101) = 0,861. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Χρονική περίοδος	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ΑΕΠ1	81,8	84,4	86,1	87	89	92	94	97	100	105

5) a, b)

Χρόνος	ΑΔΤ (Έτος βάσης 2)	ΑΔΤ (Έτος βάσης 4)
1	95,24	83,33
2	100	87,5
3	105,71	92,49
4	114,29	100
5	123,81	108,33

c) % αύξηση χρησιμοποιώντας ΑΔΤ με έτος βάσης 2: 5,7%.

% αύξηση χρησιμοποιώντας ΑΔΤ με έτος βάσης 4:

$$\frac{92{,}49 - 87{,}5}{87{,}5} = 5{,}7\%$$

Βεβαίως, δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των δύο.

Κεφάλαιο 13: Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

1. a) Ετησιοποιημένο επιτόκιο $i = \left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\mu} - 1, \quad \mu = 4,\ r = 0{,}08$.

Επομένως, $i = \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}0824321$ ανά έτος

b) €75.000 σε μια τράπεζα για ένα χρόνο αποδίδουν $\nu\mu = 4 \times 5$ πληρωμές τόκων από $r/\mu = 0{,}08/4$ η καθεμία. Στο τέλος των 5 ετών

$$MA = \Pi A\left(1 + \frac{r}{\mu}\right)^{\nu\mu} = 75.000\left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{20} = 111.446\ €$$

c) Η Παρούσα Αξία ενός συνόλου με ΜΑ = €75.000, πληρωτέα σε διά-

στημα 3 ετών, δεδομένου επιτοκίου r = 0,08, ανατοκιζόμενο ανά τρίμηνο, είναι

$$ΠΑ = ΜΑ/\left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\nu\mu} = 75.000/\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{12} = 59.137€$$

d) Η Τράπεζα Β προσφέρεται να μετατρέψει ΠΑ = €100.000 σε ΜΑ = €160.000 σε 5 χρόνια

$$ΜΑ = ΠΑ(1+1)^{\nu} \Rightarrow i = (ΜΑ/ΠΑ)^{1/\nu} - 1$$

$$= (160.000/100.000)^{1/5} - 1$$

Επομένως, i = 0,09856.

Το πριμ ρευστότητας είναι η διαφορά στα ετησιοποιημένα επιτόκια των Τραπεζών Α και Β.

Δηλαδή, 0,09856 – 0,082443 = 0,0161 = 1,61%.

e) Ετησιοποιημένο επιτόκιο της Τράπεζας Α: $i_A = 0,08243$.

Ετησιοποιημένο επιτόκιο της Τράπεζας Β: $i_B = 0,09856$.

Για να διπλασιάσουμε τα χρήματα θέλουμε ΜΑ/ΠΑ = 2, στην $ΜΑ = ΠΑ(1+i)^{\nu}$.

Δηλαδή, $2 = ΜΑ/ΠΑ = (1+i)^{\nu}$.

Για την Τράπεζα Α:

$$2 = (1+0,08243)^{\nu} \Rightarrow \ln 2 = \nu \ln(1,0824) \Rightarrow \nu_A = 8,75 \text{ χρόνια}.$$

Για την Τράπεζα Β:

$$2 = (1+0,09856)^{\nu} \Rightarrow \ln 2 = \nu \ln(1,0986) \Rightarrow \nu_B = 7,37 \text{ χρόνια}.$$

2. a) Αν το ονομαστικό επιτόκιο είναι r = 0,12, τότε το APR της υποθήκης είναι:

$$i = \left(1+\frac{r}{\mu}\right)^{\mu} - 1, \quad \mu = 12,\ r = 0,12$$

Επομένως, $i = \left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 12,68\%$.

b) Υποθήκη αξίας 50.000 με διακανονισμό 25 ετών και μηνιαίες πληρωμές

$$ΠΑ = C\left\{\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r(1+r)^{\nu}}\right\}$$

Επομένως, $C = P\left\{\frac{(1+r)^{n}-1}{r(1+r)^{n}}\right\}^{-1}$.

όπου Π = 50.000 είναι η υποθήκη, ν = 300(= 25 × 12) είναι ο αριθμός των μηνιαίων περιόδων και r = 0,01(= 0,12/12) είναι το ονομαστικό επιτόκιο για κάθε περίοδο (μήνα). Έτσι,

$$C = 50.000\left\{\frac{1,01^{300}-1}{0,01\times 1,01^{300}}\right\}^{-1}$$

Επομένως, C = 526,61 €.

3. a) Στο τέλος των 25 ετών το Land Rover θα κοστίζει:

$$ΜΑ = ΠΑ(1+r)^{\nu} = 50.000(1,05)^{25} = €169.317,75$$

b) $ΜΑ = C\left\{\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r}\right\}$ επομένως, $C = ΜΑ\left\{\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r}\right\}^{-1}$.

Το μηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο, δεδομένου του ετησιοποιημένου επιτοκίου του 12% είναι

$$\frac{r}{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = 1,12^{1/12} - 1 = 0,0095$$

Επομένως,

$$C = ΜΑ\left\{\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r}\right\}^{-1}$$

$$= 169.317,75\left\{\frac{1,0095^{300}-1}{0,0095}\right\}^{-1} = 100,18\ €$$

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της μελλοντικής αξίας (ΜΑ) μίας ράντας έχουμε:

$$ΜΑ = C\left\{\frac{(1+r)^{\nu}-1}{r}\right\}$$

Βρίσκουμε το r (το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο και το πολλαπλασιάζουμε επί 12 για να βρούμε το ετήσιο επιτόκιο), δεδομένου ότι ΜΑ = 11,500, C = 50, ν = 120(= 10 × 12). Με διαδοχικές αριθμητικές προσεγγίσεις, ο ετήσιο μέσος βαθμός απόδοσης προκύπτει ότι ισούται με 12%.

5. a) $$\text{ΚΠΑ(Α)} = -3000 + \frac{1100}{(1+0,01)} + \frac{2800}{(1+0,1)^2} = 314,05$$

$$\text{ΚΠΑ(Β)} = -3800 + \frac{800}{1,1} + \frac{1600}{1,1^2} + \frac{1600}{1,1^3} + \frac{1400}{1,1^4} = 407,91$$

Επομένως, επιλέγουμε τη στρατηγική Β.

- Ο ΕΒΑ είναι το απλό εκείνο επιτόκιο που αν χρησιμοποιηθεί για να προεξοφληθούν οι ταμειακές ροές θα δώσει μία προκαθορισμένη Παρούσα Αξία (0 στην περίπτωση αυτή).

$$\text{ΕΒΑ(Α)}: -3000 + \frac{1100}{(1+r)} + \frac{2800}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow \text{ΕΒΑ(Α)} = 16,67$$

$$\text{ΕΒΑ(Β)}: -3800 + \frac{800}{(1+r)} + \frac{1600}{(1+r)^2} + \frac{1600}{(1+r)^3} + \frac{1400}{(1+r)^4} = 0$$

$$\Rightarrow \text{ΕΒΑ(Β)} = 14,49$$

Επομένως, επιλέγουμε τη στρατηγική Α.

- Σύμφωνα με το κριτήριο αποπληρωμής, η στρατηγική Α έχει τη μικρότερη περίοδο αποπληρωμής. Συνεπώς, επιλέγουμε την Α.

b) $$\text{ΚΠΑ(Α)} = -3000 + \frac{1100}{1+0,14} + \frac{2800}{(1+0,14)^2} = 119,42$$

$$\text{ΚΠΑ(Β)} = -3800 + \frac{800}{1,14} + \frac{1600}{1,14^2} + \frac{1600}{1,14^3} + \frac{1400}{1,14^4} = 41,77$$

Επομένως επιλέγουμε τη στρατηγική Α.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ